الحديث فى

الاقتصاد القياسي

بين النظرية والتطبيق

الأستاذ الدكتور/ عبد القادر محمد عبد القادر عطيه

رقم الإيداع : 2004/13783

الترقيم الدولي : I .S.B.N 977/328-136-1

بسم الله الرحمن الرحيم

"وعلمك ما لم تكن تعلم ، وكان فضل الله عليك عظيما"

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

[illegible]

[illegible]

المقدمة

بالرغم من أن هناك تطورات عديدة حدثت في علم الاقتصاد القياسي على أيدي المتخصصين فيه ، إلا أن كثيراً من التطورات التي تتم في فروع المعرفة الأخرى تغذي التطور في هذا الفرع . فالتطور في النظرية الإحصائية ، والنظرية الاقتصادية ، وثورة المعلومات وما صاحبها من توفر في البيانات ، و التطور في مجال الكمبيوتر وزيادة قدراته الحسابية والتخزينية ، ساعدت كلها على حدوث تطور كبير في مجال الاقتصاد القياسي خلال الخمسين سنة الأخيرة . وما يكاد المرء ينتهي من إعداد كتاب في هذا المجال على مدى عدد من السنوات إلا ويكتشف أن تطورات جديدة قد حدثت ، بحيث لا يمكنه تضمين الكتاب كل ما يحدث من تطورات .

و تحتوي هذه الطبعة من الكتاب على أربعة أجزاء تتمثل في :

الجزء الأول : قياس النماذج ذات المعادلة الواحدة .

الجزء الثاني : المشاكل القياسية.

الجزء الثالث : قياس النماذج ذات المعادلات المتعددة .

الجزء الرابع : الاقتصاد القياسي التطبيقي .

ويلاحظ في هذا الصدد أن الاقتصاد القياسي كما تمت معالجته في هذا الكتاب يحتوي على فرعين هما الاقتصاد القياسي النظري Theoretical Econometrics والاقتصاد القياسي التطبيقي Applied Econometrics .

ويهتم الاقتصاد القياسي النظري بتقديم الطرق الملائمة لقياس العلاقات الاقتصادية المختلفة مثال طريقة المربعات الصغرى العادية ، وطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين ، وطريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل وغيرها . كما يناقش الافتراضات التي تقوم عليها هذه الطرق ، وخصائصها الإحصائية ، والمشاكل القياسية التي تنجم عن اختلال افتراضاتها ، بالإضافة إلى وسائل علاج هذه المشاكل .

أما الاقتصاد القياسي التطبيقي فهو يختص بتطبيق الطرق القياسية النظرية في مجالات واقعية عديدة ترتبط بالاقتصاد والأعمال . ولكن هذا لا يعني أن هناك فصلا تاما بين هذين الفرعين . فالاقتصاد القياسي التطبيقي يستخدم طرق القياس التي يتضمنها الاقتصاد القياسي النظري ، وفي كثير من الحالات يترتب على عملية القياس التطبيقي الوصول إلى طرق قياس جديدة تتغلب على الصعوبات والمشاكل التي تواجه طرق القياس التي تولدت في ظل فرع الاقتصاد القياسي النظري .

ويتضمن الجزء المتعلق بالاقتصاد القياسي التطبيقي نتائج بعض الدراسات التطبيقية التي تطرقت إلى استخدام طرق قياسية . ومن أبرز الموضوعات التي تم التطرق إليها في هذا الجزء : نموذج

تسعير الأصول المالية كأحد التطبيقات على الانحدار البسيط ، ومنحنى التعلم و وفورات الحجم كأحد التطبيقات على الانحدار المتعدد ، وقياس التغير في النوعية كأحد التطبيقات على المتغيرات الصورية ، وتقدير دالة الطلب على الكهرباء كأحد التطبيقات على الانحدار غير الخطي ، وقياس العلاقة بين الإعلان والمبيعات كأحد التطبيقات على النماذج الآنية ، واختبار نظرية تعادل القوى الشرائية PPP كأحد التطبيقات على نموذج تصحيح الخطأ .

وقد تضمنت هذه الطبعة معالجة أكثر عمقاً لتحليل السلاسل الزمنية ، وهو المجال الذي زاد استخدامه في الآونة الأخيرة . وجدير بالذكر أنه تم إجراء جميع الحسابات اللازمة لأمثلة الكتاب باستخدام برنامج كمبيوتر Eviews4 .

وأسأل الله العلي القدير أن يتقبل مني هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم ، وأن يغفر لي ما قد أكون قد وقعت فيه من أخطاء، إنه نعم المولى ونعم النصير .

المؤلف

أ.د عبدالقادر محمد عبدالقادر عطية

مكة المكرمة

ربيع ثاني 1425 هـ - يونيو 2004 م

محتويات الكتاب

الجزء الأول

قياس النماذج ذات المعادلة الواحدة

Estimation of Single -Equation Models

الجزء الثاني

تقدير النماذج ذات المعادلة الواحدة

Estimation of Single-Equation Models

الفصل الأول

التعريف بالاقتصاد القياسي ومنهج البحث فيه

لقد استُخدِم لفظ اقتصاد قياسي لأول مرة عام ١٩٢٦، ويرجع الفضل في ذلك للاقتصادي Ranger Frisch . وهناك من يؤرخ لمولد الاقتصاد القياسي بفترة الثلاثينات من القرن التاسع عشر حيث استخدم الاقتصادي كورنو Cournout التحليل الكمي في أبحاثه بطريقة منظمة منذ تلك الفترة . ويعتبر بذلك كورنو أبو الاقتصاد القياسي في رأي البعض ، مثلما يعتبر آدم سميث أبو علم الاقتصاد الوضعي . بل إن هناك من يؤرخ لمولد الاقتصاد القياسي بظهور الجدول الاقتصادي عند مدرسة الطبيعيين على يد الطبيب الفرنسي كيناي Quesnay عام ١٧٥٨م . ويذكر البعض أن تطبيقات الاقتصاد القياسي بدأت مع دراسات إنجل Engel في القرن التاسع عشر والذي استخدم فيها بيانات عن إنفاق الأسر وتوصل إلى قانون إنجل المعروف حتى الآن ، وهو ينص على أن " النسبة المخصصة للغذاء من الإنفاق الكلي للأسرة تقل مع زيادة الدخل ".

ويهدف هذا الفصل إلى إلقاء الضوء على مفهوم الاقتصاد القياسي ومنهج البحث فيه، وهو يتكون من ثلاثة مباحث :

المبحث الأول : التعريف بالاقتصاد القياسي.

المبحث الثاني : منهج البحث في الاقتصاد القياسي .

المبحث الثالث : دور النماذج القياسية في التوفيق بين السياسة والنظرية .

المبحث الأول

التعريف بالاقتصاد القياسي

Econometrics

يعرف البعض الاقتصاد القياسي بأنه القياس في الاقتصاد ، أو القياس الاقتصادي . وبصورة أكثر تفصيلا يعرف الاقتصاد القياسي بأنه فرع المعرفة الذي يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية من خلال بيانات واقعية، بغرض اختبار مدى صحة هذه العلاقات كما تقدمها النظرية ، أو تفسير بعض الظواهر ، أو رسم بعض السياسات ، أو التنبؤ بسلوك بعض المتغيرات الاقتصادية .

ويلاحظ أن هذا التعريف يركز على نقطتين أساسيتين :

(١–١–١) العلاقة بين الاقتصاد القياسي والفروع الأخرى.

(١–١–٢) أهداف الاقتصاد القياسي .

(١–١–١) العلاقة بين الاقتصاد القياسي والفروع الأخرى.

يعتبر الأقتصاد القياسي محصلة لثلاثة فروع من المعرفة، هي الإحصاء والنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي. أما عن الإحصاء فهو يمدنا بأساليب القياس مثل الارتباط والانحدار ، كما يمدنا بطرق القياس ، بالإضافة إلى البيانات الواقعية المبوبة التي تستخدم في عملية القياس (الإحصاء الاقتصادي) . وبالنسبة للنظرية الاقتصادية فهي تحدد لنا العلاقات الاقتصادية المراد قياسها من خلال الفروض المفسرة التي تقدمها.أما فيما يتعلق بالاقتصاد الرياضي فهو يصيغ لنا هذه العلاقات النظرية في صورة معادلات رياضية قابلة للقياس. ولكن هذا لا يعني أن الاقتصاد القياسي ليس له صفة مستقلة عن هذه الفروع، وإنما هو فرع متميز عن كل واحد منها . وسوف نحاول توضيح تميز الاقتصاد القياسي عن هذه الفروع فيما يلي :

(١) النظرية الاقتصادية و الاقتصاد القياسي

تقدم لنا النظرية الاقتصادية فروضا مفسرة Hypotheses توضح العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة وتفسر سلوك بعض الظواهر الاقتصادية . ومن الأمثلة على ذلك الفرض المفسر الذي يعرضه قانون الطلب القائل : " كلما ارتفع ثمن السلعة كلما انخفضت الكمية المطلوبة منها مع ثبات العوامل الأخرى على حالها ، والعكس صحيح". فمثل هذا الفرض يحدد العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها ، ويفسر لنا التقلب في الكمية المطلوبة من سلعة ما بالتغير في سعرها مع افتراض ثبات العوامل الأخرى . وإذا ما توسعنا في نظرية الطلب كإحدى جزئيات النظرية الاقتصادية ، فإننا نجد أنها تعرض لعدد أكبر من العلاقات الاقتصادية . فهي تشير إلى أن طلب المستهلك على سلعة معينة يتحدد بعدد من العوامل أهمها سعر السلعة ، وأسعار السلع الأخرى ، ودخل المستهلك ، وذوق المستهلك . ومن ثم فان التغير في أي من هذه العوامل يؤدي لتغير الطلب على السلعة في اتجاه معين . وهذا يعني أن نظرية الطلب في صورتها الموسعة تفسر التقلب في طلب السلعة بالتغير في عوامل عديدة . وهكذا الأمر بالنسبة للجزئيات الأخرى للنظرية الاقتصادية ، كنظرية العرض ، ونظرية الإنتاج، ونظرية الاستهلاك ....الخ.

والاقتصاد الرياضي ما هو إلا إعادة صياغة للعلاقات الاقتصادية كما تحددها النظرية من أسلوب لفظي إلى أسلوب رياضي. وهذا يعني أنه لا يوجد هناك اختلاف بين النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي إلا في وسيلة التعبير عن العلاقات الاقتصادية. فالاقتصاد الرياضي يعبر عن العلاقات التي تحتوي عليها نظرية الطلب مثلا في الصيغة الرياضية التالية :

ط١ = أ. + أ١ ث١ + أ٢ ث٢ + أ٣ ل + أ٤ ذ ....(١-١)

$$D_1 = ao + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3Y + a_4S$$

حيث :

ط١ = الكمية المطلوبة من السلعة ١ $D_1 =$

ث١ = سعر السلعة ١ $P_1 =$

ث٢ = سعر سلعة أخرى $P_2 =$

ل = الدخل $Y =$

ذ = الذوق $S =$

والصيغة الرياضية السابقة تسمى دالة الطلب ، وهي توضح أن التغير في أي من المتغيرات التفسيرية الأربعة التي تظهر بالجانب الأيسر من المعادلة (الأيمن في الصيغة الإنجليزية) يصحبه تغير في طلب السلعة "ط١ " يتحدد بمعاملات دالة الطلب التي تتمثل في :

$$\frac{\partial ط_1}{\partial ث_1} = أ_1 \text{ ، } \frac{\partial ط_1}{\partial ث_2} = أ_2 \text{ ، } \frac{\partial ط_1}{\partial ل} = أ_3 \text{ ، } \frac{\partial ط_1}{\partial ذ} = أ_4$$

حيث أ١ < صفر ، أ٢ > صفر إذا كان ث٢ سعر سلعة بديلة ، أ٢ < صفر إذا كان ث٢ سعر سلعة مكملة ، أ٣ > صفر للسلعة العادية ، أ٤ > صفر .

وبهذه الطريقة فان الصياغة الرياضية لدالة الطلب تعبر تماما عما توضحه النظرية الاقتصادية . ولكن على الرغم من ذلك فان هناك فرقا بين كل من النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي من ناحية ، و الاقتصاد القياسي من ناحية أخرى. ويمكن توضيح ذلك فيما يلي :

(أ) فالنظرية الاقتصادية ومن ثم الاقتصاد الرياضي تنظر إلى كل المتغيرات التي تؤثر في الظواهر الاقتصادية على أنها متغيرات منتظمة تتغير بصورة مستمرة، ويمكن التعبير عنها بقيم محددة ، كما يمكن التنبؤ بسلوكها بدقة ، مثل السعر والدخل . وهي بذلك تهمل ما يسمى بالمتغيرات العشوائية التي لا تأخذ قيما محددة ، وليس هناك تأكد من حدوثها ، ولا تتغير بطريقة منتظمة ، ولكنها تؤثر في سلوك أي ظاهرة . ومن أمثلة هذه المتغيرات الأحداث السياسية ، وانتشار الأوبئة ، وحدوث الزلازل والحروب، والتقلبات الجوية ، والإشاعات وغيرها. ولأن المتغيرات العشوائية هي مصدر عدم التأكد في أي علاقة ، فإن

إهمالها من جانب النظرية الاقتصادية يعني أنها تنظر لكل العلاقات الاقتصادية على أنها علاقات مؤكدة Exact . فنظرية الطلب تشير إلى أن التغير في الطلب يرجع للتغير في سعر السلعة أو أسعار السلع الأخرى أو الدخل أو الذوق بحيث أن ١٠٠٪ من التغير في هذا الطلب يرجع للتغير في هذه المتغيرات المنتظمة ، وأن صفر ٪ من التغير فيه يرجع للتغير في المتغيرات العشوائية .

أما عن الاقتصاد القياسي ، فلأنه يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية كما هي قائمة في الواقع مستخدما بيانات فعلية ، فإنه يأخذ أثر المتغيرات العشوائية في الحسبان بجانب المتغيرات المنتظمة . ولما كان وجود المتغيرات العشوائية في الواقع يجعل العلاقة الاقتصادية بين أي متغيرين غير مؤكدة، فإن الاقتصاد القياسي ينظر إلى العلاقات الاقتصادية على أنها علاقات احتمالية (غير مؤكدة). فارتفاع سعر سلعة معينة قد لا يصاحبه في كل مرة انخفاض في الكمية المطلوبة لهذه السلعة كما تقرر النظرية الاقتصادية ، رغم ثبات كل المتغيرات المنتظمة الأخرى .ويحدث هذا إذا صاحب ذلك إشاعة بأن السلعة سوف تختفي من السوق. وهذا يعني أن وجود الإشاعة كمتغير عشوائي يجعل احتمال أن تكون العلاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة أقل من ١٠٠٪ .

ولهذا السبب فإن دالة الطلب في الاقتصاد القياسي تأخذ الصيغة التالية:

ط ١ = أ. + أ١ ث١ + أ٢ ث٢ + أ٣ ل + أ٤ ذ + ع ....(١-٢)

$$D_1 = a_0 + a_1 P_1 + a_2 + P_2 + a_3 Y + a_4 S + u$$

حيث :

ط١ =أ. + أ١ ث١ + أ٢ ث٢ + أ٣ ل + أ٤ ذ = أثر المتغيرات المنتظمة

ع = أثر المتغير العشوائي.

(ب) بالإضافة إلى ما سبق ، فإن النظرية الاقتصادية (ومن ثم الاقتصاد الرياضي) لا تحدد درجة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية كما هي في الواقع ، وإنما تحدد فقط اتجاه هذه العلاقة . فهي لا تحدد مثلا نسبة الزيادة في الطلب التي يمكن أن تنجم عن ارتفاع

الدخل بنسبة ١٠ ٪ . ولعل هذا يرجع إلى أن النظرية الاقتصادية أو الاقتصاد الرياضي لا يحددان قيما رقمية لمعاملات العلاقات الاقتصادية $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$، $أ_٤$.

ولكن على الرغم من ذلك فان الاقتصاد القياسي يحدد درجة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية كما هي في الواقع من خلال قياس معاملات المرونة. فباستخدام الأساليب الإحصائية يمكن للاقتصاد القياسي تحديد قيم المعاملات $أ_١$، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ... من خلال بيانات واقعية متاحة عن $ط_١$ ، $ث_١$ ، $ث_٢$ ، ل . وبتحديد هذه القيم يمكن حساب معاملات المرونة التي تحدد درجة العلاقة الاقتصادية بين المتغيرات على النحو التالي :

$$م_١ = أ_١ \left(\frac{\overline{ث_١}}{\overline{ط_١}}\right) = \text{مرونة الطلب السعرية}$$

$$م_٢ = أ_٢ \left(\frac{\overline{ث_٢}}{\overline{ط_١}}\right) = \text{مرونة الطلب التبادلية}$$

$$م_٣ = أ_٣ \left(\frac{\overline{ل}}{\overline{ط_١}}\right) = \text{مرونة الطلب الدخلية}$$

حيث تشير علامة (—) والتي تنطق بار إلى متوسط المتغيرات المختلفة .

(٢) الاقتصاد القياسي و الإحصاء

ينقسم الإحصاء إلى إحصاء اقتصادي وإحصاء رياضي، ويختلف كل منهما عن الاقتصاد القياسي . فالإحصاء الاقتصادي يهتم بتجميع بيانات واقعية عن المتغيرات الاقتصادية كالدخل والاستهلاك والاستثمار والادخار والأسعار ، ثم يقوم بتبويبها في جداول أو عرضها في صورة رسوم تصف سلوك هذه المتغيرات عبر الزمن. وبذلك فان مهمة الإحصاء الاقتصادي تعتبر مهمة وصفية . فهو من ناحية لا يقدم تفسيرات للتغير الذي يحدث في سلوك المتغيرات الاقتصادية عبر الزمن ، ومن ناحية أخرى لا يقيس معاملات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات المختلفة . هذا في حين أن الاقتصاد القياسي يستخدم البيانات التي يقدمها الإحصاء الاقتصادي في قياس معاملات العلاقات

الاقتصادية ، كما يقدم تفسيرا للتغير في سلوك المتغيرات الاقتصادية مستخدما هذه المعاملات.

أما عن الإحصاء الرياضي فهو يتكون من طرق القياس الإحصائية التي صممت أساسا لقياس العلاقات التجريبية البسيطة في مجال العلوم الطبيعية كالفيزياء والكيمياء. ولما كانت طبيعة العلاقات التجريبية مختلفة عن طبيعة العلاقات الاقتصادية فان طرق القياس الإحصائية لا تعتبر صالحة لقياس العلاقات الاقتصادية إلا بعد إجراء تعديلات عليها حتى تلائم طبيعة الظواهر الاقتصادية .

ولعل الاختلاف بين طبيعة العلاقات التجريبية و الاقتصادية يرجع إلى عاملين :

(أ) في حالة العلاقات التجريبية يمكن للباحث أن يتحكم في جميع المتغيرات داخل المعمل بطريقة مباشرة ، مثال ذلك تحكمه في درجة الحرارة ، ودرجة الضغط، والوزن ، والحجم ، وغيرها . وهو بذلك يمكنه أن يعزل أثر العوامل الأخرى بسهولة إذا أراد أن يختبر أثر عامل واحد على الظاهرة محل البحث. وهذا يعني أنه لا يوجد هناك تداخلا بين أثار المتغيرات المستقلة أو التفسيرية عند تأثيرها على المتغير التابع في حالة قياس العلاقات التجريبية . ولذلك فانه من السهل في مثل هذه الحالة اختبار العلاقة بين متغيرين اثنين من خلال معامل الانحدار البسيط ومعامل الارتباط البسيط. ولكن على العكس من ذلك فان جميع المتغيرات التي تؤثر في الظواهر الاقتصادية تتغير في وقت واحد دون أن يكون للباحث أدنى مقدرة للتحكم فيها . فالأسعار تتغير في نفس الوقت الذي تتغير فيه الدخول والأذواق وكلها تؤثر على طلب المستهلك في وقت واحد . ونظرا لانعدام مقدرة الباحث على التحكم في المتغيرات الاقتصادية في دنيا الواقع فانه لا يمكنه عزل أثر العوامل الأخرى إذا ما أراد أن يبحث العلاقة بين متغيرين فقط. ولاشك أن التداخل بين أثار المتغيرات التفسيرية عند تأثيرها على ظاهرة اقتصادية معينة يجعل من معامل الانحدار البسيط و معامل الارتباط البسيط أداتين غير ملائمتين لقياس العلاقات الاقتصادية . وهنا يصبح من الضروري إجراء تعديلات على هذه الطرق الإحصائية لتصبح طرقا ملائمة لقياس العلاقات الاقتصادية المتداخلة . وفي هذا المجال

يستخدم الاقتصاد القياسي علاقات الانحدار المتعدد والنماذج ذات المعادلات المتعددة .

(ب) نظراً لأن الباحث في مجال العلوم الطبيعية يمكنه التحكم في بيئة التجربة داخل المعمل ، فانه لا يوجد غالبا ما يمكن تسميته بالعوامل العشوائية أو غير المتوقعة في حالة قياس العلاقات التجريبية . أما في حالة العلاقات الاقتصادية فانه كثيراً ما توجد عوامل غير متوقعة أو عشوائية تؤثر في هذه العلاقات نظرا لانعدام مقدرة الباحث على التحكم في بيئة البحث. ولهذا السبب فمن الممكن القول أن العلاقات التجريبية أكثر تأكدا من العلاقات الاقتصادية . ولما كانت الطرق الإحصائية المصممة لقياس العلاقات التجريبيه لا تأخذ المتغيرات العشوائية في الاعتبار ، فإنها تصبح في حاجة لتعديل قبل أن تصير ملائمة لقياس العلاقات الاقتصادية .

وعند إجراء التعديلات السابقة على الطرق الإحصائية التي يحتوي عليها الإحصاء الرياضي فإنها تتحول إلى طرق قياسية تلائم طبيعة العلاقات الاقتصادية ، ومثل هذه الطرق القياسية هي التي يستخدمها الاقتصاد القياسي في قياس العلاقات الاقتصادية.

(١-١-٢) أهداف الاقتصاد القياسي :

يشير الجزء الثاني من تعريف الاقتصاد القياسي إلى الأهداف التي يخدمها هذا الفرع . ويمكن تلخيصها في أربعة أهداف

(١) اختبار النظرية الاقتصادية .

(٢) تفسير بعض الظواهر الاقتصادية .

(٣) رسم أو تقييم السياسات الاقتصادية .

(٤) التنبؤ بسلوك المتغيرات الاقتصادية

(١) اختبار النظرية الاقتصادية

تعتمد النظرية الاقتصادية في جزء كبير منها على طريقة الاستنباط Deduction في التوصل لنتائجها . وطريقة الاستنباط تبدأ من افتراضات مبسطة يضعها الباحث بهدف تبسيط الواقع ثم يستنبط منها بالاستدلال المنطقي ما يسمى بالفروض المفسرة

Hypotheses . والفروض المفسرة عادةً ما تقدم تفسيرا للظواهر الاقتصادية محل البحث. وهناك نوعان من الافتراضات المبسطة : افتراضات سلوكية Assumptions Behavioral و افتراضات مقيدة Restrictive Assumptions . والافتراض السلوكي هو الافتراض الذي يتعلق بهدف الوحدة الاقتصادية ويسمى سلوكي لأن الهدف هو الذي يحكم السلوك ، ومن أمثلته " افتراض أن هدف المستهلك هو تعظيم المنفعة " أو " افتراض أن هدف المنتج هو تعظيم الربح ".

أما عن الافتراضات المقيدة فالهدف منها هو عزل أثر العوامل الأخرى التي هي ليست محل البحث أو تثبيتها . فإذا أراد الباحث تحديد العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعرها ، فانه يقوم بوضع بعض الافتراضات المقيدة التي تعزل أثر العوامل الأخرى المؤثرة في الكمية المطلوبة مثل : افتراض ثبات أسعار السلع الأخرى ، و افتراض ثبات الدخل ، و افتراض ثبات الدوق . وباستخدام الافتراضات المبسطة بنوعيها يمكن استنباط فرضا مفسرا للظاهرة محل البحث . فعلى سبيل المثال يمكن استنباط فرضا مفسرا بشأن العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر من خلال الافتراضات المبسطة لنظرية الطلب . فإذا افترضنا أن هدف المستهلك هو تعظيم المنفعة (افتراض سلوكي) ، وافترضنا أن العوامل المؤثرة في الطلب غير السعر ثابتة (افتراض مقيد) فإننا نستنبط من ذلك فرضا مفسرا مؤداه أنه " كلما انخفض سعر السلعة كلما اندفع المستهلك نحو زيادة الكمية المطلوبة منها ليزيد من منفعته الكلية" . ويلاحظ هنا أن هذا الفرض المفسر يحتمل الصواب كما يحتمل الخطأ ، وذلك وفقا لمدى صحة الافتراضات المبسطة التي تم استنباطه منها. وللحكم على مدى صحة هذا الفرض يجب أن نلجأ للواقع ونقيس العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها ونحدد ما إذا كانت عكسية كما توضح النظرية أم غير ذلك . والاقتصاد القياسي يقوم بمهمة القياس تلك بغرض اختبار مدى صحة النظرية الاقتصادية. ويوجد في هذا الصدد احتمالين :

أ-أن تتفق النظرية مع الواقع وفي هذه الحالة نقبل النظرية على أنها صحيحة في ظل الظروف الراهنة .

ب- أن تتعارض النظرية مع الواقع وفي هذه الحالة إما أن نرفض النظرية في صورتها القديمة أو نعدلها ثم نعيد اختبارها من جديد.

(٢) تفسير بعض الظواهر الاقتصادية

يعتقد البعض طالما أن مهمة الاقتصاد القياسي تتلخص في قياس العلاقات الاقتصادية بغرض اختبارها ، فإن القياس لا يمكن أن يتم إلا بناءاً على نظرية ، حيث أن الأخيرة هي التي تقدم العلاقات التي يمكن قياسها . ووفقا لهذا الرأي فإنه لا يوجد هناك قياس بدون نظرية . ومن ثم فإن مهمة النظرية الاقتصادية تأتي قبل مهمة الاقتصاد القياسي . ويعرف مؤيدو هذا الرأي بأصحاب مدخل الاستنباط أو مدخل القياس بنظرية.

ولكن هناك فريقا آخر يرى أن وجود نظرية ليس شرطاً ضرورياً حتى تتم عملية القياس . فعملية القياس يمكن أن تتم أولاً ومنها يمكن التوصل إلى نظرية جديدة تفسر الظواهر الاقتصادية . ويعرف هذا الفريق بأصحاب مدخل الاستقراء Induction أو القياس بدون نظرية. وفي هذه الحالة يقوم الباحث بقياس العلاقة بين المتغير التابع وعدد من المتغيرات المستقلة التي يعتقد أنها تؤثر في المتغير التابع . ثم يسقط المتغيرات المستقلة التي يوضح القياس أن أثرها على المتغير التابع غير معنوي أو لا يختلف جوهريا عن الصفر، ويعزي التغير في المتغير التابع للمتغيرات المستقلة ذات الأثر المعنوي . فإذا أراد باحث مثلا تفسير ظاهرة عدم فاعلية الحصار الاقتصادي في تحقيق الأهداف السياسية المرجوة منه في بعض الحالات ، فإنه قد يشرع في اختبار أثر بعض العوامل التي يعتقد أنها تؤثر في هذه الفاعلية مثل الحجم الاقتصادي النسبي للدولة الهدف ، وموقف الدول الأخرى من الحصار ، ومدى شمولية الحصار ، ومدى إستراتيجية السلع محل الحصار ، وغيرها . ثم يحدد العوامل ذات التأثير الجوهري ويستبعد العوامل ذات التأثير غير الجوهري من خلال عمليات القياس الاقتصادي .فإذا اتضح له مثلاً أن الحجم الاقتصادي النسبي للدولة الهدف على علاقة عكسية مع فاعلية الحصار الاقتصادي ، وأنه هو المتغير الجوهري الوحيد في تأثيره على الحصار ، فقد يخلص بنظرية جديدة مؤداها كلما زاد الحجم الاقتصادي النسبي للدولة الهدف (تحت

الحصار) كلما قلت فاعلية الحصار الاقتصادي في تحقيق أهدافه السياسية وربما الاقتصادية . ولكن لا يمكن القول في هذه الحالة أن النظرية التي تم اشتقاقها من بيانات واقعية قد تم اختبارها ، حيث لا يمكن اختبار نظرية ما باستخدام نفس المادة التي صنعت منها . ولذلك تبقى هذه النظرية محل شك حتى يتم اختبارها من خلال بيانات أخرى غير التي تم اشتقاقها منها.

ولقد تعرض مدخل القياس بدون نظرية لعدد من الانتقادات أهمها :

(أ) في حين يوفر أسلوب القياس بنظرية الوقت عند القياس، حيث تحدد النظرية للباحث المتغيرات التي يتعين جمع بيانات بشأنها والعلاقة التي تحتاج إلى قياس ، فإن أسلوب القياس بدون نظرية يحتاج إلى جهد ووقت كبيرين قبل أن يصل لفرض يفسر الظاهرة . ففيه يجمع الباحث بيانات عن عدد كبير جدا من المتغيرات المستقلة التي يعتقد أنها تؤثر على المتغير التابع ، ثم يقوم بقياس العلاقة بين كل من هذه المتغيرات التفسيرية والمتغير التابع ، وفي النهاية يستبعد المتغيرات ذات الأثر غير الجوهري ويستبقي المتغيرات ذات الأثر الجوهري ، على أن ينسب إليها التغير في المتغير التابع . فالباحث في هذه الحالة لا يعرف على وجه التحديد المتغيرات التي يجب أن يجمع عنها بيانات .

(ب) بالإضافة إلى ما سبق فإن عملية القياس الإحصائي وحدها قد توصلنا إلى نتائج ليس لها أي مدلول . فوجود ارتباط قوي بين متغيرين لا يعني بالضرورة أن التغير في أحدهما كان سببا في تغير الآخر. فلقد اتضح مثلا أن معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد نوع معين من الطيور التي تظهر في سماء نيويورك خلال فترة معينة كان موجباً وقريباً من الواحد ، وبالطبع فإن هذا الارتباط الإحصائي القوي بين عدد الأطفال وعدد الطيور ليس له أي مدلول أو معنى ، ولا يعني أن أحدهما سببا في الأخر .

(٣) رسم أو تقييم السياسات الاقتصادية

يساعد الاقتصاد القياسي على تحديد القيم الرقمية لمعاملات العلاقات الاقتصادية . ولاشك أن معرفة هذه القيم يلزم لرسم سياسة اقتصادية سليمة . فإذا أرادت

منشأة أن ترسم سياسة سعرية ملائمة لزيادة إيراداتها الكلية فلابد من معرفة القيمة الرقمية لمرونة الطلب السعرية لسلعتها . فإذا كانت هذه المرونة أكبر من الواحد فإن تخفيض السعر هو الذي يزيد إيراداتها ، وإذا كانت أقل من الواحد فإن رفع السعر هو الذي يزيد إيراداتها. ومرونة الطلب السعرية تلك يمكن تحديد قيمتها من خلال قياس دالة الطلب من بيانات واقعية . وكذلك إذا أرادت شركة ما تحديد السياسة الإعلانية الأكثر ملائمة لبرنامج مبيعاتها ، فلابد أن تقيس العلاقة بين أساليب الإعلان المختلفة (كاستخدام الجوائز ، وبث إرساليات إعلانية، ومنح خصم ، والقيام بأعمال خيرية،......) وكمية المبيعات أو معدل الربح لتحديد مرونة المبيعات أو الربح لكل وسيلة اعلانية، وتحديد أي وسيلة أكثر فاعلية .

وإذا أرادت الدولة أن ترسم سياسة صرف أجنبي ملائمة للقضاء على العجز في ميزان مدفوعاتها، فلابد لها من معرفة القيم الرقمية لمرونة الصادرات السعرية ومرونة الواردات السعرية واللتان تحددان مدى استجابة كل من الصادرات والواردات للتغير في سعر السلعة الناجم عن تغير سعر الصرف. فإذا كانت مرونة الصادرات تساوي صفرا أو قريبة منه فان تخفيض سعر الصرف سوف يخفض حصيلة الصادرات، ولذا فان السياسة الملائمة في هذه الحالة ربما تكون رفع سعر الصرف . وعموما فإن مثل هذه المرونات لا يمكن معرفتها إلا من خلال قياس معاملات دوال الطلب على الصادرات والواردات . وبنفس الطريقة إذا أرادت الدولة أن تتحكم في معدل التضخم من خلال التحكم في عرض النقود فلابد من معرفة معامل العلاقة بين المستوى العام للأسعار وكمية النقود قبل أن ترسم السياسة النقدية الملائمة لتخفيض معدل التضخم بنسبة معينة .

ومن ناحية أخرى تستخدم بعض المعايير في اختبار معنوية التأثير الذي تحدثه السياسات الاقتصادية، ومن ثم تساعد في تقييم مدى فاعليتها في التأثير على الظواهر.

(٤) التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل

إذا اعتبرنا أن المستقبل القريب هو امتداد للماضي القريب ، فمن الممكن استخدام الطرق القياسية في تحديد القيم المتوقعة لبعض المتغيرات الاقتصادية في

فترات مقبلة ، وذلك بالاعتماد على البيانات الواقعية المتاحة عن فترات ماضية. ومثل هذا التنبؤ يساعد على رسم الخطط الاقتصادية الملائمة ، كما يمكن صانع القرار من اتخاذ خطوات مبكرة لازمة لإنجاح الخطط الاقتصادية في المستقبل . فإذا كان تحقيق هدف الخطة مثلا بعد عشر سنوات يتطلب زيادة العمالة الصناعية في مجال معين إلى المستوي "ص" وتمكنا من تحديد الكمية المتوقعة من العمالة من هذا النوع في هذا التاريخ باستخدام الطرق القياسية فكانت على سبيل المثال "س" ، واتضح أن س < ص فلا شك أن هذا سوف يساعد صانع القرار على وضع خطة مبكرة للتوسع في تدريب العمالة الصناعية في هذا المجال بما يكفل سد العجز(ص ــ س) حتى يمكن تحقيق هدف الخطة . وكذلك الأمر إذا أرادت الحكومة أن تفرض ضريبة جديدة ، فعليها أن تعرف مقدما الآثار المتوقعة لهذه الضريبة على التضخم، والبطالة والناتج القومي ، وغيرها. وبالطبع لن يمكنها عمل ذلك دون تقدير نموذج الدخل الذي يربط بين كل هذه المتغيرات باستخدام بيانات تاريخية . وإذا أرادت منشأة ما أن توسع طاقتها الإنتاجية فلابد أن تتنبأ بحجم مبيعاتها في المستقبل خلال ١٠ سنوات مقبلة مثلا. وبالطبع فان الاقتصاد القياسي يساعد على إجراء مثل هذه التنبؤات .

المبحث الثاني

منهج البحث في الاقتصاد القياسي

يمر أي بحث قياسي بأربعة مراحل يمكن إيجازها فيما يلي:

المرحلة الأولى : تعيين النموذج Specification of the Model (أو مرحلة وضع الفروض).

المرحلة الثانية : تقدير معلمات النموذج Estimation of the Model (أو مرحلة اختبار الفروض).

المرحلة الثالثة : تقييم المعلمات المقدرة للنموذج Evaluation of the Estimates.

المرحلة الرابعة : اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ Evaluation of the Forecasting Validity of the Model .

وسوف نقوم بشرح كل مرحلة من هذه المراحل بالتفصيل في هذا المبحث ، على أن ننهي هذا المبحث بنبذة عن النماذج وأنواعها .

(١-٢-١) تعيين النموذج

يقصد بتعيين النموذج صياغة العلاقات الاقتصادية محل البحث في صورة رياضية حتى يمكن قياس معاملاتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية . وتنطوي هذه المرحلة على عدد من الخطوات أهمها :

(١) تحديد متغيرات النموذج .

(٢) تحديد الشكل الرياضي للنموذج .

(٣) تحديد التوقعات القبلية .

(١) تحديد متغيرات النموذج

يمكن للباحث أن يحدد المتغيرات التي يتضمنها النموذج عند دراسته لظاهرة اقتصادية معينة من خلال مصادر عديدة . ولعل أول هذه المصادر النظرية الاقتصادية ،

وثانيها المعلومات المتاحة من دراسات قياسية سابقة في المجال الذي يبحث فيه بوجه عام ، وثالثها المعلومات المتاحة عن الظاهرة بوجه خاص. فعلى سبيل المثال إذا أراد الباحث أن يصيغ نموذجا للطلب على سلعة معينة (السيارات) ، فإن النظرية الاقتصادية تعينه على تحديد بعض المتغيرات التي ينطوي عليها النموذج ، حيث توضح هذه النظرية أن الطلب يتحدد بسعر السلعة وأسعار السلع الأخرى البديلة والمكملة ، والدخل، والذوق . ومما سبق يمكن تحديد بعض متغيرات نموذج الطلب على النحو التالي :

المتغير التابع : الكمية المطلوبة (ط١) = D_1

المتغيرات التفسيرية (المستقلة):

سعر السلعة (ث١)	$P_1 =$
سعر سلعة أخرى (ث٢)	$P_2 =$
الدخل (ل)	$Y =$
الذوق (ذ)	$S =$

وبجانب ذلك يمكن معرفة متغيرات تفسيرية أخرى تؤثر في الطلب من خلال المعلومات التي تقدمها الدراسات القياسية السابقة التي أجريت في مجال الطلب بوجه عام (سواء كان الطلب على السلعة محل البحث أو على غيرها من السلع الأخرى) . وفي هذا الصدد نجد أن الدراسات القياسية التي تمت في مجال الطلب على سلع مختلفة أثبتت أن مستوى الدخل المحقق في فترة سابقة (ل ز-١= Y_{t-1}) يؤثر على الطلب في الفترة الحالية، وكذلك الإنفاق الحكومي (ق= G) ، وتوزيع الدخل (ت= E).

بالإضافة إلى ما سبق يمكن تحديد متغيرات تفسيرية أخرى تؤثر في الطلب على السلعة محل البحث (السيارات) من خلال المعلومات الخاصة المتاحة عن هذه السلعة على وجه التحديد، مثال عدد الكيلومترات من الطرق المرصوفة للفرد (ص = K)، ومعدل التعريفة الجمركية على واردات السيارات (م= M) وهكذا .

وبجمع كل هذه المتغيرات المحددة من مصادر مختلفة يمكن كتابة دالة الطلب في الصيغة التالية :

ط١ = د (ث١ ، ث٢ ، ل ، ذ، ل ز-١ ، ق ، ت ، ص ، م) ....(١-٣)

$$D_{1t} = f(P_{1t}, P_{2t}, Y_t, Y_{t-1}, S_t, G_t, E_t, K_t, M_t)$$

ولكن بالرغم من ذلك فانه لا يمكن بوجه عام إدراج جميع المتغيرات التفسيرية التي تؤثر في الظاهرة محل البحث في النموذج الذي يتعين تقدير معلماته ، وذلك لصعوبات كثيرة أهمها على الأقل صعوبات القياس . ولذلك عادة ما يتم الاقتصار فقط على عدد منها وهى المتغيرات الأكثر أهمية .

(٢) تحديد الشكل الرياضي للنموذج

يقصد بالشكل الرياضي للنموذج عدد المعادلات التي يحتوي عليها (فقد تكون معادلة واحدة أو عدد من المعادلات)، ودرجة خطية النموذج (فقد يكون نموذج خطي أو غير خطي) ، ودرجة تجانس كل معادلة (فقد تكون غير متجانسة أو متجانسة من أي درجة) .

والنظرية الاقتصادية كثيرا ما لا توضح الشكل الرياضي الدقيق للنموذج . فعلى سبيل المثال لا توضح نظرية الطلب هل يتم دراسة الطلب على سلعة معينة من خلال نموذج مكون من معادلة واحدة أم نموذج مكون من عدد من المعادلات ، كما لا يوجد فيها ما يشير إلى ما إذا كانت دالة الطلب خطية أم غير خطية .

ولكن بالرغم من ذلك فان النظرية الاقتصادية قد تقدم لنا أحيانا بعض المعلومات التي تفيد - ولو إلى حد ما- في تحديد بعض ملامح الشكل الرياضي للنموذج . فعلى سبيل المثال تقوم نظرية الطلب على أساس افتراض هام وهو أن المستهلك رشيد، وهذا يعني أن المستهلك لا يخضع لما يسمى بظاهرة الخداع النقدي. فإذا تغيرت الدخول النقدية للمستهلكين بنسبة معينة وتغيرت أسعار جميع السلع

والخدمات بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه، فإن المستهلكين الرشيدين يدركون أن الدخل الحقيقي ظل ثابتا ولا ينخدعوا بالتغير في الدخل النقدي ، ومن ثم فلن يغيروا من الطلب على أي سلعة . وهذا يعني رياضيا أن دالة الطلب لابد أن تكون متجانسة من الدرجة الصفرية بالنسبة لكل من الأسعار والدخل.

ولاشك أن الخطأ في تحديد الشكل الرياضي الملائم للنموذج يترتب عليه أخطاء جسيمة فيما يتعلق بقياس و تفسير العلاقة محل البحث. ولعل هذا يرجع إلى أن نتائج القياس تعتمد بدرجة كبيرة على صيغة الشكل الرياضي التي يختارها الباحث لتفسير الظاهرة .

ونظراً لأن النظرية الاقتصادية لا تقدم في كثير من الحالات ما يوضح الشكل الرياضي الملائم للنموذج ، فإن الباحثين يلجئون لبعض الوسائل التي تعينهم على ذلك. ومن الأساليب التي تتبع في هذا الصدد أن يقوم الباحث بجمع بيانات عن المتغيرات المختلفة التي يحتوي عليها النموذج ، ثم يقوم برصد هذه البيانات في شكل انتشار ذو محورين يتضمن المتغير التابع على محور وأحد المتغيرات المستقلة على المحور الأخر . ومن خلال معاينة شكل الانتشار يمكن الحكم مبدئيا على نوع العلاقة بين المتغير التابع وكل متغير مستقل هل هي خطية أم غير خطية . وبناءاً على ذلك يمكن للباحث اختيار الشكل الملائم للنموذج . ولكن تعتبر مقدرة هذا الأسلوب محدودة بمتغيرين ، ولذا فإنه حتى لو كانت العلاقة بين المتغير التابع وكل متغير مستقل على حده خطية ، فإن هذا لا يضمن أن تظل هذه العلاقة خطية عندما تؤخذ كل المتغيرات دفعة واحدة.

ولهذا السبب فإن الباحثين يقومون بتجريب الصيغ الرياضية المختلفة عند القياس في حالة وجود علاقات متعددة ، ثم يختارون الصيغة التي تعطي نتائج أكثر معقولية من الناحيتين الاقتصادية والإحصائية .

ويسترشد الباحثون بعدد من العوامل عند تحديدهم لعدد المعادلات التي يحتوي عليها النموذج من أهمها :

(أ) درجة تعقيد الظاهرة . فكلما كانت الظاهرة معقدة ، وكانت المتغيرات التي تؤثر فيها كثيرة، ويؤثر بعضها في بعض ، كلما كان من الأفضل استخدام نموذج ذو معادلات متعددة حتى يأخذ هذه العلاقات المتشابكة في الحسبان. ولاشك أن استخدام نموذج من معادلة واحدة في مثل هذه الحالة يؤدي إلى خطأ في تقدير المعلمات نظراً لأنه يحتوي على قدر كبير من التبسيط.

(ب) الهدف من تقدير النموذج . يعتبر الهدف من تقدير النموذج أحد العوامل التي تحدد حجم النموذج . فهناك بعض المتغيرات التي يمكن إسقاطها من النموذج نظراً لعدم أهميتها بالنسبة لبعض الأهداف ، في حين يتعين إدراجها في النموذج في حالة بعض الأهداف الأخرى.

(جـ) مدى توافر البيانات . قد يضطر الباحث إلى إسقاط بعض العلاقات من النموذج نظراً لعدم توافر بيانات عنها أو نتيجة لعدم إمكانية قياسها.

ولاشك أن مرحلة التعيين تعتبر من أهم وأصعب مراحل القياس . ولذا فإن الباحث قد يتعرض لكثير من الأخطاء عند تنفيذها مثال ذلك إغفاله لبعض المتغيرات من النموذج لعدم الإلمام بها أو لعدم توافر بيانات عنها ، أو افتراضه الشكل الرياضي غير المناسب لقياس الظاهرة .

(٣) تحديد التوقعات القبلية

يتعين تحديد توقعات نظرية مسبقة عن إشارة وحجم معلمات العلاقة الاقتصادية محل القياس بناءاً على ما تقدمه المصادر السابقة من معلومات . فإذا افترضنا مثلا أن دالة الطلب لسلعة معينة تأخذ الصيغة التالية :

ط ١ = ب . + ب١ ث١ + ب٢ ث٢ + ب٣ ل + ع ....(١-٤)

$$D_1 = b + b_1P_1 + b_2P_2 + b_3Y + u$$

فإنه من الممكن أن نتوقع إشارات المعلمات ب١ ، ب٢، ب٣ وفقا لما هو متاح من معلومات من النظرية الاقتصادية ، حيث يتوقع أن تكون قيمة ب١ (b_1) سالبة وفقا لقانون الطلب الذي يوضح أن العلاقة عكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها . ومن المتوقع أن تكون قيمة ب٢ (b_2) موجبة إذا كانت السلعتين ١، ٢ بدائل ، وسالبة إذا كانتا سلعتين مكملتين . ومن المتوقع أيضا أن تكون قيمة ب٣ (b_3) موجبة إذا كانت السلعة محل الاهتمام عادية .

وتعتبر التوقعات القبلية للإشارة وحجم المعلمات هامة بالنسبة لمرحلة ما بعد التقدير ، حيث يتم اختبار المدلول الاقتصادي للمعلمات المقدرة من خلال مقارنتها مع التوقعات القبلية من حيث إشارتها وحجمها.

(١-٢-٢) تقدير معلمات النموذج

ينتقل الباحث إلى مرحلة قياس أو تقدير المعلمات بعد الانتهاء من صياغة العلاقات محل البحث في شكل رياضي خلال مرحلة التعيين . ويعتمد الباحث أساساً في تقديره للمعلمات على بيانات واقعية يتم جمعها عن المتغيرات التي يتضمنها النموذج ، وعلى فنون قياسية تستخدم في عملية القياس وهي تسمى مُقَدْرات Estimators . وتنطوي هذه المرحلة على ثلاث خطوات على الأقل :

أولا : تجميع البيانات.

ثانيا : حل مشاكل التجميع.

ثالثا : اختيار طريقة القياس الملائمة.

أولا : تجميع البيانات

يتعين على الباحث أن يقوم بجمع بيانات عن المتغيرات التي يحتوي عليها النموذج من مصادر عديدة . وسوف نركز في هذا القسم على نقطتين أساسيتين:

(١) أنواع البيانات .

(٢) بعض أساليب إعداد البيانات.

(١) أنواع البيانات

يوجد هناك خمسة أنواع من البيانات :

أ- بيانات سلسلة زمنية — Time Series Data

ب- بيانات قطاعية — Cross- Section Data

جـ- بيانات سلسلة قطاعية — Cross -Series Data (Panel Data)

د- بيانات تجريبية — Experimental Data

هـ- بيانات أخرى — Others

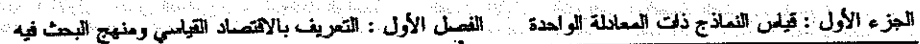
(أ) بيانات سلسلة زمنية

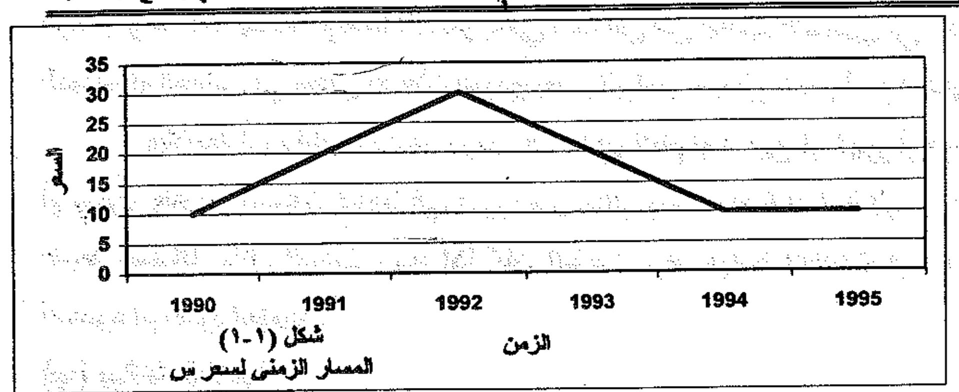
تحتوي السلسلة الزمنية على عدد من القياسات لمتغير ما عند نقاط زمنية مختلفة، وهي تصف بذلك سلوك المتغير الاقتصادي عبر الزمن . ومن الأمثلة على ذلك القياسات الخاصة بسعر القطن خلال الفترة ١٩٩٠– ١٩٩٥ مثلا. والسلسلة الزمنية قد تكون لمتغير جزئي كدخل الفرد أو لمتغير كلي كالدخل القومي . ويمكن عرض بيانات السلسلة الزمنية في صورة جدول أو رسم بياني كما هو موضح بالجدول (١–١) ،والشكل (١–١).

جدول (١–١)

متوسط سعر السلعة س بالجنيه (1990-1995)

السنة (T)	السعر (P)
1990	10
1991	20
1992	30
1993	20
1994	10
1995	10

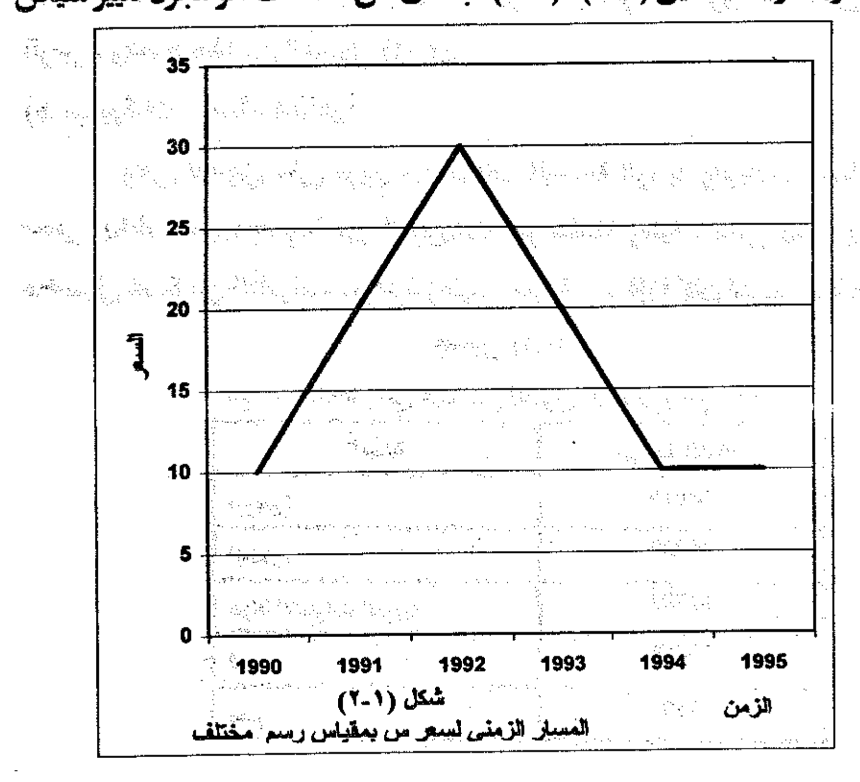




شكل (١-١)
المسار الزمنى لسعر س

ولكن يلاحظ أن الباحث يمكن أن يستخدم الأشكال البيانية بطريقة مضللة لعرض المسار الزمني للمتغيرات الاقتصادية بحيث يبالغ في الحقيقة . فعلى سبيل المثال يمكن عرض الشكل البياني السابق بصورة مبالغ فيها كما بالشكل(١-٢).

وبمقارنة الشكلين (١-١) ، (١-٢) نجد أن كل ما حدث هو مجرد تغيير مقياس



شكل (١-٢)
المسار الزمنى لسعر س بمقياس رسم مختلف

الرسم. وعادة ما يستخدم هذا الأسلوب في التضليل من جانب العاملين في مجال السياسة أو العاملين في مجال الإعلان لترويج بعض البرامج أو بعض السلع أمام الجمهور.

ويلاحظ أن بيانات السلسلة الزمنية قد تكون لأيام أو أسابيع أو شهور أو مواسم أو سنين. وتعرض البيانات عموماً في صورة متوسطات وتعتمد فترة السلسة الزمنية على طبيعة المشكلة محل البحث ، وما إذا كان الباحث يريد دراسة التقلبات في الفترة القصيرة أم الفترة الطويلة .

(ب) بيانات قطاعية

توضح البيانات القطاعية القياسات التي يأخذها متغير ما بالنسبة لمفردات عينة ما عند نقطة زمنية معينة . مثال ذلك بيانات خاصة بدخول عينة من المستهلكين عند نقطة زمنية معينة ، أو الدخل القومي لمجموعة من دول العالم في سنة معينة . وتوضح البيانات القطاعية بذلك مدى تغير قيمة متغير ما من مفردة لأخرى عند نفس النقطة من الزمن . ويتضح هذا من الجدول (١-٢).

(جـ) بيانات سلسلة قطاعية

وهى تحتوي على مزيج من بيانات السلسلة الزمنية والبيانات القطاعية . فهي تعطي بيانات عن مجموعة من المفردات عبر سلسلة زمنية ، مثال ذلك بيانات عن دخول عينة من الأفراد عبر فترة زمنية معينة . فإذا كان لدينا عينة مكونة من

جدول (١-٢)

متوسط الدخل في عينة من الدول بالدولار (عام 1991)

الدولة	متوسط الدخل
سويسرا	33610
اليابان	26930
دولة الإمارات العربية	17703
قطر	13658
مصر	610

خمسة أسر وتوافرت بيانات عن دخولهم لفترة ثلاث سنوات ، فان السلسلة القطاعية تحتوي على ١٥ مشاهدة (٣ × ٥). وبالجدول (١-٣) بيانات سلسلة قطاعية لمعدلات التضخم في مجموعات الدول المختلفة.

وإذا كانت بيانات السلسلة الزمنية تهمل أثر التغير في سلوك المتغير من مفردة لأخرى وتفترض أن الأفراد يتصرفون بنفس الطريقة حيال حدث ما ، في حين تهمل البيانات القطاعية أثر التغير في قيم المتغير من فترة زمنية لأخرى وتفترض أن سلوك الأفراد لا يتغير عبر الزمن ، فإن بيانات السلسلة القطاعية تحتوي على الأثرين . ويستخدم هذا النوع من البيانات عادة لتكبير حجم العينة عندما لا تتوافر بيانات كافية من نوع السلسلة الزمنية أو من نوع البيانات القطاعية كل على حدة .

جدول (١-٣)

معدلات التضخم في مجموعات الدول ٪

مجموعة الدول	1989	1990	1991
الصناعية	4.6	5.2	4.5
النامية	61.9	65.4	37.5
المتحولة	27.0	32.4	100.5

*المتحولة هي دول أوربا الشرقية والاتحاد السوفيتي سابقا

(د) بيانات تجريبية

توجد هناك بعض المحاولات من قبل بعض الباحثين الاقتصاديين لإجراء تجارب يحصلون من خلالها على بيانات اقتصادية . ومن أمثلة هذه المحاولات تلك التي تجرى في محلات السوبر ماركت . وفي مثل هذه الحالات يتم تغيير سعر سلعة ما أو سعر سلعة بديلة)مكملة) كل أسبوع مرة ، مع تثبيت كل العوامل الأخرى التي يمكن التحكم فيها بالمحل ، ثم يتم تسجيل الكميات المطلوبة من قبل العملاء من السلعة المعينة في كل أسبوع عند الأسعار المختلفة . ومن بين التجارب التي أجريت في

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}} \times 100 \qquad (1-5)$$

حيث : الرقم القياسي للأسعار = P ، سعر السلعة (i) في الفترة (t) = P_{it} ، سعر السلعة (i) في سنة الأساس = P_{i0} ، عدد السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي للأسعار = n . ويمكن توضيح كيفية قياس الرقم القياسي للأسعار باستخدام أسلوب المجاميع البسيطة من خلال البيانات المعطاة بالجدول (١-٧) .

جدول (١-٧)

قياس الرقم القياسي للأسعار باستخدام أسلوب المجاميع البسيطة

(1994 =100)

سعر السلعة (P_i)	1994	1995	1996	الوحدة
P_1	20	40	60	طن
P_2	2	4	8	كيلو جرام
P_3	5	10	12	كيلو جرام
P_4	3	6	10	كيلو جرام
ΣP_{it}	30	60	90	
P	100	200	300	%

ولقد تم حساب الرقم القياسي للأسعار في السنوات الثلاث بالجدول كما يلي :

$$P_{94} = \frac{30}{30} \times 100 = 100, P_{95} = \frac{60}{30} \times 100 = 200, P_{96} = \frac{90}{30} \times 100 = 300$$

ويلاحظ على هذا المقياس الموضح بالمعادلة (5-1) ما يلي :

(أ) يتأثر بوحدات القياس . فيلاحظ أن السلعة الأولى سعرها أعلى من أسعار السلع الأخرى لأنه تم حساب وحدة القياس بالنسبة لها بالطن ، في حين تم حساب وحدة القياس للسلع الأخرى بالكيلو جرام . ولما كانت هذه السلعة أعلى السلع سعراً فإنها أثرت على مسار الرقم القياسي للأسعار بدرجة أكبر من غيرها . فإذا قارنا الرقم القياسي لسعر هذه السلعة (300,200,100) بالرقم القياسي العام للأسعار نجده هو نفسه تقريبا .

(ب) نظراً لأن هذا المقياس يتأثر بدرجة كبيرة بالأسعار المرتفعة فإن مساره يتحدد أساساً بأسعار السلع الكمالية التي عادة ما تكون مرتفعة رغم قلة أهميتها من جهة نظر الأغلبية العظمى من الأفراد . هذا في حين أن يتأثر بدرجة أقل بأسعار السلع الضرورية التي عادة ما تكون منخفضة رغم أهميتها من وجهة نظر الأغلبية العظمى من أفراد المجتمع .

وفيما يتعلق بأسلوب المجاميع المرجحة فإنه يعطي وزناً لكل سعر يتحدد على أساس الكمية المستهلكة من السلعة . فكلما كانت الكمية المستهلكة من السلعة كبيرة كلما دل ذلك على كبر أهمية السلعة ، والعكس صحيح . ووفقا لهذا الأسلوب يمكن قياس الرقم القياسي للأسعار باستخدام الصيغة التالية (6-1) .

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i}{\sum_{i=1}^{n} P_0 Q_0} \times 100 \qquad (1-6)$$

حيث تشير (Q_i) إلى الكمية المستهلكة من السلعة (i) . ولكن إذا كان لدينا سلسلة زمنية للكميات من السلع المختلفة ، فكميات أي سنة سوف نستخدم كأوزان ؟ ولقد أجاب عالم الإحصاء لاسبير Laspeyr باستخدام كميات سنة الأساس في حساب الرقم القياسي للأسعار ، كما بالصيغة (7-1) ، ويسمى هذا برقم لاسبير (P_L) .

$$P_L = \frac{\sum P_{it} Q_{i0}}{\sum P_{i0} Q_{i0}} \times 100 \qquad (1-7)$$

حيث (Q_{i0}) كمية السلعة (i) في سنة الأساس (0) . وإذا افترضنا أن البيانات بالجدول (١-٨) توضح كميات وأسعار أربعة من السلع فمن الممكن حساب الرقم القياسي للاسبير كما هو موضح بالجدول (١-٩) .

جدول (١-٨)

أسعار وكميات عينة من السلع

السلعة	1994		1995		1996	
	سعر	كمية	سعر	كمية	سعر	كمية
X_1	20	10	40	15	60	10
X_2	2	100	4	120	8	150
X_3	5	200	10	250	12	300
X_4	3	150	6	200	10	250

جدول (١-٩)

حساب الرقم القياسي للأسعار وفقا للاسبير (1994=100)

السلعة	Q_0 1994	P_0Q_0 1994	P_1Q_0 1995	P_2Q_0 1996
X_1	10	200	400	600
X_2	100	200	400	800
X_3	200	1000	2000	2400
X_4	150	450	900	1500
$\sum P_iQ_0$	-	1850	3700	5300
P_L	_	100	200	286

ولقد تم حساب P_L كما هو موضح فيما يلي :

$$P_{94} = \frac{1850}{1850} \times 100 = 100, P_{95} = \frac{3700}{1850} \times 100 = 200, P_{96} = \frac{5300}{1850} \times 100 = 286$$

وينتقد الرقم القياسي للاسبير بأنه يستخدم كميات سنة الأساس كأوزان للأسعار في جميع السنوات بما يوحي بثبات أهمية السلع والخدمات عبر الزمن دون تغير. ولاشك أن هذا غير صحيح حيث تتغير أهمية السلع عبر الزمن بين زيادة ونقصـــان وفقا لتغـير الكميات المستهلكة منها .

ولتفادي هذه المشكلة اقترح باشيه Paaeche استخدام أوزان متغيرة تبعا لتغير الكميات في السنوات المتتالية. ويتمثل رقم باشيه (P_A) فيما يلي:

$$P_A = \frac{\sum P_{it} Q_{it}}{\sum P_{i0} Q_{it}} \times 100 \qquad (1-8)$$

حيث Q_{it}=كمية السلعة (i) في الفترة (ف) .

وباستخدام أرقام جدول (١–٨) يمكن حساب الرقم القياسي لباشيه كما هو موضح بجدول (١–١٠) :

جدول (١-١٠)

الرقم القياسي لأسعار باشيه (1994=100)

1996				1995				1994			
P_0Q_2	P_2Q_2	Q_2	P_2	P_0Q_1	P_1Q_1	Q_1	P_1	P_0Q_0	Q_0	P_0	سلعة
200	600	10	60	300	600	15	40	200	10	20	X1
300	1200	150	8	240	480	120	4	200	100	2	X2
1500	3600	300	12	1250	2500	250	10	1000	200	5	X3
750	2500	250	10	600	1200	200	6	450	150	3	X4
2750	7900			2390	4780			1850			مجـ
287				200				100			P_A

ولقد تم حساب P_A بالجدول السابق كما يلي:

$$P_{94}=\frac{1850}{1850}\times100=100, P_{95}=\frac{4780}{2390}\times100=200, P_{96}=\frac{7900}{2750}\times100=287$$

ولكن يلاحظ في هذه الحالة أن التغير في الرقم القياسي لباشيه من عام لآخر لا يعكس فقط التغير في الأسعار ، وإنما يعكس أيضا التغير في الكميات . أي أنه لا يعبر عن معدل التضخم بدقة .

ولقد استخدم مارشال و إدجورث رقما قياسيا آخر يعتبر وسطاً بين رقمي لاسبير و باشيه ، حيث يستخدم متوسط الكميات كوزن للسعر . ويسمى برقم مارشال- إدجورث، و هو يأخذ الصيغة التالية :

$$P_M = \frac{\sum P_{it}(Q_{i0} + Q_{it})}{\sum P_{i0}(Q_{i0} + Q_{it})} \times 100 \qquad (1-9)$$

ويمكن حساب هذا الرقم باستخدام بيانات جدول (١-٨) كما هو موضح بالجدول (١-١١):

جدول (١-١١)

الرقم القياسي لمارشال و إدجورث (١٩٩٤=١٠٠)

1996				1995				1994			
$P_0(Q_2+Q_0)$	$P_2(Q_2+Q_0)$	Q_2+Q_0	P_2	$P_0(Q_1+Q_0)$	$P_1(Q_1+Q_0)$	Q_1+Q_0	P_1	$P_0(Q_0+Q_0)$	Q_0+Q_0	P_0	سلعة
400	1200	20	60	500	1000	25	40	400	20	20	X1
500	2000	250	8	440	880	220	4	400	200	2	X2
2500	6000	500	12	2250	4500	450	10	2000	400	5	X3
1200	4000	400	10	1050	2100	350	6	900	300	3	X4
4600	13200			4240	8480			3700			مجموع
287				200				100			P_M

ولقد تم حساب (P_M) كما يلي :

$$P_{94} = \frac{3700}{3700} \times 100 = 100, P_{95} = \frac{8480}{4240} \times 100 = 200, P_{96} = \frac{13200}{4600} \times 100 = 287$$

ولكن يلاحظ أن هذا الرقم مازال يتأثر بالتغير في الكميات .

الطريقة الثانية : طريقة متوسط النسب

ووفقا لهذه الطريقة نحصل على الرقم القياسي لسعر كل سلعة حدة ، ثم نحصل على متوسط للأرقام القياسية الخاصة بمختلف الأسعار فيتكون لدينا مقياس يسمى بمتوسط النسب (P_r) ، وذلك كما يتضح بالصيغة (1-10) .

$$P_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{P_{it}}{P_{i0}})\times 100 \qquad (1-10)$$

حيث : (n) = عدد السلع . ويمكن حساب هذا الرقم باستخدام بيانات الجدول (١–٨) كما هو موضح بالجدول (١–١٢) .

جدول (١–١٢)

الرقم القياسي للأسعار – طريقة متوسط النسب (1994=100)

$(P_{96}/P_{94})\%$	$(P_{95}/P_{94})\%$	$(P_{94}/P_{94})\%$	السلعة
300	200	100	X_1
400	200	100	X_2
240	200	100	X_3
333	200	100	X_4
1273	800	400	$\Sigma (P_{it}/P_{i0})$
1273/4=318	800/4=200	400/4=100	P_r

ومن مزايا هذا الرقم أنه يأخذ في الحسبان تأثير الأرقام القياسية لكل السلع ، حيث من المعروف أن المتوسط يأخذ في الاعتبار كل المعلومات المتاحة . غير أن هذا

الأسلوب يعطي كل الأرقام القياسية للأسعار نفس الوزن عند حسابه للمتوسط العام بغض النظر عن أهمية كل سلعة .

وكوسيلة تصحيحية يمكن استخدام صيغة أخرى لمتوسط النسب المرجحة . وفي هذه الحالة يرجح كل رقم قياسي لسعر سلعة ما بقيمة السلعة في سنة الأساس $(P_i.Q_i)$ ثم يتم قسمة مجموع النسب المرجحة على مجموع أوزان الترجيح $(\Sigma p_i.Q_i)$. ويأخذ هذا الرقم الصيغة (1-11) .

$$P_w = \frac{\sum(\frac{P_{it}}{P_{i0}})(P_{i0}Q_{i0})}{\sum P_{i0}Q_{i0}} \times 100 \quad \ldots\ldots (1-11)$$

(ب) القيم الحقيقية Real Values

يوجد هناك فرق بين القيمة النقدية والقيمة الحقيقية للمتغير . فالقيمة النقدية لمتغير ما تشير إلى قيمة هذا المتغير معبراً عنها بوحدات نقدية وفقا للأسعار الجارية . أما الحقيقية للمتغير فإنها تشير إلى قيمة المتغير معبراً عنها بوحدات نقدية وفقا للأسعار الثابتة (أسعار سنة الأساس) . أي أن القيمة الحقيقية تعزل أثر التغير في الأسعار الجارية . فإذا ما أخذنا مثلا الناتج القومي نجد أن قيمته النقدية تتغير لأحد سببين أو كليهما : السبب الأول هو تغير الأسعار الجارية وهو تغير اسمي ، والسبب الثاني هو تغير الكميات المنتجة من السلع والخدمات وهو تغير حقيقي .

ومن المفيد دائما أن نعبر عن المتغيرات الاقتصادية باستخدام قيمها الحقيقية بدلا من القيم النقدية . ومن الممكن استخدام الرقم القياسي لأسعار التجزئة في تحويل القيم النقدية إلى قيم حقيقية باستخدام الصيغة العامة التالية :

القيمة الحقيقية للمتغير = (القيمة النقدية للمتغير / الرقم القياسي لأسعار التجزئة) × ١٠٠ ....(١-١٢)

فإذا افترضنا أن القيم النقدية للناتج القومي والرقم القياسي لأسعار التجزئة كانت كما هي موضحة بالجدول (١-١٣) فمن الممكن حساب القيم الحقيقية للناتج القومي كما هي موضحة بنفس الجدول .

ويلاحظ من الجدول (١-١٣) أنه بالرغم من أن القيمة النقدية للناتج القومي قد زادت بنسبة ٢٥٠ ٪ خلال الفترة ١٩٩١ - ١٩٩٦ إلا أن القيمة الحقيقية للناتج القومي تناقصت بنسبة ٦٥ ٪ خلال نفس الفترة . ولعل هذا يرجع إلى زيادة الرقم القياسي للأسعار بنسبة ٩٠٠ ٪ وهي نسبة أكبر من نسبة الزيادة في القيمة النقدية للناتج القومي .

جدول (١-١٣)

القيم الحقيقية للناتج القومي (100= 1991)

السنة	القيمة النقدية للناتج القومي (١)	الرقم القياسي لأسعار التجزئة (٢) ٪	القيمة الحقيقية للناتج القومي (٣)= (١)/(٢)٪
1991	1000	100	1000
1992	1500	200	750
1993	2000	400	500
1994	2500	500	500
1995	3000	750	400
1996	3500	1000	350

ومن أهم التطبيقات في هذا الصدد حساب الأسعار النسبية أو الحقيقية . فحتى يمكن تحديد ما إذا كانت سلعة ما قد أصبحت أغلى نسبيا أم أرخص نسبيا مع مرور الزمن يتعين قياس سعرها النسبي أو الحقيقي ، حيث :

$$\text{السعر الحقيقي للسلعة س} = \frac{\text{الرقم القياسي لسعر السلعة س}}{\text{الرقم القياسي لأسعار التجزئة}} \times 100 \quad ....(1-13)$$

ولاشك أن تزايد السعر الحقيقي للسلعة يشير إلى أنها قد أصبحت أغلى نسبيا عن ذي قبل ، وتناقص سعرها الحقيقي يشير إلى أنها قد أصبحت أرخص نسبيا عن ذي قبل. كما أن ثبات سعرها الحقيقي يعني أن سعرها لم يتغير نسبيا مع مرور الزمن . وبمقارنة السعر الحقيقي لسلعة ما بالسعر الحقيقي لسلعة أخرى يمكن التعرف على أيهما قد أصبح أغلى نسبيا مع مرور الزمن . فإذا كان :

$$\frac{\text{السعر الحقيقي للسلعة س}}{\text{السعر الحقيقي للسلعة ص}} > 1$$

فإن هذا يعني أن السلعة س أصبحت أغلى نسبيا من السلعة ص مع مرور الزمن .

ومن ثم فإنه باستعراض التطور التاريخي للأسعار الحقيقية للسيارات والتلفزيونات يمكن التعرف على ما إذا كان التقدم التكنولوجي قد ساعد على تخفيض التكلفة الحقيقية لهذه السلع أم لا ، وأيهما أصبح أكثر ندرة نسبيا مع مرور الزمن .

ومن التطبيقات الأخرى في هذا الصدد حساب القيمة الحقيقية للنقود ، وهي تشير إلى كمية السلع والخدمات التي يمكن شرائها بوحدة من النقد . ويمكن قياسها باستخدام الصيغة (1-14) :

$$\text{القيمة الحقيقية للنقود} = \frac{\text{الرقم القياسي لأسعار التجزئة في سنة الأساس}}{\text{الرقم القياسي لأسعار التجزئة في سنة المقارنة}} \times 100 \quad (1-14)$$

$$= \frac{100}{\text{الرقم القياس لأسعار التجزئة في سنة المقارنة}} \times 100$$

ويمكن توضيح كيفية قياس القيمة الحقيقية للنقود من المثال المعطى بالجدول (١-١٤) . ومن الواضح من هذا الجدول أن القيمة الحقيقية للنقود انخفضت بنسبة ٩٠٪ خلال الفترة ١٩٩١-١٩٩٦ . أي أن الجنيه في عام ١٩٩٦ يشتري كمية من السلع والخدمات تساوي ١٠٪ من الكمية التي كان يشتريها عام ١٩٩١ .

جدول (١-١٤)

القيمة الحقيقية للنقود

السنة	الرقم القياسي لأسعار التجزئة ٪	الرقم القياسي للقيمة الحقيقية للنقود ٪
1991	100	100
1992	200	50
1993	400	25
1994	500	20
1995	750	13
1996	1000	10

ثانيا : حل مشاكل التجميع :

تنشأ مشكلة التجميع عندما يحتاج الباحث لاستخدام متغيرات تجميعية في الدالة محل القياس مثل الناتج القومي والاستهلاك القومي . وعملية التجميع قد تتم على أكثر من مستوى ، فهناك التجميع على مستوى الأفراد ، مثال ذلك الدخل القومي الذي هو عبارة عن مجموع دخول الأفراد ، أو الناتج القومي والذي هو عبارة عن مجموع نواتج المنشآت . ومن المشاكل التي تواجه الباحث في مثل هذه الحالة اختلاف محتوى الدخل من فرد لآخر . فهناك الدخل العيني وهناك الدخل النقدي . وعند التجميع عادة ما يركز الباحث على الدخل النقدي ويهمل الدخل العيني . ولا شك أن هذا يظهر الدخل الحقيقي في مستوى أقل من المستوى الفعلي .

وهناك أيضا التجميع على مستوى السلع . فإذا أردنا تقدير دالة الطلب على السلع الغذائية مثلا في مجتمع ما ، فإننا نحتاج لتجميع كميات السلع المختلفة وتجميع أسعارها . وهنا تواجهنا مشكلة عدم التجانس عند تجميع كميات السلع ومشكلة اختلاف الأوزان بالنسبة لأسعار السلع الغذائية المختلفة عند تجميعها في سعر واحد متوسط .

كما أن التجميع قد يتم على مستوى الفترات الزمنية . ففي بعض الحالات تنشر المصادر الإحصائية بيانات عن فترات أقصر من الفترات المطلوبة من قبل النظرية ، فقد تكون هذه البيانات ربع سنوية في حين أنها مطلوب أن تكون سنوية ، وفي هذه الحالة لابد من تجميعها . وفي أحيان أخرى قد تكون بيانات الإنتاج منشورة على أساس سنوي، في حين أن الدورة الإنتاجية تتم في أقل من سنة ، وفي هذه الحالة يتعين تجميع البيانات على أساس الدورة الإنتاجية لتقدير دالة الإنتاج مثلا . وقد يتم التجميع على أساس جغرافي ، مثال ذلك تجميع بيانات الناتج أو السكان لمدن أو دول مختلفة . وهنا تظهر مشكلة اختلاف مفهوم الناتج ونوعيته من مكان إلى آخر ، واختلاف هيكل السكان من مكان لآخر ، أو توزيع الدخل من مكان لآخر . وفي مثل هذه الحالة نجد أن تجميع قيم هذه المتغيرات على أساس جغرافي في رقم واحد لا يعكس نوعية أو هيكل هذه المتغيرات بدقة . وبالطبع يتعين على الباحث أن يتأكد من حل مشاكل التجميع قبل أن يبدأ في عملية تقدير المعلمات .

ثالثا : اختيار طريقة القياس الملائمة :

يوجد هناك طرق قياسية عديدة يمكن استخدامها في قياس العلاقات الاقتصادية أهمها :

(١) طرق المعادلة الواحدة : وهي تطبق على كل معادلة من معادلات النموذج على حدة ، ومن أمثلتها طريقة المربعات الصغرى العادية ، وطريقة الصيغ المختصرة وغيرها .

(٢) طرق المعادلات الآنية : ومن أمثلتها طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل وغيرها .

وتختلف هذه الطرق في ملاءمتها لعملية القياس من حالة لأخرى تبعا لعدة عوامل منها طبيعة العلاقة محل البحث : هل هي معقدة أم بسيطة ، وخصائص المقدرات التي تعطيها كل طريقة : هل هي غير متحيزة ومتسقة وكافية أم غير ذلك ، والهدف من البحث القياسي : هل هو اختبار نظرية ما ، أم وضع سياسة ، أم التنبؤ ، أم تفسير ظاهرة . كما تختلف هذه الطرق من حيث كمية البيانات التي تتطلبها وتكاليف البحث . ويتعين على الباحث الاسترشاد بهذه العوامل عند اختياره لطريقة القياس الملائمة .

(١-٢-٣) تقييم المعلمات المقدرة بالنموذج :

بعد أن ينتهي الباحث من تقدير القيم الرقمية لمعلمات النموذج من خلال بيانات واقعية ، فإنه يشرع في تقييم المعلمات المقدرة . والمقصود بتقييم المعلمات المقدرة Estimates هو تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية ، وما إذا كان لها دلالة من الناحية الإحصائية . ويوجد هناك عدد من المعايير التي تمكننا من إتمام عملية التقييم أهمها :

(١) المعايير الاقتصادية Economic Criteria .

(٢) المعايير الإحصائية Statistical Criteria .

(٣) المعايير القياسية Econometric Criteria .

(١) المعايير الاقتصادية :

تتحدد المعايير الاقتصادية التي تستخدم في تقييم المعلمات من خلال مبادئ النظرية الاقتصادية . وتتعلق هذه المعايير بحجم وإشارة المعلمات المقدرة . فالنظرية الاقتصادية قد تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات وهي تعتمد في ذلك على منطق معين . فإذا ما جاءت المعلمات المقدرة على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فإن

هذا يمكن أن يكون مبرراً لرفض هذه المعلمات المقدرة ما لم يوجد هناك من المبررات المنطقية ما يؤدي للتسليم بصحة التقديرات ورفض ما تقرره النظرية . وفي مثل هذه الحالة يجب عرض هذه المبررات بوضوح . وبالرغم من ذلك فإنه في بعض الحالات يأتي اختلاف المعلمات المقدرة عما تقرره النظرية مسبقاً نتيجة لقصور في البيانات المستخدمة في تقدير النموذج ، أو نتيجة لكون بعض فروض الطريقة القياسية المستخدمة غير صحيحة . ويمكن أن نتعرض لمثال اقتصادي يوضح هذه النقطة . فالنظرية الكينزية مثلا تقرر أن الاستهلاك يتحدد في الأجل القصير بالدخل ، حيث كلما زاد الدخل كلما زاد الاستهلاك . كما تفترض هذه النظرية أن الدخل يتوزع بين الاستهلاك والادخار ، ومن ثم فإن الزيادة في الدخل تتوزع بين زيادة الاستهلاك وزيادة الادخار . وتفترض النظرية أيضا أن استهلاك المجتمع في الأجل القصير لا يمكن أن يكون سالبا أو منعدما حتى إذا انخفض الدخل للصفر . ويمكن ترجمة ما تقرره النظرية لفظيا إلى صيغة رياضية كما يلي :

س = أ + ب ل	$C = A + b\,Y$ ....(١-١٥)

حيث : س (C)= الاستهلاك ، ل (Y) = الدخل . ووفقا لهذه النظرية من المتوقع أن تكون :

أ> ٠ $(A>0)$، وهذا يعني أن المجتمع لابد أن يستهلك حتى إذا انخفض دخله الكلي إلى الصفر في الأجل القصير . ويتم هذا بالاعتماد على الاقتراض الخارجي أو السحب من المدخرات السابقة .

صفر < ب < ١ $(0<b<1)$ أي أن الميل الحدي للاستهلاك يجب أن يكون موجبا وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد .

وهكذا فإن نظرية الاستهلاك الكينزية قد وضعت معاييراً اقتصادية خاصة بإشارة وحجم المعلمتين أ ، ب (A,b) ، ويتعين على أي محاولة لقياس دالة الاستهلاك في الأجل القصير أن تعطي نتائج تتفق مع هذه المعايير حتى يمكن قبولها اقتصاديا .

(٢) المعايير الإحصائية (اختبارات الرتبة الأولى) : First Order Tests :

تهدف المعايير الإحصائية إلى اختبار مدى الثقة الإحصائية في التقديرات الخاصة بمعلمات النموذج . ومن أهمها معامل التحديد واختبارات المعنوية . وسوف نتعرض لها بنوع من التفصيل فيما بعد .

(٣) المعايير القياسية (اختبارات الرتبة الثانية) : Second Order Tests

تهدف هذه المعايير إلى التأكد من أن الافتراضات التي تقوم عليها المعايير الإحصائية منطبقة في الواقع . فإذا كانت هذه الافتراضات متوافرة في الواقع فإن هذا يكسب المعلمات المقدرة صفات معينة أهمها عدم التحيز والاتساق . أما إذا لم تتحقق هذه الافتراضات فإن هذا يؤدي إلى فقدان المعلمات المقدرة بعض الصفات السابقة ، بل ويؤدي أصلاً على عدم صلاحية المعايير الإحصائية نفسها لقياس مدى الثقة في المعلمات المقدرة . وهذا يعني أن المعايير القياسية تستخدم في اختبار المعايير الإحصائية نفسها ، ولذا فهي تسمى اختبارات الرتبة الثانية . ومن بين هذه المعايير : معايير الارتباط الذاتي، ومعايير الامتداد الخطي المتعدد ، ومعايير التعرف ، ومعايير ثبات التباين ، وعيرها .

(١-٢-٤) تقييم مقدرة النموذج على التنبؤ :

لقد أوضحنا من قبل أن من أهم أهداف الاقتصاد القياسي التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل ، ولذا يتعين اختبار مدى مقدرة النموذج القياسي على التنبؤ قبل استخدامه في هذا الغرض . فمن الممكن أن يجتاز النموذج جميع الاختبارات السابقة ، ولكن لا يكون صالحا للتنبؤ . فالتنبؤ قائم على أساس افتراض أن المستقبل القريب امتداد للماضي القريب . ولكن إذا حدثت تغيرات هيكلية سريعة في الظروف الاقتصادية للمجتمع ، فإن النموذج القياسي ربما لا يكون قادرا على التنبؤ بهذه التغيرات . ولاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لابد من اختبار مدى استقرار

المعلمات المقدرة عبر الزمن ، واختبار مدى حساسية هذه التقديرات للتغير في حجم العينة .

(١-٢-٥) النموذج وأنواعه

يمكن تعريف النموذج بوجه عام بأنه "_تمثيل مبسط لظاهرة واقعية " . والتبسيط هنا يعني تلخيص الحقائق التي ينطوي عليها الواقع في صورة مركزة . ولاشك أن مثل هذا التلخيص يؤدي لفقدان جزء من المعلومات التفصيلية ذات الأهمية الأقل ، والتركيز على المعلومات والعلاقات ذات الأهمية الأكبر . ويشبه النموذج في هذه الحالة الخريطة ، حيث أن خريطة من صفحة واحدة تمكننا من رؤية العالم في صورته العامة ، والإصرار على أن تحتوي الخريطة على كل التفاصيل يعني أننا في حاجة لرسم خريطة بمساحة العالم . وهذا بالإضافة إلى كونه شيئاً مستحيلاً ، فهو في حالة حدوثه يعني أننا لن يمكننا فهم أي شئ منه . ولكن يتعين مراعاة أن التبسيط إذا كان زائداً في بعض الحالات فإنه يعطي صورة مخلة للواقع ، ولذا فإن هناك حداً أقصى لا يتعين تجاوزه ، حتى يصبح التبسيط مقبولاً .

ويوجد هناك تقسيمات كثيرة للنماذج تعتمد على معايير مختلفة . فمن حيث طريقة صياغة النموذج يمكن التفرقة بين عدة أنواع منها : النماذج اللفظية / المنطقية ، والنماذج الهندسية ، والنماذج الرياضية ، والنماذج القياسية . ونتعرض لكل واحدة من هذه النماذج باختصار فيما يلي :

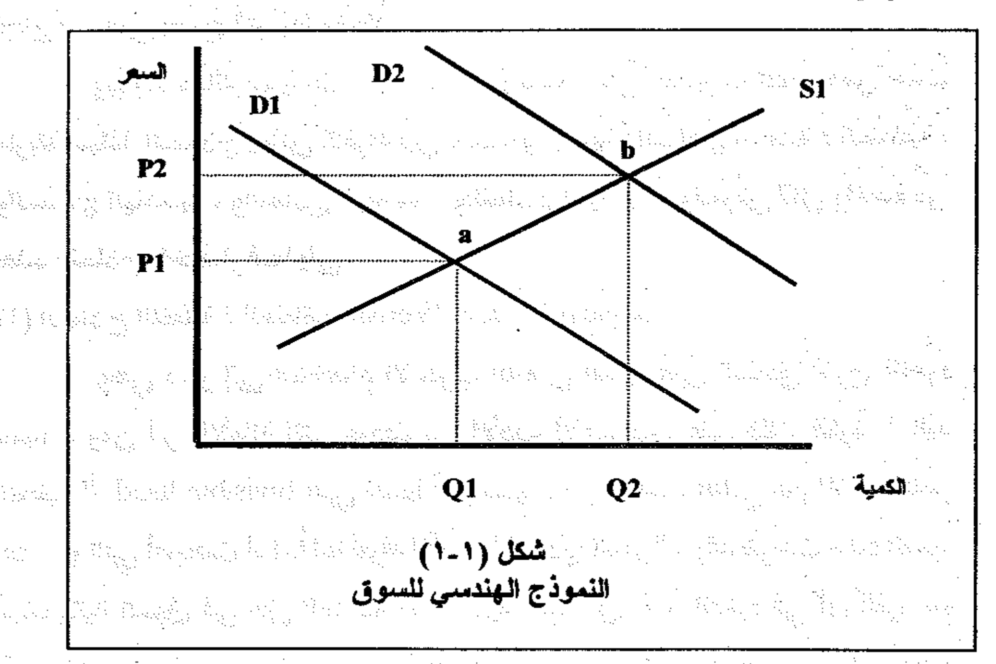
(١) النماذج اللفظية / المنطقية Logical Models /Verbal :

وهي تشير إلى استخدام الأسلوب اللفظي القائم على المنطق لشرح ظاهرة معينة . ومن أبرز الأمثلة التي وردت في الأدب الاقتصادي على ذلك فكرة " اليد الخفية " Invisible hand التي قدمها آدم سميث في النصف الثاني من القرن الثامن عشر ، و التي أصبحت أساساً لما نعرفه الآن بـ" نموذج السعر " . وقد شرحت هذه الفكرة ميكانيكية السوق في حل المشكلة الاقتصادية . وتتمثل هذه الفكرة في أن الفرد هو أقدر الأطراف على تحقيق مصلحته الخاصة ، ولذا يتعين أن تترك له الحرية في اتخاذ

قراراته الاقتصادية . وعندما يسعى الفرد بحرية لتحقيق مصلحته الخاصة فإنه يحقق مصلحة المجتمع ، وكأنما يداً خفية تدفعه لذلك . فإذا زادت دخول المستهلكين مثلا فإن كل فرد منهم يزيد الطلب على السلع والخدمات التي يفضلها سعياً وراء تحقيق مزيد من المنفعة لنفسه . ومع زيادة الطلب ترتفع أسعار السلع التي زاد عليها الطلب وهو ما يحفز منتجي السلع على زيادة الإنتاج منها سعياً وراء مصلحتهم الخاصة لتحقيق مزيداً من الأرباح . وفي النهاية سوف تتوقف الأسعار عن الارتفاع عندما يتساوى الطلب الجديد مع العرض الجديد لكل سلعة . وبهذه الطريقة تزداد رفاهية المجتمع ككل من مستهلكين ومنتجين .

(٢) النماذج الهندسية Geometric Models :

وهي تلك النماذج التي يتم التعبير عنها في صورة أشكال هندسية . ومن أبرز الأمثلة عليها ما هو معروف " بنموذج السوق " أو " نموذج السعر " والذي هو صياغة هندسية لنموذج اليد الخفية الذي أشرنا إليه سابقاً . ويوضح الشكل (١-١) هذا النموذج .



شكل (١-١)
النموذج الهندسي للسوق

فزيادة الطلب من D_1 إلى D_2 يترتب عليه زيادة سعر التوازن من P_1 إلى P_2 وزيادة الكمية المنتجة والمستهلكة من Q_1 إلى Q_2 عند نقطة توازن جديدة b بدلا من a .

غير أن النماذج الهندسية عادة ما تكون مقصورة على عدد محدود من المتغيرات يعتمد على عدد المحاور .

(٣) النماذج الجبرية Algebraic Models :

يتمثل النموذج الجبري في عدد من المعادلات الرياضية أو ربما معادلة واحدة تضم عدد من المتغيرات يوجد بينها علاقات، وتمثل ظاهرة معينة . وتتمتع النماذج الجبرية بالمرونة الكبيرة نظرا لمقدرتها على احتواء أي عدد من المتغيرات .

ومن الأمثلة على ذلك نموذج السوق الخطي :

دالة الطلب .... $Q_d = a_0 + a_1 P$

دالة العرض .... $Q_s = b_0 + b_1 P$

شرط التوازن .... $Q_s = Q_d$

وتتصف المعادلات الجبرية بكون العلاقات فيه محددة أو مؤكدة Deterministic وليست احتمالية .

(٤) النماذج القياسية Econometric Models :

النموذج القياسي هو نموذج جبري احتمالي Stochastic لاحتوائه على متغيرات عشوائية Random variables تجعل العلاقات بين المتغيرات احتمالية وليست مؤكدة . ومن ا لأمثلة على ذلك نموذج السوق الاحتمالي :

دالة الطلب .... $Q_d = a_0 + a_1P + a_2Y + u_1$

دالة العرض .... $Q_s = b_0 + b_1 P + b_2 R + u_2$

شرط التوازن .... $Q_s = Q_d$

ويحتوي النموذج على متغيرات تابعة (Q_s،Q_d) ، ومتغيرات مستقلة (Y , P,R) ، ومتغيرات عشوائية (u_1,u_2) .

وتنقسم النماذج من حيث علاقتها بالزمن إلى نماذج ساكنة Static Models، و نماذج حركية Dynamic Models . والنموذج الساكن هو الذي لا يعتمد على الزمن ولا يظهر الزمن فيه كمتغير مستقل ، أما النموذج الحركي فهو النموذج الذي يلعب الزمن دوراً في التأثير على بعض متغيراته . ومن الأمثلة على ذلك :

نموذج الاستهلاك الساكن .... $Y = a_0 + a_1 X$

نموذج الاستهلاك الحركي .... $Y_t = b_0 + b_1 X_t + b_2 X_{t-1} + u_2$

ومن الواضح أن الزمن لا يؤثر في النموذج الأول ، حيث أن الدخل (X) عند نقطة معينة يؤثر في الاستهلاك (Y) عند نفس النقطة . ويمكن كتابة النموذج الساكن في ثلاثة صيغ مختلفة دون أن يعني في أي منها أنه حركي :

نموذج استهلاك ساكن في حالة استخدام بيانات سلسلة زمنية $Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t$

نموذج استهلاك ساكن في حالة استخدام بيانات قطاعية (أفراد) $Y_i = a_0 + a_1 X_i + u_i$

نموذج استهلاك ساكن في حالة استخدام بيانات سلسلة قطاعية $Y_{it} = a_0 + a_1 X_{it} + u_{it}$

أما النموذج الحركي فيوضح أن دخل الفترة السابقة (X_{t-1}) يؤثر أيضا في استهلاك الفترة الحالية (Y_t) بجانب دخل الفترة الحالية (X_t) .

ويعتبر معامل التغاير أفضل من مقياس مجموع حاصل ضرب الانحرافات من حيث أنه لا يتأثر بالتغير في عدد المشاهدات بنفس الدرجة ، ذلك لأن عدد المشاهدات "ن" يؤثر في كل من البسط والمقام . ولكن مازال معامل التغاير يعاني من وجهي القصور ب ، جـ بالمقياس السابق .

(٢-١-٤) معامل الارتباط Correlation Coefficient

حتى يمكن تلاشي وجهي القصور ب ، جـ السابقين في معامل التغاير ، يتعين تحويل مقياس الارتباط من مقياس مطلق إلى نسبة . فالنسبة لا تتأثر بوحدات القياس كما أنها توضح مدى قوة الارتباط . ولعمل ذلك فإننا نقسم انحراف كل قيمة س (X) على الانحراف المعياري للمتغير س والذي نرمز له ع س (S_x) حيث يعتبر بمثابة مقياس لمتوسط انحرافات س . كما نقسم انحراف كل قيمة ص على الانحراف المعياري للمتغير ص والذي نرمز له ع ص (S_y) . وبإجراء هذه التعديلات على معامل التغاير نحصل على معامل الارتباط للعينة والذي يعتبر مقياسا للارتباط .

معامل الارتباط = ر = (∑ س ر ص ر) / (ن ع س ع ص) = (غ س ص) / (ع س ع ص)

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{nS_y S_x} = \frac{Cov.yx}{S_x S_y}$$

حيث :

$$ع_س = \sqrt{\frac{\sum س_ر^2}{ن}} \quad ، \quad ع_ص = \sqrt{\frac{\sum ص_ر^2}{ن}}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}}, S_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{n}}$$

وبإحلال قيم (ع س) ، (ع ص) في معادلة معامل الارتباط السابقة نحصل على :

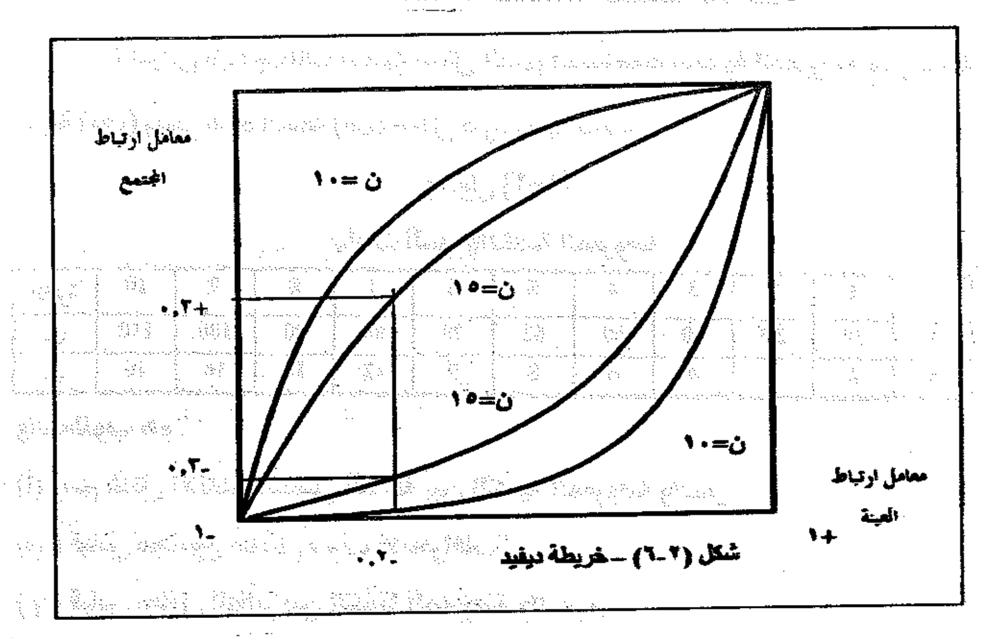
$$ر = \frac{\sum س_ر ص_ر}{ن \sqrt{\frac{\sum س_ر^2 \sum ص_ر^2}{ن^2}}} = \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sqrt{\sum س_ر^2 \sum ص_ر^2}} \qquad (٢-٢)$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$$

ويلاحظ أن معامل ارتباط العينة (ر) لا يتأثر بوحدات القياس ، ويوضح مدى قوة الارتباط بين المتغيرين محل البحث . فالقيمة الرقمية لمعامل الارتباط تتراوح بين -١ ، +١ . فإذا كان ر= +١ فان الارتباط يكون تاماً طردياً ، وإذا كان ر = -١ فان الارتباط يكون تاماً عكسياً، وإذا كان ر= صفر فان الارتباط يكون منعدماً . وعندما يكون ر > |٠,٥| فان الارتباط يكون قوياً ، وعندما يكون ر < |٠,٥| فان الارتباط يكون ضعيفاً . وعندما يكون ر مساويا ± ١ فان شكل الانتشار ينطبق تماماً على الخط المستقيم .

وهناك فرق بين معامل ارتباط المجتمع (ر) ومعامل ارتباط العينة (ر) . فالأول يشير إلى الارتباط بين جميع القيم المتعلقة بالمتغيرين س ، ص ، أما الثاني فيشير إلى الارتباط بين عدد من هذه القيم والذي يمثل العينة . ويوجد هناك خرائط تسمى

خرائط ديفيدDavid Charts تمكننا من تحديد فترة ثقة لمعامل ارتباط المجتمع بدلالة معامل ارتباط العينة ، وذلك كما يتضح بالشكل (٢-٦) . خرائط ديفيد David Charts تمكننا من تحديد فترة ثقة لمعامل ارتباط المجتمع بدلالة معامل ارتباط العينة ، وذلك كما يتضح بالشكل (٢-٦) .



شكل (٢-٦) -خريطة ديفيد

فعلى المحور الأفقي ترصد قيم من -١ إلى +١ ، وعلى المحور الرأسي ترصد قيم من -١ إلى +١ . وفي المساحة بين المحورين توجد منحنيات محسوبة على أساس حجم العينة بعضها للارتباط الموجب وبعضها للارتباط السالب . وفي خريطة ديفيد يقام عمود رأسي من قيمة "ر " المحسوبة من عينة على المحور الأفقي حتى تتلاقى مع منحنى للارتباط الموجب وآخر للارتباط السالب حسب حجم العينة ، ثم نمد خطاً من نقاط التلاقي إلى المحور الرأسي لنحدد قيم "ر " المقابلة . وتمثل هذه القيم فترة الثقة لمعامل ارتباط المجتمع والتي تقابل قيم " ر " المحسوبة من عينة.

تطبيقات اقتصادية

مثال (٢-١)- الارتباط بين السعر والكمية المعروضة

افترض أن البيانات التالية تمثل القيم المشاهدة للكمية المعروضة من سلعة معينة (ص) وسعر هذه السلعة (س) خلال فترة زمنية معينة :

جدول (٢-١)

بيانات السعر والكمية المعروضة

الفترة	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
ص	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	Y
س	16	16	14	12	9	8	6	4	3	2	X

والمطلوب هو :

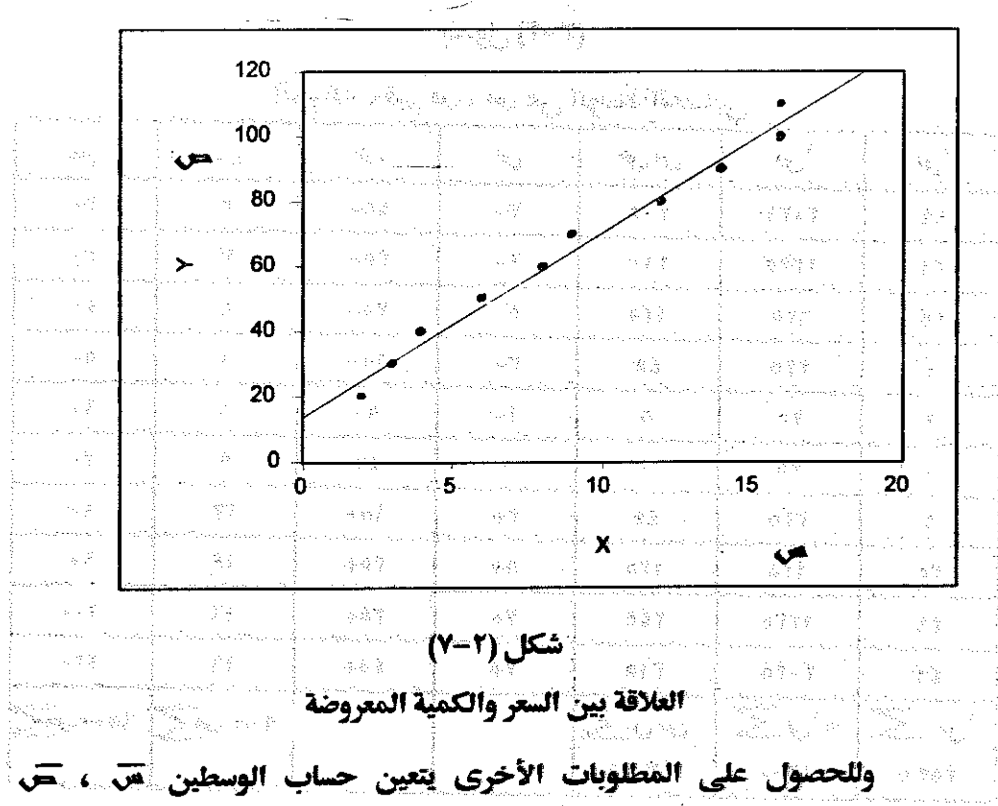
(أ) رسم شكل الانتشار الممثل للعلاقة بين الكمية المعروضة والسعر.

(ب) قياس مجموع حاصل ضرب الانحرافات .

(جـ) قياس معامل التغاير بين الكمية المعروضة والسعر .

(د) قياس معامل الارتباط بين الكمية المعروضة والسعر .

برسم شكل الانتشار (٢-٧) من بيانات الجدول (٢-١) يتضح أن العلاقة بين السعر والكمية المعروضة طردية وقوية لأن شكل الانتشار يقترب من الخط المستقيم .



شكل (٢-٧)

العلاقة بين السعر والكمية المعروضة

وللحصول على المطلوبات الأخرى يتعين حساب الوسطين $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ الحسابيين ثم الانحرافات ص ر ، س ر على النحو التالي :

$\bar{س} = \sum س \div ن = ٩٠ \div ١٠ = ٩$ ، $\bar{ص} = \sum ص \div ن = ٦٥٠ \div ١٠ = ٦٥$

ومن بيانات الجدول (٢-٢) يتضح أن :

مجموع حاصل ضرب الانحرافات = $\sum$ س ر ص ر = ١٤٣٠

معامل التغاير = $\sum$ س ر ص ر ÷ ن = ١٤٣٠ ÷ ١٠ = ١٤٣

معامل الارتباط $= \frac{١٤٣٠}{\sqrt{(٨٢٥٠)(٢٥٢)}} = ٠,٩٩$

جدول (٢-٢)

انحرافات قيم س ، ص عن الوسط الحسابي

ص	س	ص	س	ص س	ص²	س²
٢٠	٢	-٤٥	-٧	٣١٥	٢٠٢٥	٤٩
٣٠	٣	-٣٥	-٦	٢١٠	١٢٢٥	٣٦
٤٠	٤	-٢٥	-٥	١٢٥	٦٢٥	٢٥
٥٠	٦	-١٥	-٣	٤٥	٢٢٥	٩
٦٠	٨	-٥	-١	٥	٢٥	١
٧٠	٩	+٥	٠	٠	٢٥	٠
٨٠	١٢	+١٥	+٣	٤٥	٢٢٥	٩
٩٠	١٤	+٢٥	+٥	١٢٥	٦٢٥	٢٥
١٠٠	١٦	+٣٥	+٧	٢٤٥	١٢٢٥	٤٩
١١٠	١٦	+٤٥	+٧	٣١٥	٣٠٢٥	٤٩
∑ص=٦٥٠	∑س =٩٠			∑س ص =١٤٣٠	∑ص² = ٨٢٥٠	∑ س² = ٢٥٢

وتشير النتائج السابقة إلى أن الارتباط بين الكمية المعروضة والسعر ارتباط طردي، وهذا يتفق مع منطق النظرية الاقتصادية . كما يوضح معامل الارتباط أن الارتباط بينهما قوي .

مثال (٢-٢)

الارتباط بين سعر الفائدة وحجم الاستثمار الثابت

قام باحث بجمع بيانات عن حجم الاستثمار في مجتمع ما (ث) وسعر الفائدة (ف) خلال الفترة ١٩٩٠-١٩٩٥ فوجدها كما بالجدول (٢-٣) .

والمطلوب :

(أ) ارسم شكل الانتشار الممثل للقيم المشاهدة للمتغيرين .

(ب) احسب معاملي التغاير و الارتباط بين سعر الفائدة وحجم الاستثمار.

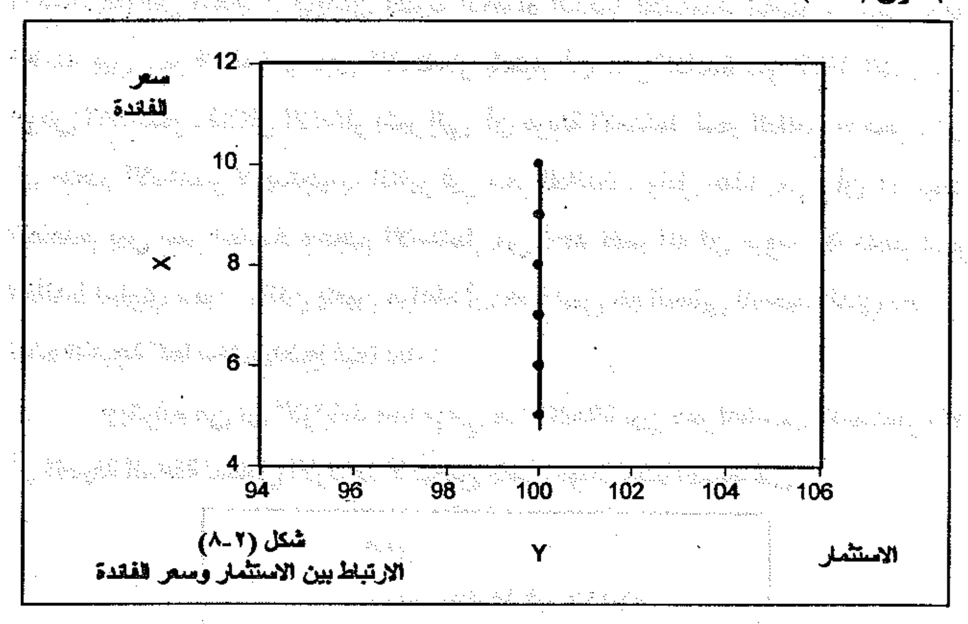
(جـ) علق على النتائج التي تحصل عليها مستخدما المنطق الاقتصادي .

جدول (٢-٣)

الاستثمار الثابت وسعر الفائدة

السنة	الاستثمار-بليون جنيه ث (Y)	سعر الفائدة ٪ ف (X)
2000	100	5
2001	100	6
2002	100	7
2003	100	8
2004	100	9
2005	100	10

يمثل الشكل ((٢-٨) العلاقة بين كل من سعر الفائدة والاستثمار كما يعرضها الجدول (٢-٣) .



شكل (٢-٨)
الارتباط بين الاستثمار وسعر الفائدة

ويمكن استخدام الصيغتين التاليتين في حساب كل من معامل التغاير ومعامل الارتباط :

$$\text{غ}_{\text{ث ف}} = \frac{\sum \text{ث}_1 \text{ف}_1}{\text{ن}} \text{ ، } \text{ر} = \frac{\sum \text{ث}_1 \text{ف}_1}{\sqrt{\sum \text{ث}_1^2 \sum \text{ف}_1^2}}$$

$$Cov(yx) = \frac{\Sigma yx}{n}, r = \frac{\Sigma yx}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

حيث : $\text{ف}_1 = \text{ف} - \overline{\text{ف}}$ ، $\text{ث}_1 = \text{ث} - \overline{\text{ث}}$

ويلاحظ أن حجم الاستثمار ثابت عبر الفترة الزمنية محل البحث ، وهذا يعني أن ث_1 لكل القيم = صفر . ومن ثم فان $\sum \text{ث}_1 \text{ف}_1$ = صفر ، وبالتالي فان معامل التغاير = صفر. أي أن الارتباط منعدم بين سعر الفائدة والاستثمار . ويلاحظ عموما أن شكل الانتشار ومعامل التغاير لا يؤيدان نظرية الكفاءة الحدية للاستثمار القائلة بوجود علاقة عكسية بين سعر الفائدة وحجم الاستثمار باعتبار أن سعر الفائدة هو تكلفة الاقتراض لغرض الاستثمار . فشكل الانتشار يشير إلى أن مرونة الاستثمار لسعر الفائدة = صفر . أي أن حجم الاستثمار لا يستجيب للتغير في سعر الفائدة . ولعل هذا يعني أن الارتباط المنعدم بين سعر الفائدة وحجم الاستثمار من أحد تفسيراته أن مرونة الاستثمار لسعر الفائدة تساوي صفرا . ولكن يتعين مراعاة أن هذا ليس هو المعنى الوحيد الذي تحتمله هذه النتيجة كما سوف يتضح فيما بعد :

وبالرغم من أن الارتباط منعدم في هذه الحالة بين سعر الفائدة والاستثمار ، إلا أن الصيغة السابقة لمعامل الارتباط لا توضح ذلك. فوفقا لهذه الصيغة فان :

$$\text{ر} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{قيمة غير محددة}$$

وهذا يعني أنه حتى تصلح صيغة معامل الارتباط السابقة في القياس يتعين أن تكون هناك على الأقل قيمة واحدة غير صفرية لكل انحراف من الانحرافين ث،، ف، . ويعتبر معامل التغاير أنسب لقياس الارتباط في مثل الحالة السابقة.

مثال (٢-٣)

الارتباط بين سعر الفائدة الثابت وحجم الاستثمار

قام باحث بجمع بيانات عن حجم الاستثمار وسعر الفائدة في مجتمع ما خلال فترة من الزمن ١٩٩٠-١٩٩٥ فوجدها كما بالجدول (٢-٤) .

جدول (٢-٤)

سعر الفائدة الثابت والاستثمار

السنة	الاستثمار (بليون جنيه)	سعر الفائدة ٪
2000	100	8
2001	150	8
2002	200	8
2003	250	8
2004	300	8
2005	350	8

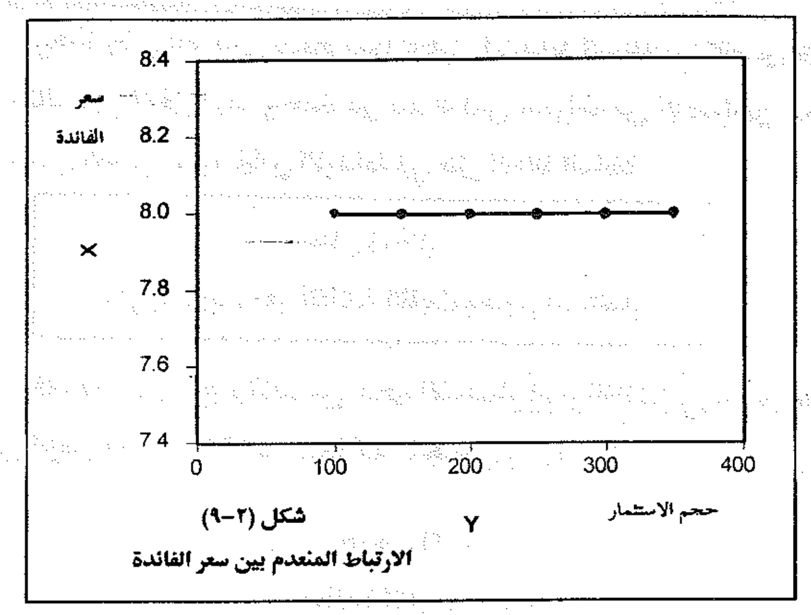
والمطلوب :

(أ) رسم شكل الانتشار الممثل للقيم المشاهدة.

(ب) حساب معاملي التغاير و الارتباط بين سعر الفائدة والاستثمار.

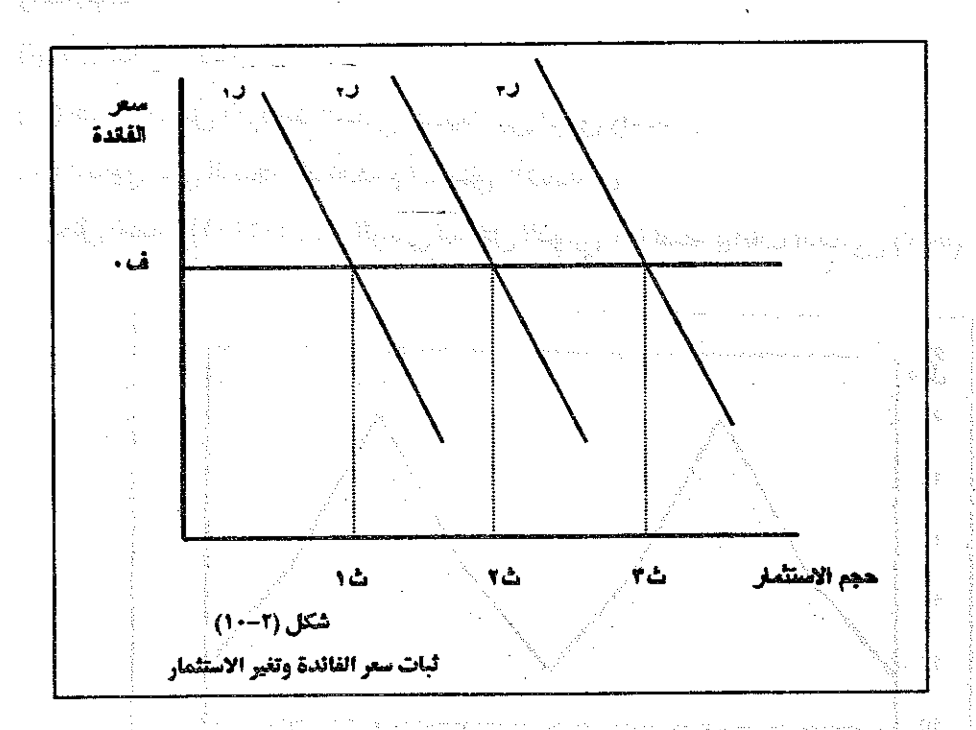
(جـ) التعليق على النتائج باستخدام المنطق الاقتصادي .

يوضح الشكل (٢-٩) العلاقة بين سعر الفائدة وحجم الاستثمار كما تصفها بيانات الجدول (٢-٤) . ولما كان سعر الفائدة ثابتا عبر الفترة الزمنية محل البحث ، فان هذا



شكل (٢-٩)
الارتباط المنعدم بين سعر الفائدة

يعني أن $ف_١$= ف – $\overline{ف}$ = صفر، ومن ثم فان $ف_١ث_١$ =صفر ، وبالتالي فان معامل التغاير = صفر ، وهو ما يعني أن الارتباط منعدم بين سعر الفائدة والاستثمار . ويأخذ معامل الارتباط قيمة غير محددة في هذه الحالة أيضا . ويتضح من معامل التغاير و شكل الانتشار (٢-٩) أن حجم الاستثمار يتزايد رغم ثبات سعر الفائدة ، وهذا يوحي بأن هناك عوامل أخرى تؤثر في حجم الإستثمار غير سعر الفائدة ، الأمر الذي يقلل من أهمية سعر الفائدة كأحد العوامل المؤثرة على حجم الاستثمار . ويمكن توضيح هذه الفكرة من خلال الشكل (٢-١٠) .



شكل (٢-١٠)

ثبات سعر الفائدة وتغير الاستثمار

فحدوث تقدم تكنولوجي أو ارتفاع في معدل الأرباح يمكن أن يؤدي إلى زيادة حجم الاستثمار من خلال نقل منحنى الكفاءة الحدية للاستثمار من ر١ إلى ر٢ إلى ر٣ رغم ثبات سعر الفائدة عند مستوى معين ف. .

مثال (٢-٤)

المسار الزمني للدخل

قام باحث بجمع بيانات عن الدخل القومي الحقيقي لمجتمع ما خلال فترة تسع سنوات فوجدها كما بالجدول (٢-٥) .

جدول (٢-٥)

المسار الزمني للدخل

السنة (ز) T	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
الدخل (ل) Y	11.7	15	20	15	11.7	15	20	15	11.7

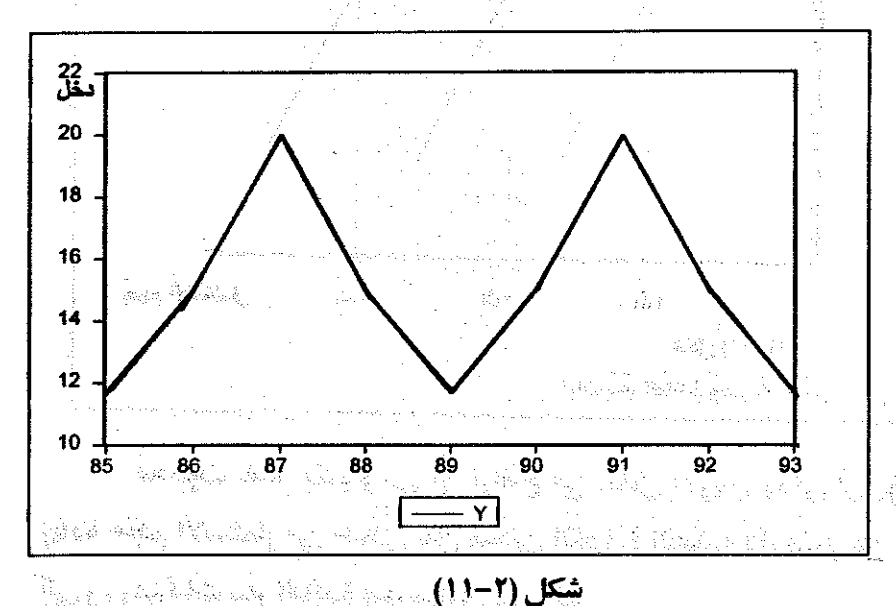
والمطلوب :

(أ) رسم شكل الانتشار

(ب) حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين الزمن والدخل .

(جـ) التعليق على النتيجة باستخدام المنطق الاقتصادي .

يمثل الشكل (٢-١١) المسار الزمني للدخل القومي كما تصفه بيانات الجدول (٢-٥).



شكل (٢-١١)

وصف للدورة التجارية بدلالة الدخل

وحتى يمكن حساب معامل الارتباط بين الدخل والزمن يتعين تحديد الانحرافات ز، = ز-زَ ، ل، = ل-لَ كما بالجدول (٢-٦) .

وباستخدام الصيغة التالية لحساب معامل الارتباط :

$$ر = \frac{\sum ز_، ل_،}{\sqrt{\sum ز_،^٢ \sum ل_،^٢}}$$

$$r = \frac{\Sigma yt}{\sqrt{\Sigma t^2 y^2}}$$

جدول (٢-٦)

حساب الارتباط بين الدخل والزمن

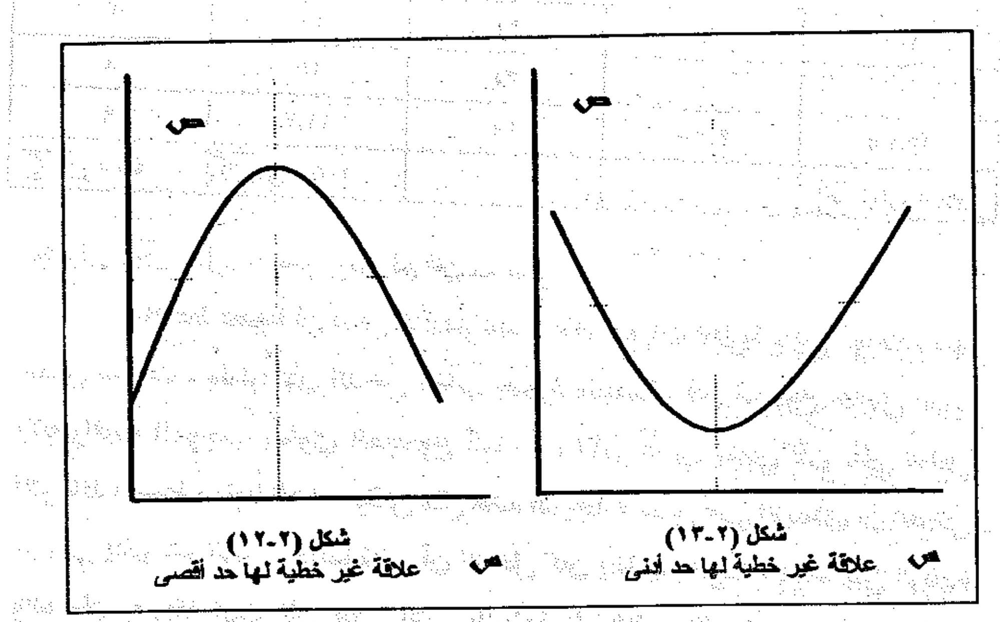
الزمن (ز) T	الدخل (ل) Y	t (ز،)	y (ل،)	yt (ز،ل،)
١	١١,٧	٤-	٣,٣-	١٣,٢ +
٢	١٥	٣-	٠	٠
٣	٢٠	٢-	٥+	١٠-
٤	١٥	١-	٠	٠
٥	١١,٧	٠	٣,٣-	٠
٦	١٥	١+	٠	٠
٧	٢٠	٢+	٥+	١٠+
٨	١٥	٣+	٠	٠
٩	١١,٧	٤+	٣,٣-	١٣,٢ +
$\sum$ ز = ٤٥	$\sum$ ل = ١٣٥			$\sum$ ز،ل، = صفر

نجد أن $\sum$ ز،ل، = صفر ، ومن ثم فان ر= صفر .

ويلاحظ عموما أن شكل الانتشار يصف حالة دورات تجارية طول الواحدة منها خمس سنوات . ونظراً لأن الدخل يتقلب بصورة منتظمة ، فان مجموع حاصل ضرب الانحرافات الموجب يساوي المجموع السالب ، الأمر الذي يؤدي لأن يأتي معامل الارتباط البسيط مساوياً للصفر . ولكن مثل هذه النتيجة لا تعني على الإطلاق أن الدخل لم يكن يتغير عبر الزمن ، وإنما تعني أن الدخل كان يتقلب بطريقة منتظمة بين الزيادة والنقصان بطريقة أدت لأن يلغي التغير بالزيادة أثر التغير بالنقصان . ولذا فان أحد المعاني المحتملة للارتباط الصفري البسيط هي أن المتغير الاقتصادي يتقلب بطريقة منتظمة عبر الزمن بين الزيادة والنقصان .

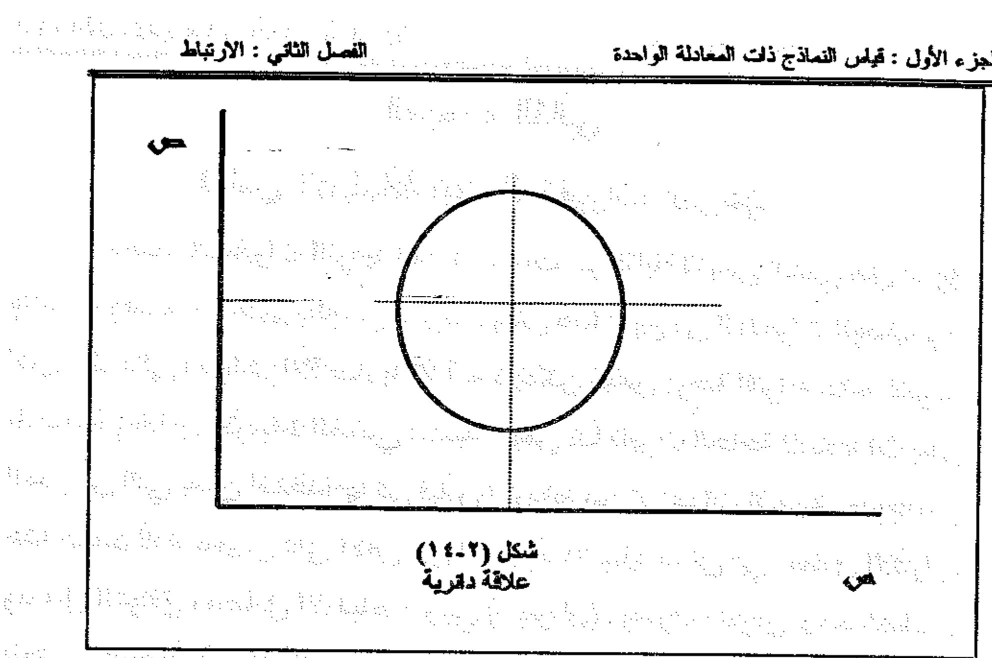
وفي نهاية هذا المبحث نود أن نشير إلى بعض القيود التي تحد من استخدام أسلوب الارتباط الخطي البسيط في قياس العلاقات الاقتصادية :

(أ) الصيغة السابقة للارتباط البسيط لا تنطبق إلا في حالات العلاقات الخطـية ، أي أنها لا تصلح في الحالات غير الخطية. فإذا ما كانت هناك علاقة غير خطية بين متغيرين تأخذ أحد الأشكال (٢-١٢)، (٢-١٣)، (٢-١٤) فإن استخدام معامل الارتباط الخطي في قياس هذه العلاقة سوف ينتهي بنا إلى أن يكون الارتباط بين هذين المتغيرين صفريا. وبالطبع فان الارتباط الصفري في الحالات السابقة لا يعني أن المتغيرين س ، ص مستقلين إحصائيا ، حيث أن هناك علاقة بينهما ولكنها غير خطية. وكل ما هنالك هو أن الجزء السالب من هذه العلاقة يلغي أثر الجزء الموجب، فتكون المحصلة صفرا عندما نستخدم معامل الارتباط البسيط. ولذلك يمكن القول أن " كل المتغيرات المستقلة إحصائيا متغيرات لا مرتبطة أي صفرية الارتباط ، ولكن ليست كل المتغيرات صفرية الارتباط متغيرات مستقلة إحصائيا ".



شكل (٢-١٢)
علاقة غير خطية لها حد أقصى

شكل (٢-١٣)
علاقة غير خطية لها حد أدنى



شكل (٢-١٤)
علاقة دائرية

(ب) يلاحظ أن معامل الارتباط الخطي لا يدلل على وجود علاقة سببية بين المتغيرات ، فهو وإن كان يوضح مدى اقتران التغير في أحد المتغيرات بالتغير في متغير آخر ، إلا أنه لا يحدد ما إذا كانت تغيرات أحدهما هي السبب في تغيرات الآخر . كما أن معرفة معامل الارتباط وحدها لا تمكننا من التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر . وعموما فان وجود ارتباط قوي بين متغيرين مثل س ، ص ، ربما يصف واحدا من الحالات التالية :

١-أن التغير في س هو سبب التغير في ص .

٢-أن التغير في ص هو سبب التغير في س .

٣- أن س ، ص يعتمدان على بعضهما البعض بالتبادل ، أي أن بينهما علاقة ثنائية الاتجاه.

٤- أن هناك عاملا مشتركا آخر يؤثر عليهما معا فيسبب اقترانا قويا بين التغيرات فيهما.

٥- أن الاقتران بينهما يرجع لعامل الصدفة البحتة .

المبحث الثاني

قياس الارتباط بين المتغيرات النوعية

يقصد بالمتغيرات النوعية تلك المتغيرات غير القابلة للقياس الكمي مثل الذوق والديانة ومستوى التعليم والجنس وغيرها . ومثل هذا النوع من المتغيرات الوصفية وإن كان يؤثر على الظواهر الاقتصادية إلا أنه لا يمكن قياس درجة اقترانه بهذه الظواهر باستخدام معامل الارتباط الخطي البسيط . ومن هنا ظهر ت الحاجة لاستحداث بعض المقاييس التي يمكن استخدامها في قياس الارتباط بين المتغيرات النوعية . ويوجد في هذا الصدد ثلاثة مقاييس على الأقل بين المتغيرات النوعية تتمثل في : معامل الاقتران، ومعامل التوافق ، ومعامل الارتباط الرتبي (سبيرمان) . وسوف نتعرض لهذه المقاييس بنوع من التفصيل في هذا المبحث .

(٢-٢-١) معامل الاقتران Association coefficient

كثيرا ما يحتاج الباحث إلى قياس درجة الاقتران بين بعض المتغيرات النوعية مثال ذلك درجة الاقتران بين نوع التخصص والوظيفة ، حيث نسمع عن أطباء يعملون في البنوك ، وصيادلة يعملون في التدريس ، ودرجة الاقتران بين مستوى التعليم والطبقة الاجتماعية ، حيث نسمع عن أميين يندرجون في طبقة الأغنياء وحاملي درجة دكتوراه يندرجون في طبقة الفقراء ، وغيرها من الظواهر الاجتماعية غير القابلة للقياس .

ومعامل الاقتران يعتمد في تحديد قيمته على مدى اقتران الصفات بعضها ببعض . فإذا أخذن مثلا عينة من الأفراد عددها ١٠٠ فرد ، منهم ٦٠ فرد متخصصون في الهندسة المدنية، ٤٠ متخصصون في تدريس التاريخ، وأردنا تحديد درجة الاقتران بين نوع التخصص ونوع الوظيفة ، وتبين لنا أن كل فرد حصل على وظيفة في تخصصه ، فمن الممكن القول في هذه الحالة بأن هناك اقتراناً تاماً بين نوع التخصص والوظيفة . ويمكن وصف هذه الحالة من خلال جدول الاقتران (٢-٧) :

جدول (٢-٧) - الاقتران بين نوع التخصص والوظيفة

الوظيفة / التخصص	مهندس مدني	مدرس تاريخ	مجموع
هندسة مدنية	أ =٦٠	ب = ٠	٦٠
تدريس تاريخ	جـ =٠	د = ٤٠	٤٠
مجموع	٦٠	٤٠	١٠٠

حيث تشير الخلايا : أ ، ب ، جـ ، د في جدول الاقتران السابق إلى تكرار كل صفة في العينة . ومعامل الاقتران يستخدم هذه التكرارات في حساب قيمته كما يلي :

معامل الاقتران = (أ د – ب جـ) / (أ د + ب جـ) ....(٢-٣)

$$Association\ \ coefficient = \frac{AD - BC}{AD + BC}$$

ومن الجدول (٢-٧) يتضح أن :

معامل الاقتران = [(٦٠ × ٤٠) – (صفر × صفر)] / [(٦٠ × ٤٠) + (صفر + صفر)] = ١

وهو ما يعني أن الاقتران بين الوظيفة والتخصص يعتبر اقترانا طرديا تاما .

ولكن إذا افترضنا أن كل شخص يعمل في وظيفة غير تخصصه تماما ، كأن يعمل المهندس المدني في مهنة التدريس ، ويعمل مدرس التاريخ في مجال مقاولات الإنشاء، فإننا نجد أن : أ= صفر ، ب = ٦٠ ، جـ= ٤٠ ، د = صفر ، ومن ثم فإن :

معامل الاقتران = [صفر – (٦٠ × ٤٠)] / [صفر + (٦٠ × ٤٠)] = - ١

أي أن هنا ك اقترانا عكسيا تاما بين نوع التخصص والوظيفة . وفي هذه الحالة لا يوجد هناك أحد يعمل في تخصصه ، بل كل فرد يعمل في غير تخصصه .

أما إذا كان تخصص الهندسة وتخصص التدريس لا يؤثران بدرجة جوهرية على وظيفة الشخص ، كأن يكون ٥٠ ٪ من المتخصصين في الهندسة المدنية يعملون في تخصصاتهم ، ٥٠ ٪ يعملون في التدريس ، ونفس الشيء في حالة التدريس ، فإننا نجد أن: أ = ٣٠ ، ب = ٣٠ ، جـ = ٢٠ ، د = ٢٠ ، ومن ثم فإن :

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{(٣٠ \times ٢٠) - (٣٠ \times ٢٠)}{(٣٠ \times ٢٠) + (٣٠ \times ٢٠)} = \text{صفر}$$

وفي هذه الحالة نقول أن الوظيفة لا ترتبط بالتخصص ، أو أن التخصص لا يقترن بصورة فاعلة بالوظيفة . وإن كان هذا لا يعني أنه لا يوجد هناك من يعمل في تخصصه .

غير أن معامل الاقتران يعاني من بعض النقائص :

(أ) يقتصر استخدامه على المتغيرات التي تتصف بصفتين متقابلتين فقط ، مثل ذكر وأنثى، أو أبيض وأسود ، وهكذا . وهذا يعني أن جدول الاقتران لا يمكن أن يحتوي على أكثر من أربعة خلايا جزئية . ولذلك لا يمكن استخدام معامل الاقتران في الحالات التي يتصف فيها المتغير بأكثر من صفتين ، مثال ذلك متعلم تعليم عالي ، ومتعلم تعليم متوسط ، وأمي ، وهكذا .

(ب) تتأثر قيمة معامل الاقتران بطريقة عرض التكرارات بالجدول . وربما ترتب على ذلك إعطاء نتائج مضللة . فإذا كتبنا البيانات المعروضة في جدول الاقتران (٢-٧) في الصورة التالية الموضحة بالجدول (٢-٨) :

جدول (٢-٨)

الاقتران بين التخصص والوظيفة

الوظيفة / التخصص	موظف في تخصصه	موظف في غير تخصصه	مجموع
هندسة مدنية	أ = ٦٠	ب = صفر	٦٠
تدريس تاريخ	جـ = ٤٠	د = صفر	٤٠
مجموع	١٠٠	صفر	١٠٠

فإننا نجد أنه بالرغم من أن هذا الجدول يحتوي على نفس القدر من المعلومات التي يحتوي عليها الجدول الذي يسبقه ، إلا أن معامل الاقتران مختلف وفقا للصيغة المستخدمة ، حيث :

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{أ د} + \text{ب جـ}} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر}}{\text{صفر} + \text{صفر}}$$

وهي قيمة غير محددة . وربما يكون من الأفضل في هذه الحالة أن نحسب معامل الاقتران كما يلي :

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ جـ} - \text{ب د}}{\text{أ جـ} + \text{ب د}} = \frac{(٦٠ \times ٤٠) - \text{صفر}}{(٦٠ \times ٤٠) + \text{صفر}} = ١$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من الجدول (٢-٧) .

(٢-٢-٢) معامل التوافق Contingency coefficient

يمكن لمعامل التوافق أن يقيس درجة الارتباط بين ظاهرتين من بيانات وصفية حتى في حالة احتواء هذه البيانات على أكثر من قسمين . فإذا ما أردنا قياس درجة الارتباط بين مستوى التعليم والوعي المصرفي والذي نعبر عنه بالادخار في البنك ، فإن معامل التوافق يساعدنا على ذلك رغم أن مستوى التعليم يحتوي على أكثر من فئتين .

ولتوضيح ذلك افترض أن لدينا عينة من الأفراد تحتوي على ١٠٠ شخص ، وكان هذا ينقسم من حيث المستوى التعليمي إلى ٢٠ تعليم عالي ، ٥٠ تعليم متوسط ، ٣٠ دون التعليم المتوسط ، وكان جدول التوافق لهذه العينة يتمثل في الجدول (٢-٩) .

جدول (٢-٩)

جدول التوافق بين المستوى التعليمي والوعي المصرفي

درجة الوعي المصرفي / مستوى التعليم	يدخر في البنك	يكتنز	مجموع
تعليم عالي	$ك_{11}$ = ٢٠	$ك_{12}$ = ٠	$ك_{ف1}$ = ٢٠
تعليم متوسط	$ك_{12}$ = ٢٥	$ك_{22}$ = ٢٥	$ك_{ف2}$ = ٥٠
تعليم دون المتوسط	$ك_{13}$ = ٠	$ك_{23}$ = ٣٠	$ك_{ف3}$ = ٣٠
مجموع	$ك_{ع1}$ = ٤٥	$ك_{ع2}$ = ٥٥	١٠٠

حيث تشير خلايا جدول التوافق إلى تكرارات الفئات المختلفة ، وتشير ك ف ع إلى تكرار خلية واقعة في الصف "ف" والعمود "ع" . ويمكن استخدام الصيغة التالية في حساب معامل التوافق :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{ج - 1}{ج}} \quad ......(٢-٤)$$

حيث :

$$ج = \sum \frac{(ك_{فع})^2}{ك_ف \times ك_ع} \quad ......(٢-٥)$$

أي أن "جـ" تساوي مجموع مربعات التكرارات بعد قسمتها على حاصل ضرب تكرار الصف ($ك_ف$) في تكرار العمود ($ك_ع$) . وفي مثالنا هذا نجد أن :

$$ج = \frac{(٢٠)^٢}{٤٥ \times ٢٠} + \frac{(صفر)^٢}{٥٥ \times ٢٠} + \frac{(٢٥)^٢}{٤٥ \times ٥٠} + \frac{(٢٥)^٢}{٥٥ \times ٥٠} + \frac{(صفر)^٢}{٤٥ \times ٣٠} + \frac{(٣٠)^٢}{٥٥ \times ٣٠}$$

ج = ٠,٤٤ + صفر + ٠,٢٨ + ٠,٢٣ + صفر + ٠,٥٥ = ١,٥

$$معامل التوافق = \sqrt{\frac{١,٥ - ١}{١,٥}} = \sqrt{\frac{٠,٥}{١,٥}} = ٠,٦$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن هناك ارتباطا ما بين مستوى التعليم ودرجة الوعي المصرفي .

ولكن إذا كان معامل التوافق قد تخلص من المشكلة الأولى التي يعاني منها معامل الاقتران والخاصة بعدد الأقسام التي تتجزأ إليها كل صفة أو خاصية ، فإنه لا يزال يعاني من المشكلة الثانية ، حيث أن قيمته تتأثر بطريقة عرض التكرارات بالجدول . فإذا حسبنا معامل التوافق من جدول الاقتران (٢-٧) نجد أنه يساوي :

$$معامل التوافق = \sqrt{\frac{٢ - ١}{٢}} = \sqrt{٠,٥} = ٠,٧$$

أما إذا حسبناه من الجدول (٢-٨) بعد أن نعرض نفس المعلومات بطريقة مختلفة ، فإن النتيجة تختلف ، حيث يصبح معامل التوافق مساويا صفر .

بالإضافة إلى أنه لا يمكن أن يكون سالبا ولا يمكن أن يكون تاما أي مساويا الواحد .

(٢-٢-٣) معامل الارتباط (سبيرمان) The Rank Correlation Coefficient

تقوم فكرة معامل الارتباط الرتبي على أساس ترتيب مفردات كل متغير من المتغيرات الوصفية محل البحث ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ، مع إعطاء كل مفردة قيمة رقمية تظهر ترتيبها . وباستخدام هذه الرتب يمكن حساب معامل الارتباط الرتبي . ويمكن استخدام هذا المعامل في قياس درجة الارتباط بين بعض المتغيرات الوصفية

كالارتباط بين المستوى الثقافي والذوق، أو لقياس مدى التغير في بعض الظواهر الاقتصادية كالتغير في هيكل الاقتصاد القومي . وسوف نوضح ذلك في أمثلة تالية .

ويمكن حساب معامل الارتباط الرتبي من خلال المعادلة التالية :

$$ر_س = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)} \quad ....(٢-٦)$$

$$R_s = 1 - \frac{\sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث : ن = عدد المشاهدات n =

ف = الفرق بين رتبتي كل قيمتين متقابلتين = D

مثال (٢-٥)

مدى اتساق التفضيلات

افترض أن هناك مجموعتين من المستهلكين يختلفان في مستواهما الثقافي مع ثبات العوامل الأخرى كالعمر والدخل والموطن . وافترض أننا طلبنا من كل مجموعة منهما أن ترتب عدداً من التوليفات السلعية وفقا لتفضيلاتها ، فكان الترتيب الغالب لكل مجموعة من المستهلكين كما بالجدول (٢-١٠) :

جدول (٢-١٠)

ترتيب التوليفات المختلفة

المجموعة السلعية	أ	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح	ط	ك	مجموع
ترتيب المجموعة الأولى	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	
ترتيب المجموعة الثانية	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	
الفروق =ف (D)	٩-	٧-	٥-	٣-	١-	١	٣	٥	٧	٩	
ف ^{٢} =(D^2)	٨١	٤٩	٢٥	٩	١	١	٩	٢٥	٤٩	٨١	٣٣٠

وبحساب معامل الارتباط الرتبي نحصل على :

$$ر_{س} = ١ - \frac{٦ \times ٣٣٠}{١٠(١٠٠-١)} = ١ - \frac{١٩٨٠}{٩٩٠} = -١$$

ومن الواضح أن هذه النتيجة تشير إلى أن تفضيلات المستهلكين ذوي المستويات الثقافية المختلفة متناقضة تماماً ، ومن ثم فإن المستوى الثقافي ربما يكون مرتبطاً بذوق المستهلك ارتباطاً تاماً .

مثال (٢-٦)

درجة التغير الهيكلي

إذا علمت أن التوزيع النسبي للناتج القومي بين القطاعات الإنتاجية المختلفة لمجتمع ما في عامي ١٩٧٠ ، ١٩٩٦ كان كما بالجدول (٢-١١):

جدول (٢-١١)

هيكل الناتج القومي ٪

القطاع / السنة	(١٩٧٠) ٪	(١٩٩٦) ٪
أ- الصناعة الاستخراجية	٤٠	١٠
ب- الصناعة التحويلية -سلع استهلاكية	١٠	٣٠
جـ - الصناعة التحويلية -سلع إنتاجية	١٠	٢٥
د- الزراعة	١٥	١٥
هـ-الخدمات	٢٥	٢٠
مجموع	١٠٠	١٠٠

فالمطلوب هو :

١-حساب معامل الارتباط الرتبي بين التوزيعين .

٢-التعليق على درجة التغير الهيكلي التي حدثت في هذا المجتمع .

للإجابة على الأسئلة المطلوبة سابقا يتعين إتباع الخطوات التالية :

أولا : القيام بترتيب القطاعات الإنتاجية ترتيبا تنازليا حسب أهميتها النسبية.

ثانيا : في حالة تساوي قطاعين إنتاجيين في الرتبة نقوم بقسمة الرتبتين اللتين يتعين تحديدهما لهما على إثنين ونرصد متوسط الرتبة لكل منهما.

وبتنفيذ هاتين الخطوتين نحصل على الجدول (٢-١٢) :

جدول (٢-١٢)

حساب معامل الارتباط الرتبي

القطاع	أ	ب	جـ	د	هـ	المجموع
ترتيب ١٩٧٠	١	٤,٥	٤,٥	٣	٢	
ترتيب ١٩٩٦	٥	١	٢	٤	٣	
ف	-٤	٣,٥	٢,٥	-١	-١	
$ف^2$	١٦	١٢,٢٥	٦,٢٥	١	١	$\sum ف^2 = ٣٦,٥$

وبحساب معامل الارتباط الرتبي بين الترتيبين نحصل على :

$$ر_س = ١ - \frac{٦ \times ٣٦,٥}{٥(٢٥ - ١)} = ١ - \frac{٢١٩}{١٢٠} = -٠,٨$$

وحيث أن الارتباط بين الترتيبين عكسياً وقوياً فهذا دليل على أن تغيراً هيكلياً كبيراً قد حدث في اقتصاد هذا المجتمع في الاتجاه المعاكس .

المبحث الثالث

قياس الارتباط الجزئي

Partial Correlation

كثيراً ما تواجهنا حالات في الواقع لا يقتصر فيها الاقتران أو الارتباط على متغيرين فقط، وإنما يمتد ليشتمل على أكثر من متغيرين . وفي مثل هذه الحالة إذا ركزنا اهتمامنا على علاقة الاقتران بين متغيرين منها فقط وحاولنا حساب معامل الارتباط الخطي البسيط لعلاقة الاقتران هذه مع تجاهل المتغيرات الأخرى فسوف نحصل على نتيجة قد تختلف تماما عن التوقع النظري المسبق الذي نضعه لشكل علاقة الاقتران . فعلى سبيل المثال نحن ننظر للعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعرها على أنها علاقة عكسية ، ومن ثم فمن المتوقع أن يكون معامل الارتباط الخطي البسيط بينهما سالباً. ولكن إذا كان الدخل متزايداً بمعدل أعلى من معدل ارتفاع سعر السلعة فان الكمية المطلوبة منها سوف تزداد بدلا من أن تتناقص رغم ارتفاع سعر السلعة . ومن ثم فان معامل الارتباط الخطي البسيط بين الكمية المطلوبة والسعر ربما يكون طرديا . وهذه النتيجة الأخيرة عكس ما كان متوقعا نظرا لإهمال أثر متغير ثالث هو الدخل . ومن هنا تظهر أهمية معاملات الارتباط الجزئي التي تُمكّن من قياس درجة الارتباط في حالة وجود أكثر من متغيرين بينهم علاقة اقتران ، حيث تستبعد أثر المتغيرات الأخرى وتركز على المتغيرين محل البحث . فإذا كان لدينا ثلاث متغيرات مثلا س١، س٢، س٣ (X_1, X_2, X_3) فمن الممكن قياس الارتباط بين أي اثنين منهم مع عزل أثر الثالث باستخدام معامل الارتباط الجزئي . ويمكن حساب الأخير باتباع الخطوات التالية:

أولا : نقوم بحساب معاملات الارتباط الخطي البسيط التالية :

ر٢١ = معامل الارتباط بين س١ ، س٢ $= r_{12}$

ر٢١ = معامل الارتباط بين س١، س٢ $= r_{13}$

ر٢٢ = معامل الارتباط بين س٢ ، س٢ $= r_{23}$

ثانيا : يمكن حساب معاملات الارتباط الجزئية التالية باستخدام المعاملات السابقة حيث:

$\text{ر}_{١٢.٣}$ = معامل الارتباط بين $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ مع ثبات $\text{س}_٣$ = $r_{12.3}$

$\text{ر}_{١٣.٢}$ = معامل الارتباط بين $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٣$ مع ثبات $\text{س}_٢$ = $r_{13.2}$

$\text{ر}_{٢٣.١}$ = معامل الارتباط بين $\text{س}_٢$ ، $\text{س}_٣$ مع ثبات $\text{س}_١$ = $r_{23.1}$

$$\text{ر}_{١٢.٣} = \frac{\text{ر}_{١٢} - (\text{ر}_{١٣})(\text{ر}_{٢٣})}{\sqrt{[١ - (\text{ر}_{١٣})^{٢}][١ - (\text{ر}_{٢٣})^{٢}]}} \quad \text{(٧-٢)}$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - (r_{13})(r_{23})}{\sqrt{\left[1 - (r_{13})^2\right]\left[1 - (r_{23})^2\right]}}$$

$$\text{ر}_{١٣.٢} = \frac{\text{ر}_{١٣} - (\text{ر}_{١٢})(\text{ر}_{٢٣})}{\sqrt{[١ - (\text{ر}_{١٢})^{٢}][١ - (\text{ر}_{٢٣})^{٢}]}} \quad \text{(٨-٢)}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - (r_{12})(r_{23})}{\sqrt{\left[1 - (r_{12})^2\right]\left[1 - (r_{23})^2\right]}}$$

$$\text{ر}_{٢٣.١} = \frac{\text{ر}_{٢٣} - (\text{ر}_{١٣})(\text{ر}_{١٢})}{\sqrt{[١ - (\text{ر}_{١٣})^{٢}][١ - (\text{ر}_{١٢})^{٢}]}} \quad \text{(٩-٢)}$$

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - (r_{13})(r_{12})}{\sqrt{\left[1 - (r_{13})^2\right]\left[1 - (r_{12})^2\right]}}$$

مثال (٢-٧)
الارتباط الجزئي بين الاستهلاك والدخل

قام باحث بجمع بيانات عن الادخار (خ) والاستهلاك (س) والدخل (ل) لمجتمع ما عبر فترة من الزمن فكانت كما بالجدول (٢-١٣) .

جدول (٢-١٣)

الدخل والاستهلاك والادخار

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
الدخل (ل)	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠
الاستهلاك (س)	١,٥	٣,٤	٥	٦,٥	٧,٥	٨,٥	١٠,٥	١٢	١٣,٤	١٥
الادخار (خ)	٠,٥	٠,٦	١	١,٥	٢,٥	٣,٥	٣,٥	٤	٤,٦	٥

والمطلوب :

(١) حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين الاستهلاك والادخار ($ر_{س خ}$).

(٢) حساب معامل الارتباط الجزئي بين الاستهلاك والادخار ($ر_{س خ.ل}$) .

(٣) مقارنة النتيجتين مع التعليق اقتصادياً.

ولإجابة المطلوبات السابقة يتعين إتباع الخطوات التالية :

١- حساب القيم المتوسطة للمتغيرات الثلاثة :

$\bar{ل} = \sum ل \div ن = ١١٠ \div ١٠ = ١١$

$\bar{س} = \sum س \div ن = ٨٣,٣ \div ١٠ = ٨,٣٣$

$\bar{خ} = \sum خ \div ن = ٢٦,٧ \div ١٠ = ٢,٦٧$

٢- حساب انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية كما هو موضح بالجـدول (٢-١٤) ، حيث : $ل_١ = ل - \bar{ل}$ ، $س_١ = س - \bar{س}$ ، $خ_١ = خ - \bar{خ}$.

جدول (٢-١٤)

حسابات معاملات الارتباط

السنه	ل۱	س۱	خ۱	ل۱س۱	س۱خ۱	ل۱خ۱	(ل۱)²	(س۱)²	(خ۱)²
١٩٨٥	٩-	٦,٨٣-	٢,١٧-	٦١,٤٧	١٤,٨٢١١	١٩,٥٣	٨١	٤٦,٦٤٩	٤,٧٠٩
١٩٨٦	٧-	٤,٩٣-	٢,٠٧-	٣٤,٥١	١٠,٢٠٥١	١٤,٤٩	٤٩	٢٤,٣٠٥	٤,٢٨٥
١٩٨٧	٥-	٣,٣٣-	١,٦٧-	١٦,٦٥	٥,٥٦١١	٨,٣٥	٢٥	١١,٠٨٩	٢,٧٨٩
١٩٨٨	٣-	١,٨٣-	١,١٧-	٥,٤٩	٢,١٤١١	٣,٥١	٩	٣,٣٤٨٩	١,٣٦٩
١٩٨٩	١-	٠,٨٣-	٠,١٧-	٠,٨٣	٠,١٤١١	٠,١٧	١	٠,٦٨٨٩	٠,٠٢٨٩
١٩٩٠	١	٠,١٧	٠,٨٣	٠,١٧	٠,١٤١١	٠,٨٣	١	٠,٠٢٨٩	٠,٦٨٨٩
١٩٩١	٣	٢,١٧	٠,٨٣	٦,٥١	١,٨٠١١	٢,٤٩	٩	٤,٧٠٨٩	٠,٦٨٨٩
١٩٩٢	٥	٣,٦٧	١,٣٣	١٨,٣٥	٤,٨٨١١	٦,٦٥	٢٥	١٣,٤٦٨٩	١,٧٦٩
١٩٩٣	٧	٥,٠٧	١,٩٣	٣٥,٤٩	٩,٧٨٥١	١٣,٥١	٤٩	٢٥,٧٠٤٩	٣,٧٢٥
١٩٩٤	٩	٦,٦٧	٢,٣٣	٦٠,٣٠	١٥,٥٤١١	٢٠,٩٧	٨١	٤٤,٤٨٨٩	٥,٤٢٩
مجموع				٢٣٩,٥	٦٥,٠١٩	٩٠,٥	٣٣٠	١٧٤,٤٨	٢٥,٤٨١

٣- نقوم بحساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين الاستهلاك والادخار :

$$ر_{س خ} = \frac{\sum س_۱خ_۱}{\sqrt{\sum س_۱^۲ \sum خ_۱^۲}} = \frac{٦٥,٠١٩}{\sqrt{(٢٥,٤٨)(١٧٤,٤٨)}} = ٠,٩٧٥$$

٤- نقوم بحساب معامل الارتباط الجزئي $ر_{س خ.ل}$. وقبل أن نفعل هذا نحسب معاملات الارتباط البسيطة الأخرى ممثلة في :

$$\text{ر}_{\text{س ل}} = \frac{\sum \text{س}_\text{١}\,\text{ل}_\text{١}}{\sqrt{\sum \text{س}^{\text{٢}}_\text{١} \sum \text{ل}^{\text{٢}}_\text{١}}} = \frac{\text{٢٣٩,٥}}{\sqrt{(\text{١٧٤,٤٨})(\text{٣٣٠})}} = \text{٠,٩٩٨}$$

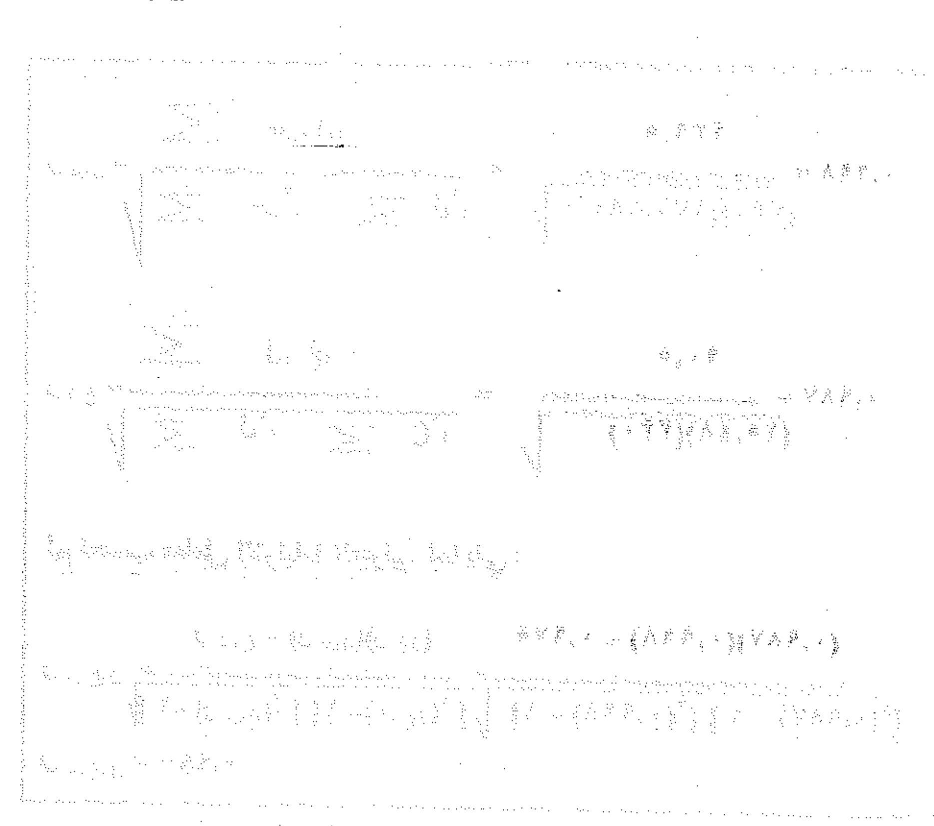
$$\text{ر}_{\text{ل خ}} = \frac{\sum \text{ل}_\text{١}\,\text{خ}_\text{١}}{\sqrt{\sum \text{ل}^{\text{٢}}_\text{١} \sum \text{خ}^{\text{٢}}_\text{١}}} = \frac{\text{٩٠,٥}}{\sqrt{(\text{٢٥,٤٨})(\text{٣٣٠})}} = \text{٠,٩٨٧}$$

ثم نحسب معامل الارتباط الجزئي كما يلي :

$$\text{ر}_{\text{س خ.ل}} = \frac{\text{ر}_{\text{س خ}} - (\text{ر}_{\text{س ل}})(\text{ر}_{\text{خ ل}})}{\sqrt{[\text{١} - (\text{ر}_{\text{س ل}})^{\text{٢}}]\,[\text{١} - (\text{ر}_{\text{خ ل}})^{\text{٢}}]}} = \frac{\text{٠,٩٧٥} - (\text{٠,٩٩٨})(\text{٠,٩٨٧})}{\sqrt{[\text{١} - (\text{٠,٩٩٨})^{\text{٢}}]\,[\text{١} - (\text{٠,٩٨٧})^{\text{٢}}]}}$$

$$\text{ر}_{\text{س خ.ل}} = -\text{٠,٩٨}$$

٥-بمقارنة النتيجتين السابقتين نجد أن $\text{ر}_{\text{س خ}}$ = ٠,٩٧٥ أما $\text{ر}_{\text{س خ.ل}}$ = -٠,٩٨ ، ولعل هذا يعني أن الارتباط الطردي شبه التام بين الاستهلاك والادخار الذي يوضحه معامل الارتباط البسيط يرجع إلى التغير في الدخل . فزيادة الدخل تؤدي إلى زيادة كل من الاستهلاك والادخار معاً ، الأمر الذي يؤدي لوجود ارتباط طردي شبه تام بينهما . وعندما يتم عزل أثر الدخل من خلال الحصول على معامل الارتباط الجزئي بين الاستهلاك والادخار يتضح أن الارتباط بينهما عكسي شبه تام ، وذلك لأنه مع ثبات الدخل فان أي زيادة في الاستهلاك لابد أن يصاحبها نقص في الادخار .



الفصل الثالث

الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression

يعتبر الانحدار أحد الأساليب الإحصائية التي نستخدم في قياس العلاقات الاقتصادية، حيث يختص بقياس العلاقة بين متغير ما يسمى بالمتغير التابع ومتغير آخر أو مجموعة من المتغيرات تسمى بالمتغيرات المستقلة أو التفسيرية . ويلاحظ في هذا الصدد أن الانحدار كأسلوب قياس ليس هو الذي يحدد أي المتغيرات تابع وأيها مستقل ، وإنما يستعين الباحث في تحديد ذلك إما بالنظرية الاقتصادية أو الملاحظة . فمن النظرية الاقتصادية يمكن للباحث أن يعرف أن كمية النقود متغير مستقل أو تفسيري، وأن المستوى العام للأسعار متغير تابع ، كما يمكنه أن يعرف من الملاحظة أن الظروف الجوية متغير مستقل وأن الكمية المعروضة من المحصول متغير تابع .

وتنقسم نماذج الانحدار إلى عدة أنواع : فهناك الانحدار الخطي و الانحدار غير الخطي ، وهناك الانحدار البسيط و الانحدار المتعدد . وتتحدد درجة الخطية على أساس درجة العلاقة المراد قياسها .ففي حالة الانحدار الخطي تكون المعادلة الممثلة للعلاقة عن الدرجة الأولى . وفي حالة الانحدار غير الخطي تكون المعادلة الممثلة للعلاقة من الدرجة غير الأولى . أما عن صفتي بسيط ومتعدد فانهما يتحددان بعدد المتغيرات التفسيرية أو المستقلة التي تحتوى عليها معادلة الانحدار . فالانحدار البسيط يقيس العلاقة بين متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل ، أما الانحدار المتعدد فهو يقيس العلاقة بين متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل ومما سق يمكن تقسيم نماذج الانحدار إلى أربعة أنواع

(١) الانحدار الخطي البسيط

(٢) الانحدار الخطي المتعدد.

(٣) الانحدار غير الخطي السيط.

(٤) الانحدار غير الخطي المتعدد.

ويعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار ، وسوف يتم التركيز عليه في هذا الفصل ، على أن نعالج الأنواع الأخرى في فصول تالية . ويوجد هناك نماذج عديدة للعلاقات الاقتصادية البسيطة التي يمكن قياسها باستخدام أسلوب الانحدار البسيط مثال ذلك العلاقة بين الاستهلاك كمتغير تابع والدخل المتاح كمتغير مستقل وهو ما يعرف بدالة الاستهلاك ، والعلاقة بين الادخار كمتغير تابع والدخل المتاح كمتغير مستقل وهو ما يعرف بدالة الادخار ، والعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها وهو ما يعرف بدالة الطلب وغيرها من العلاقات الأخرى.

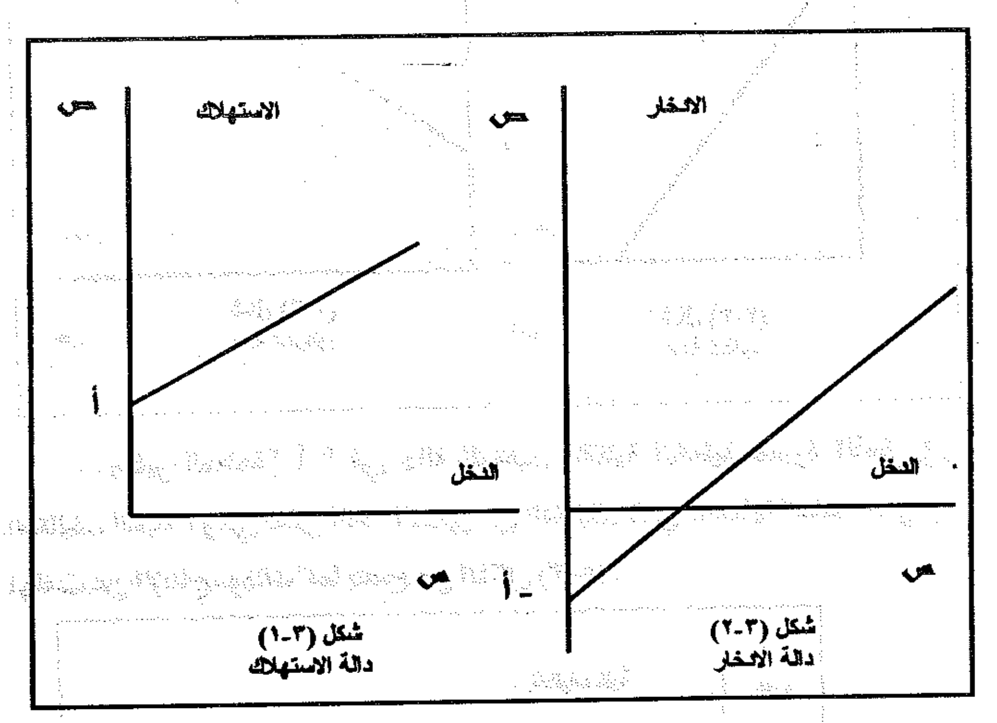
ويلاحظ عموما أن معادلة الانحدار تتكون من متغيرات ومعلمات . فإذا افترضنا أن ص (Y) ، س (X) متغيرين يوجد بينهما علاقة خطية ، فان معادلة الانحدار الخطي البسيط تأخذ الصيغة التالية :

ص= أ + ب س ← $Y = a + bX$ ....(٣-١)

والمتغيرات التي تحتوي عليها معادلة الانحدار هي ص (Y) كمتغير تابع ، س (X) كمتغير مستقل أو تفسيري . ويلاحظ أن المتغير التابع ص يمكن تفسيره بالتغير في المتغير المستقل س . أما عن المعلمات فهي أ (a) ، ب (b) . وتعتبر "أ" هي الحد الثابت أو الحد المقطوع من محور المتغير التابع ، وتمثل قيمة المتغير التابع ص عندما تكون قيمة المتغير التفسيري س مساوية للصفر . وتسمى بالمعلمة التقاطعية أو المعلمة الناقلة نظراً لأن تغيرها يؤدي لانتقال الخط الممثل للعلاقة بالكامل من وضع لآخر . ويختلف مدلول المعلمة التقاطعية من علاقة اقتصادية لأخرى .

ففي دالة الاستهلاك الموضحة بالشكل (٣-١) تمثل "أ" الحد الأدنى للإنفاق الاستهلاكي الذي لابد أن يقوم به المجتمع في الفترة القصيرة حتى إذا انخفض الدخل المتاح إلى الصفر ، ويسمى بحد كفاف المجتمع .

أما في دالة الادخار فان "أ" تمثل الادخار السالب اللازم لتغطية حد الكفاف من الاستهلاك عندما ينخفض الدخل المتاح للصفر . ويتم الادخار عندئذ في صورة السحب من مدخرات سابقة أو الاقتراض . ويتضح هذا من الشكل (٣-٢) .



شكل (٣-١)
دالة الاستهلاك

شكل (٣-٢)
دالة الادخار

وتشير المعلمة التقاطعية " أ " في دالة الطلب لسلعة ما إلى الحد الأقصى للكمية التي يمكن أن تستهلك من هذه السلعة وذلك في حالة أن تصبح سلعة حرة . ويتحدد الحد الأقصى بالطاقة على الاستهلاك . ويتضح هذا من الشكل (٣-٣) . وتشير المعلمة التقاطعية" أ" في دالة العرض إلى الحد الأدنى من كمية الإنتاج الذي يتم عرضه من السلعة حتى إذا آل السعر للصفر، وهو ما يمثل الحد الأدنى من الإنتاج الذي لابد أن تبدأ به المنشأة في العملية الإنتاجية . ويتضح هذا من الشكل (٣-٤) .

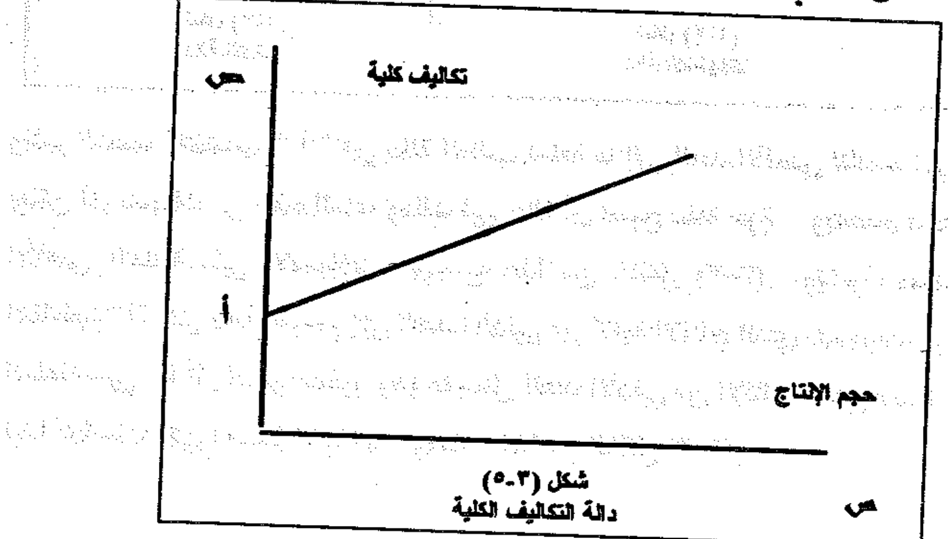
كمية مطلوبة ص أ سعر س

شكل (٣-٣)
دالة الطلب

كمية معروضة ص أ سعر س

شكل (٣-٤)
دالة العرض

وتشير المعلمة" أ " في دالة التكاليف الكلية الخطية قصيرة الأجل إلى التكاليف الثابتة ، وهي تمثل الحد الأدنى من التكاليف التي تتحملها المنشأة حتى إذا توقفت عن الإنتاج، وذلك كما يتضح من الشكل (٣-٥) .



شكل (٣-٥)
دالة التكاليف الكلية

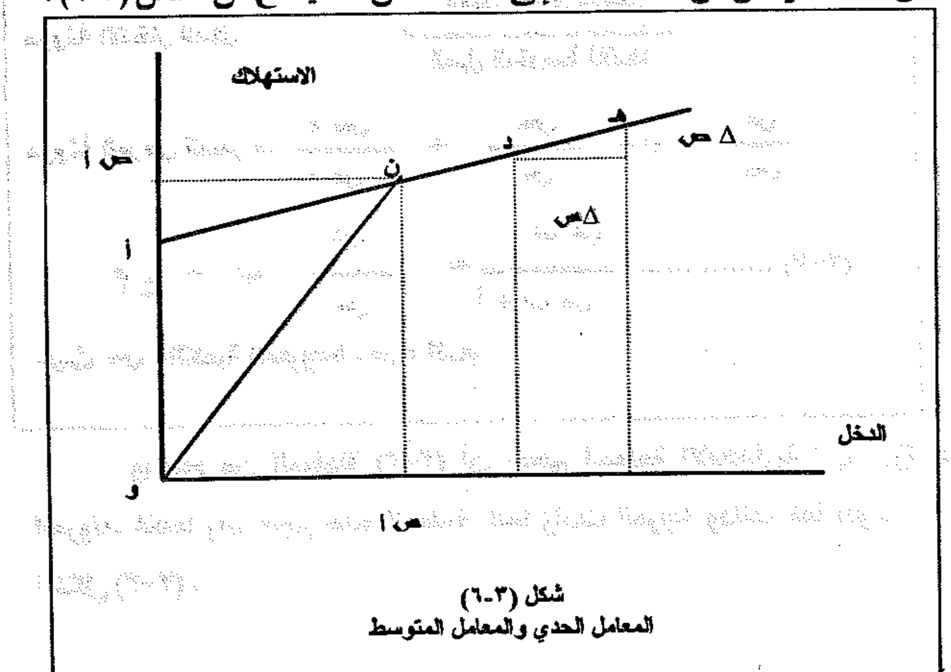
أما عن المعلمة "ب" بالمعادلة (٣-١) فهي تسمى بالمعلمة الانحدارية وتمثل ميل الخط المستقيم الممثل للعلاقة . وهي تشير إلى مقدار التغير في المتغير التابع ص (Y) نتيجة لتغير المتغير المستقل س (X) بوحدة واحدة . أي أن :

المعامل الحدي = التغير في قيمة المتغير التابع / التغير في قيمة المتغير المستقل = ∂ ص / ∂ س ← $b = \frac{\partial Y}{\partial X}$

أما المعامل المتوسط فيتمثل في :

المعامل المتوسط = قيمة المتغير التابع / قيمة المتغير المستقل = ص / س ← $\frac{Y}{X}$

ويلاحظ أن المعامل المتوسط يمكن قياسه عند أي نقطة على خط الانحدار بميل الخط الواصل من هذه النقطة إلى نقطة الأصل كما يتضح من الشكل (٣-٦) .



شكل (٣-٦)
المعامل الحدي والمعامل المتوسط

فالمعامل المتوسط بدالة الاستهلاك عند النقطة ن =ميل الخط ن و= ن ص١ ÷ و س١. أما المعامل الحدي فيتم قياسه بميل الخط المستقيم الممثل للعلاقة بين أي نقطتين عليه مثل Δ ص/ Δ س بين النقطتين هـ ، د بالشكل (٣-٦). والمعامل الحدي بدالة الاستهلاك يمثل الميل الحدي للاستهلاك ، ويمثل المعامل المتوسط الميل المتوسط للاستهلاك . كما أن المعامل الحدي "ب" بدالة الادخار يمثل الميل الحدي للادخار ، ويمثل المعامل المتوسط الميل المتوسط للادخار .

وعموما يلاحظ أن :

$$\text{مرونة المتغير التابع للمتغير المستقل} = \frac{\text{المعامل الحدي}}{\text{المعامل المتوسط}}$$

أي أن :

$$\text{مرونة الاستهلاك للدخل} = \frac{\text{الميل الحدي للاستهلاك}}{\text{الميل المتوسط للاستهلاك}}$$

$$\text{مرونة الادخار للدخل} = \frac{\text{الميل الحدي للادخار}}{\text{الميل المتوسط للادخار}}$$

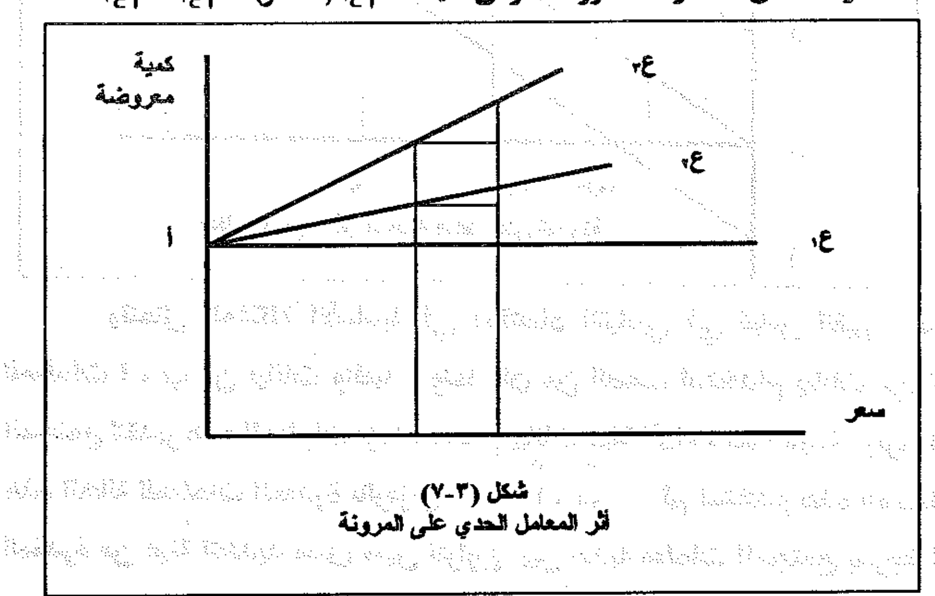
$$\text{مرونة العرض للسعر} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \div \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ب} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{م}_{\text{ع}} = \text{ب} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ب س}}{\text{أ} + \text{ب س}} \quad \text{.............(٣-٢)}$$

حيث ص =الكمية المعروضة ، س= السعر .

ويتضح من المعادلة (٣-٢) أن حجم المعلمة الانحدارية "ب "يؤثر على المرونة. فكلما زاد حجم هذه المعلمة كلما زادت المرونة وذلك كما هو واضح من الشكل (٣-٧) .

ففي الشكل (٣-٧) نجد أن الخطوط ع١،ع٢،ع٣ تقطع المحور الرأسي في نقطة واحدة هي "أ" ولذلك فان المعلمة التقاطعية واحدة بالنسبة لها . ولكن المعلمة الانحدارية "ب" تختلف فيما بينها ، الأمر الذي يؤدي لاختلاف ميل كل منها . ويلاحظ أنه كلما زاد الميل كلما زادت مرونة العرض حيث : م ع١ (=صفر) < م ع٢ < م ع٣ < ....



شكل (٣-٧)
أثر المعامل الحدي على المرونة

كما أن تغير المعلمة الناقلة يؤثر على حجم المرونة . فمن المعادلة (٣-٢) نجد أنه :

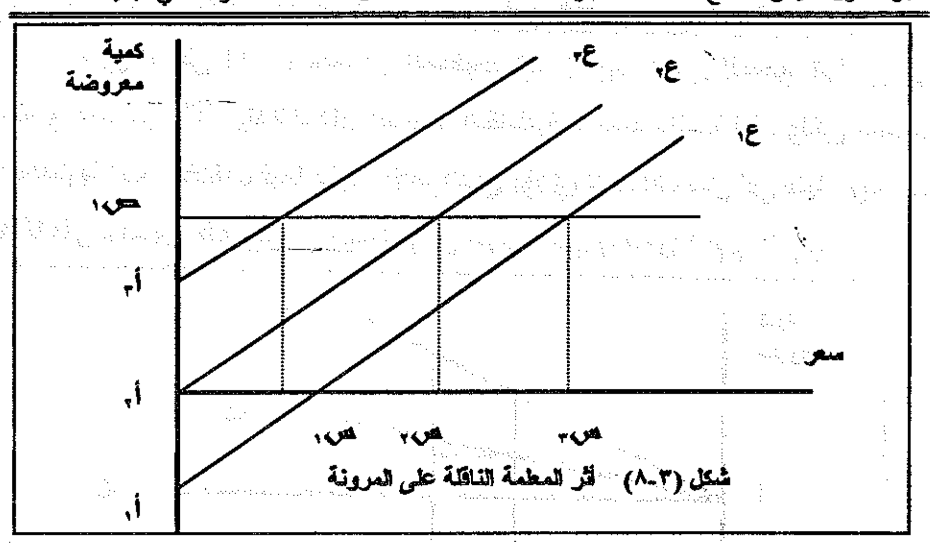
إذا كانت أ < صفر ، فان المقام < البسط ، ومن ثم م ع > ١

وإذا كانت أ > صفر ، فان المقام > البسط ، ومن ثم م ع < ١

وإذا كانت أ = صفر ، فان المقام = البسط ، ومن ثم م ع = ١

ولعل هذا يتضح من الشكل (٣-٨) . ففي الشكل (٣-٨) نلاحظ أن خطوط العرض المتوازية تختلف في قيمة المعلمة الناقلة ، حيث أ١ < أ٢ < أ٣ ولكنها تتساوى في المعلمة الانحدارية . ولذا فان مرونة العرض تختلف من خط عرض لآخر حيث :

م ع٣ < م ع٢ < م ع١ . ولعل هذا يرجع لاختلاف المعامل المتوسط بينهم .



شكل (٣-٨) أثر المطمة الناقلة على المرونة

وتتمثل المشكلة الأساسية في الاقتصاد القياسي في قياس القيم الرقمية للمعلمات أ ، ب من بيانات واقعية . ولما كان من الصعب استخدام بيانات عن كل المجتمع لتقدير هذه المعلمات فإننا نستخدم بيانات عينة لأداء هذه المهمة . ونرمز في هذه الحالة للمعلمات المقدرة بالرمزين $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ثم نستخدم هذه المعلمات المقدرة من عينة لتحديد مدى معين تتراوح بين حديه معلمات المجتمع بدرجة ثقة معينة . وفي الصفحات التالية من هذا الفصل سوف نستخدم أسلوب الانحدار الخطي البسيط في قياس إحدى العلاقات الاقتصادية وهي العلاقة بين الاستهلاك والدخل أو ما يعرف بدالة الاستهلاك ، وذلك كنموذج لتقدير علاقة انحدار خطي بسيط.

ولما كان البحث القياسي لأي مشكلة يمر بعدد من المراحل أهمها تعيين النموذج ، وتقدير النموذج ، وتقييم النموذج ، فسوف يتم التركيز في هذا الفصل على مرحلتين أساسيتين عند تطبيقنا لأسلوب الانحدار على دالة الاستهلاك نتناولهما في ثلاثة مباحث ، على أن نتعرض للمرحلة الثالثة وهي تقييم النموذج في الفصل الرابع :

المبحث الأول : تعيين نموذج الاستهلاك .

المبحث الثاني : تقدير دالة الاستهلاك .

المبحث الثالث : القيم الخارجة .

المبحث الأول

تعيين نموذج الاستهلاك

يعني تعيين النموذج عدد محدد من الخطوات كما سبق وأوضحنا : أولها تحديد متغيرات النموذج ، وثانيها تحديد الشكل الرياضي للنموذج ، وثالثها تحديد التوقعات القبلية لمعلمات النموذج ، ورابعها تعيين شكل الحد العشوائي. وسوف نشرح كل خطوة من هذه الخطوات بالتطبيق على نموذج الاستهلاك فيما يلي :

(٣-١-١) تحديد المتغيرات :

تفترض النظرية الكينزية وجود علاقة طردية بين مستوى الاستهلاك وحجم الدخل ، حيث توضح هذه النظرية أنه كلما زاد الدخل كلما زاد الاستهلاك ، والعكس صحيح . وهذا يعني أن هذه النظرية تعتبر الدخل أحد المحددات الأساسية للاستهلاك. ومن ناحية أخرى تشير النظرية الكلاسيكية إلى أن سعر الفائدة هو عائد الادخار ، ومن ثم يستنبط من ذلك أن سعر الفائدة يؤثر تأثيرا سلبيا على الاستهلاك ، حيث كلما ارتفع سعر الفائدة كلما زاد الادخار وانخفض الاستهلاك مع ثبات الدخل . كما تشير المشاهدات الواقعية إلى وجود علاقة طردية بين توقعات الأسعار ومستوى الاستهلاك . فإذا توقع الأفراد ارتفاع الأسعار في المستقبل بدرجة كبيرة فانهم يزيدون الطلب على السلع الاستهلاكية في الوقت الحاضر خاصة القابلة للتخزين منها . وتشير بعض الدراسات السابقة إلى وجود علاقة بين توزيع الدخل ومستوى الاستهلاك ، فإعادة توزيع الدخل في صالح الطبقة الفقيرة وفي غير صالح الطبقة الغنية تزيد من مستوى الاستهلاك الكلي وذلك باعتبار أن الميل الحدي للاستهلاك لدى الطبقة الفقيرة أعلى منه لدى الطبقة الغنية . ولعل هذا يعني أن المصادر المختلفة تشير إلى أن المتغيرات التي يحتوي عليها نموذج الاستهلاك تتمثل في :

المتغير التابع : الإنفاق الاستهلاكي = ص = (Y)

المتغيرات المستقلة :

الدخل = س (X)

سعر الفائدة = ف (r)

مستوى الأسعار المتوقع = ث (P)

توزيع الدخل = ت (E)

أي أن دالة الاستهلاك تأخذ الصيغة العامة التالية :

ص= د (س ، ف ، ث ، ت)← $Y = f(X, r, P, E)$

ولكن ليست كل المتغيرات التفسيرية على نفس الدرجة من الأهمية . فهناك بعض الدراسات السابقة التي أوضحت أن كل من سعر الفائدة وتوزيع الدخل والأسعار المتوقعة من العوامل قليلة الأهمية في التأثير على مستوى الاستهلاك. ولذلك في محاولة منا للتبسيط سوف نسقط هذه المتغيرات ونركز على الدخل كأهم متغير تفسيري في دالة الاستهلاك . ومن ثم فان نموذج الاستهلاك البسيط يأخذ الصيغة التالية :

ص = د (س) ← $Y = f(X)$

(٣-١-٢) تحديد الشكل الرياضي للنموذج

يوجد هناك أكثر من شكل رياضي يمكن استخدامه لقياس العلاقة الخطية بين الاستهلاك والدخل . ويمكن التفرقة في هذا الصدد بين صيغتين :

(١) دالة الاستهلاك الخطية غير النسبية ، وهي تأخذ الصيغة التالية :

ص= أ + ب س← $Y = a + bX$ ....(٣-٣)

حيث : ص(Y) = الإنفاق الاستهلاكي ، س (X) = الدخل .

ويلاحظ في هذه الحالة أن كل زيادة في الدخل بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الاستهلاك بمقدار ثابت = ب (b) . ويمثل هذا المقدار ما يسمى الميل الحدي للاستهلاك. أي أن ميل دالة الاستهلاك ثابت ، ولذا فإنها دالة خطية يمكن تمثيلها بالشكل (٣-١) .

ولكن خطية دالة الاستهلاك تتضمن أن الميل الحدي للاستهلاك لدى أصحاب الدخول المرتفعة يساوي نظيره لدى أصحاب الدخول المنخفضة ، حيث أن الميل الحدي للاستهلاك لا يتغير بتغير الدخل كما يوضح الشكل (٣-٩) .

الميل الحدي للاستهلاك

ب

الدخل

شكل (٣-٩)
الميل الحدي للاستهلاك بدالة خطية

ومن ثم فإن إعادة توزيع الدخل في صالح الطبقة الفقيرة وفي غير صالح الطبقة الغنية لا يؤثر على مستوى الاستهلاك وفقا لدالة الاستهلاك الخطية الموضحة بالمعادلة (٣-٣) .

ومن ناحية أخرى يلاحظ أن دالة الاستهلاك كما هي مصاغة في المعادلة (٣-٣) تعتبر دالة غير نسبية ، حيث تؤدي الزيادة في الدخل بنسبة معينة إلى زيادة الاستهلاك بنسبة أقل . أي أن النسبة المنفقة من الدخل على الاستهلاك (الميل المتوسط للاستهلاك) تتناقص مع الزيادة في الدخل . ويمكن إيضاح ذلك بقسمة طرفي المعادلة (٣-٣) على س فنحصل على :

$$\frac{ص}{س} = \frac{أ}{س} + ب \quad .... (٣-٤)$$

ومن المعادلة (٣-٤) يتضح أنه كلما زاد الدخل كلما انخفضت النسبة التي تمثل الميل المتوسط للاستهلاك ، وهذا لا يحدث بالطبع إلا إذا كانت نسبة الزيادة في الاستهلاك

أقل من نسبة الزيادة في الدخل . ولعل هذا يعني أن النسبة التي ينفقها الأغنياء (أصحاب الدخول المرتفعة) من دخولهم على الاستهلاك أقل من النسبة التي ينفقها الفقراء (أصحاب الدخول المنخفضة) .

ويلاحظ أن مرونة الاستهلاك للدخل < ١ ، حيث :

$$\text{مرونة الاستهلاك للدخل} = \frac{\text{الميل الحدي للاستهلاك}}{\text{الميل المتوسط للاستهلاك}} = \frac{\text{ب}}{(\text{أ}+\text{ب س})/\text{س}} = \frac{\text{ب س}}{\text{أ}+\text{ب س}} < ١$$

(٢) دالة الاستهلاك النسبية وهي تأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ص} = \text{ب س} \longrightarrow Y = b\,X \qquad (٣\text{-}٥)$$

ويلاحظ أن دالة الاستهلاك كما تمثلها المعادلة (٣-٥) تعتبر دالة خطية أيضا حيث أن ميلها الذي يتمثل في الميل الحدي للاستهلاك = ب (b)= ثابت ، ولا يتغير بتغير الدخل.

غير أن الفرق بين الصيغة (٣-٣) ، والصيغة (٣-٥) ينحصر فيما يلي :

(أ) أن الحد الثابت (المعلمة التقاطعية) في الصيغة (٣-٥) = صفر ، وهذا يعني أنه إذا انخفض الدخل للصفر ينخفض الاستهلاك للصفر . هذا في حين أن المعلمة التقاطعية في الصيغة (٣-٣) موجبة ، الأمر الذي يعني أن هناك حداً أدنى من الإنفاق الاستهلاكي لابد أن يقوم به المجتمع حتى لو انخفض الدخل للصفر ، وهو يتمثل في المعلمة أ .

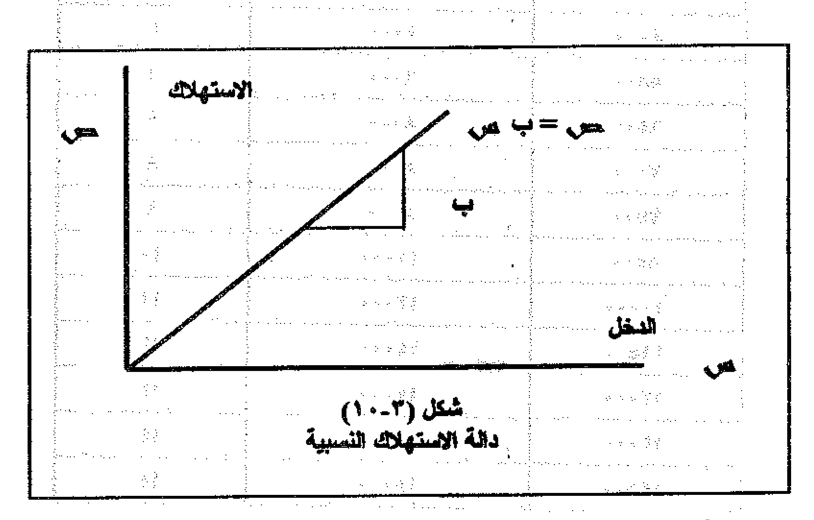
(ب) أن دالة الاستهلاك كما هي موضحة في الصيغة (٣-٥) تعتبر دالة نسبية ، حيث إذا زاد الدخل بنسبة معينة يزداد الاستهلاك بنفس النسبة ، الأمر الذي يعني أن تظل النسبة المنفقة من الدخل على الاستهلاك ثابتة مهما تغير الدخل . ويتضح هذا بقسمة طرفي المعادلة (٣-٥) على س فنحصل على : ص / س = ب = ثابت . هذا في حين أن الميل المتوسط للاستهلاك في حالة الدالة (٣-٣) غير ثابت .

(جـ) يتضح من الصيغة النسبية (٣-٥) أن الميل الحدي للاستهلاك = الميل المتوسط

للاستهلاك = ب = ثابت . ومن ثم فان مرونة الاستهلاك للدخل تساوي الواحد . هذا في حين أن مرونة الاستهلاك للدخل في حالة الصيغة غير النسبية (٣-٣) أقل من الواحد.

(د) لقد اتضح من الدراسات التطبيقية السابقة أن الصيغة (٣-٣) تصف العلاقة بين الاستهلاك والدخل بطريقة أفضل عند استخدام بيانات قطاعية أو بيانات سلسلة زمنية لفترة قصيرة نسبيا . ولعل هذا يعني أن الدالة غير النسبية تصف علاقة الاستهلاك بالدخل بصورة أفضل في الفترة القصيرة ، ولذا ينظر إليها على أنها دالة استهلاك في الأجل القصير . كما اتضح أيضا من الدراسات التطبيقية السابقة أن الصيغة (٣-٥) تصف العلاقة بين الاستهلاك والدخل بطريقة أفضل عند استخدام بيانات سلسلة زمنية لفترة طويلة . وهذا يعني أن دالة الاستهلاك النسبية أكثر ملائمة لقياس العلاقة بين الاستهلاك والدخل في الفترة الطويلة . فالمجتمع الذي لا ينتج في الفترة الطويلة يموت ، ولذلك عندما ينخفض الدخل للصفر ينخفض الاستهلاك للصفر .

ومما سبق يمكن توضيح شكل دالة الاستهلاك النسبية كخط نابع من نقطة الأصل ذو ميل ثابت وأقل من الواحد كما هو واضح بالشكل (٣-١٠) :



شكل (٣-١٠)
دالة الاستهلاك النسبية

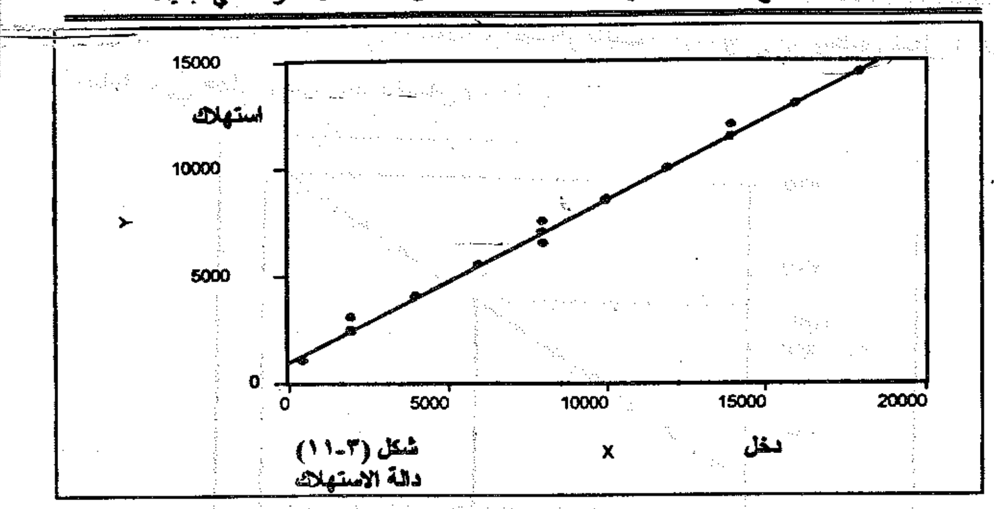
وحتى نحدد أي شكل من الأشكال الرياضية أكثر ملائمة لقياس علاقة الاستهلاك مع الدخل يتعين علينا الاسترشاد بشكل الانتشار المبني على أساس البيانات الواقعية المراد

استخدامها في قياس العلاقة . فإذا افترضنا أن البيانات التي تم جمعها تخص عينة من الأسر المسحوبة من قطاعات مختلفة من المجتمع عام ١٩٩٥ ، وكانت كما هي موضحة بالجدول (٣-١) ، فان شكل الانتشار (٣-١١) يوضح العلاقة بين الاستهلاك والدخل كما تصفها بيانات الجدول . ومن الملاحظ أن معظم نقاط شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ، ولذلك فان أكثر الصيغ ملائمة لتقدير علاقة الاستهلاك هي الصيغة الخطية . وحيث أن البيانات المستخدمة في التقدير هي بيانات قطاعية فان صيغة الدالة غير النسبية أكثر ملائمة من الصيغة النسبية . ونخلص مما سبق إلى أن الصيغة (٣-١) هي الأكثر ملائمة لتقدير دالة الاستهلاك في هذه الحالة .

جدول (٣-١)

الإنفاق الاستهلاكي والدخل لعينة من الأسر

رقم الأسرة	الدخل النقدي السنوي	الإنفاق الاستهلاكي
١	٥٠٠	١٠٠٠
٢	٢٠٠٠	٢٢٠٠
٣	٢٠٠٠	٢٥٠٠
٤	٢٠٠٠	٣٠٠٠
٥	٤٠٠٠	٤٠٠٠
٦	٦٠٠٠	٥٥٠٠
٧	٨٠٠٠	٦٥٠٠
٨	٨٠٠٠	٧٠٠٠
٩	٨٠٠٠	٧٥٠٠
١٠	١٠٠٠٠	٨٥٠٠
١١	١٢٠٠٠	١٠٠٠٠
١٢	١٤٠٠٠	١١٥٠٠
١٣	١٤٠٠٠	١٢٠٠٠
١٤	١٦٠٠٠	١٣٠٠٠
١٥	١٨٠٠٠	١٤٥٠٠



شكل (٣-١١)
دالة الاستهلاك

(٣-١-٣) تحديد التوقعات القبلية للمعلمات

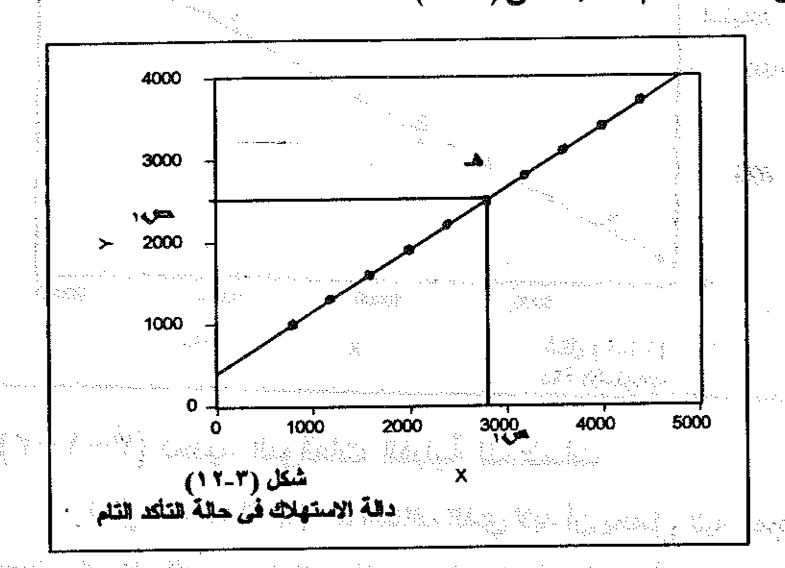
تمثل المعلمة "أ" (a) حد الكفاف الذي لابد أن يحصل عليه المجتمع حتى إذا انخفض الدخل للصفر ، ولذلك فانه من المتوقع أن تكون أ > صفر . وتمثل المعلمة الانحدارية ب (b) الميل الحدي للاستهلاك ، ومن المتوقع أن تكون صفر < ب < ١ . فهي أكبر من الصفر لأن العلاقة بين الاستهلاك والدخل من المتوقع أن تكون طردية ، وأقل من الواحد لأن الزيادة في الدخل تتوزع بين زيادة في الاستهلاك وزيادة في الادخار . كما أنه من المتوقع أن تكون مرونة الاستهلاك للدخل أقل من الواحد ، حيث أن الميل الحدي للاستهلاك < الميل المتوسط في حالة دالة الاستهلاك غير النسبية .

(٣-١-٤) تعيين الحد العشوائي

يلاحظ أن الصيغة المعينة سابقا لدالة الاستهلاك والتي تتمثل في :

ص = أ + ب س ، لا تحتوي على حد عشوائي . ولعل هذا يعني أننا ننظر للعلاقة بين الاستهلاك والدخل على أنها علاقة مؤكدة ، حيث أن كل التغيرات في ص ترجع بكاملها للتغيرات في س . ولو أن هذا صحيحا لكان كل تغير في الدخل بوحدة واحدة

(Δ س = ١) يصحبه تغير في الاستهلاك بمقدار ثابت = ب ، ومن ثم ينطبق شكل الانتشار تماماً على خط مستقيم كما بالشكل (٣-١٢) .



شكل (٣-١٢)
دالة الاستهلاك فى حالة التأكد التام

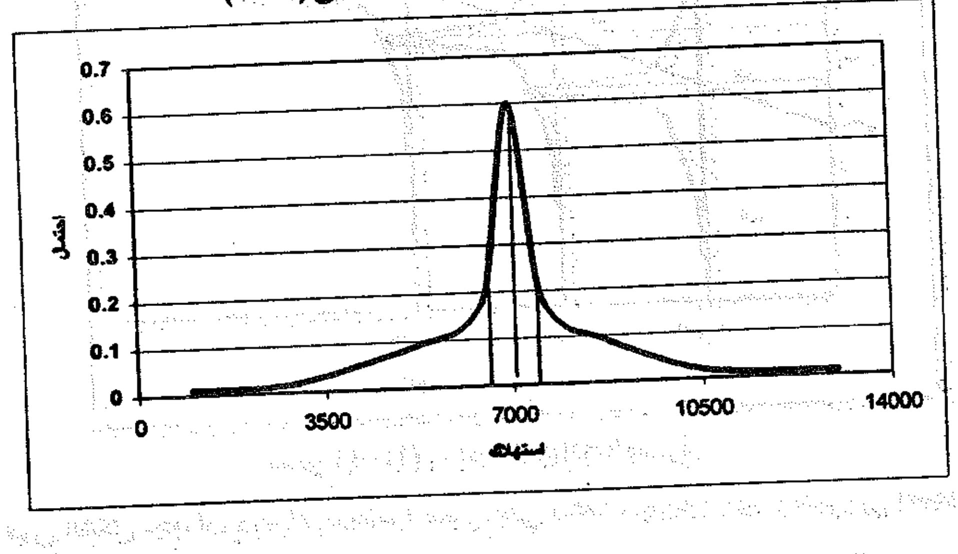
وفي هذه الحالة نجد أنه عندما يكون الدخل س١ يوجد مستوى استهلاك واحد هو ص١، وهذا يعني أن كل فرد دخله س١ لابد أن يكون مستوى استهلاكه هو ص١ . أي أن ١٠٠ ٪ من الأفراد ذوي الدخل س١ مستوى استهلاكهم ص١ ، وهكذا الأمر عند مستويات الدخل الأخرى . وهذا يشير إلى تأكد العلاقة بين الاستهلاك والدخل .ولكن في الواقع العملي لا يكون الأمر هكذا . فإذا افترضنا أن من بين أفراد المجتمع هناك ١٠ أفراد دخل كل واحد منهم ٨٠٠٠ جنيه، فليس بالضرورة أن يكون استهلاك كل واحد منهم متساوي مع الآخر يساوي ٧٠٠٠ جنيه مثلا . فمن المتوقع أن يكون ستة مثلا استهلاك كل واحد منهم ٧٠٠٠ جنيه ، وإثنين استهلاك كل واحد منهما ٦٥٠٠ جنيه ، والإثنين الآخرين استهلاك كل واحد منهما ٧٥٠٠ جنيه . أي أن التوزيع التكراري للاستهلاك عند الدخل ٨٠٠٠ يكون كما بالجدول (٣-٢) .

جدول (٣-٢)

التوزيع التكراري للاستهلاك عند الدخل ٨٠٠٠ جنيه

استهلاك	تكرار	تكرار نسبي
٦٥٠٠	٢	٢٠٪
٧٠٠٠	٦	٦٠٪
٧٥٠٠	٢	٢٠٪
مجموع	١٠	١٠٠٪

ووفقا لذلك نجد أنه ليس من المؤكد أن يكون الاستهلاك ٧٠٠٠ جنيه عندما يكون الدخل ٨٠٠٠ جنيه ، ولكن هناك احتمالا ٦٠ ٪ أن يكون الاستهلاك ٧٠٠٠ عندما يكون الدخل ٨٠٠٠ جنيه . وهذا يعني أن العلاقة بين الاستهلاك والدخل علاقة احتمالية في الواقع . ويمكن أن نعبر عن هذه العلاقة الاحتمالية بالشكل (٣-١٣).

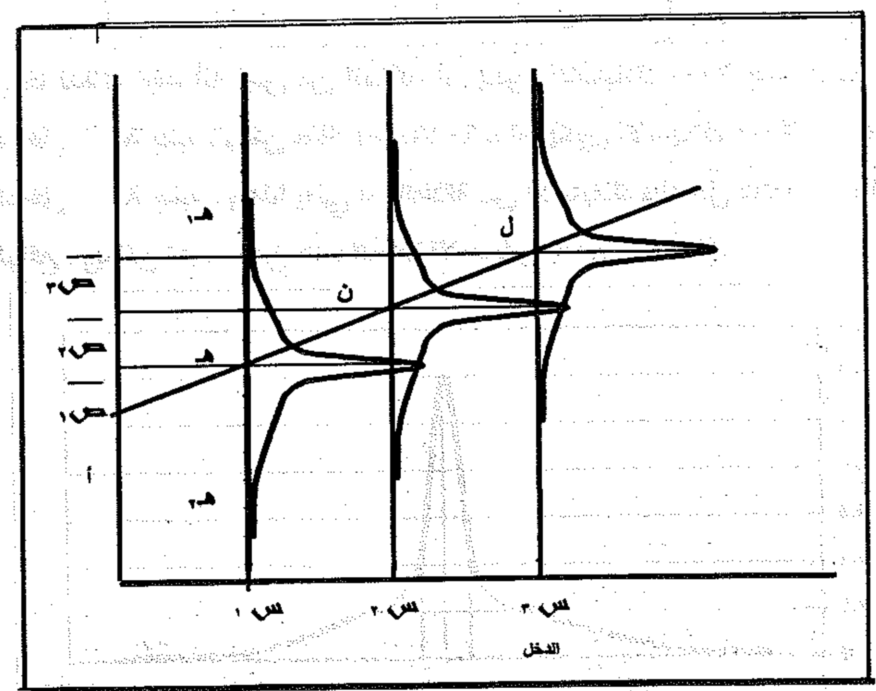


شكل (٣-١٣)

التوزيع الاحتمالي للاستهلاك عند الدخل ٨٠٠٠

وهكذا نتوقع أن يأخذ الاستهلاك توزيعا احتماليا عند كل مستويات الدخل الأخرى كما هو الحال بالشكل (٣-١٣) . ولكن إذا كنا نبحث عن قيمة واحدة

للاستهلاك عند كل مستوى للدخل ، فان القيمة الأكبر احتمالا أو الأكثر توقعا هي القيمة المتوسطة لأنها صاحبة أكبر احتمال وذلك بافتراض أن التوزيع الشائع هو التوزيع المعتدل . ولذلك تسمى القيمة المتوسطة بالقيمة المتوقعة . وفي مثالنا السابق عندما يكون الدخل ٨٠٠٠ فانه من المتوقع أن يكون الاستهلاك ٧٠٠٠ . ولذلك عندما نقوم بتقدير دالة الاستهلاك من بيانات واقعية فإنها تكون دالة احتمالية . ويمكن توضيح ذلك باستخدام الشكل (٣-١٤) .



شكل (٣-١٤) : دالة الاستهلاك المقدرة

فمن الشكل نجد أن دالة الاستهلاك المقدرة هي دالة احتمالية ، حيث تشير إلى القيمة الأكبر احتمالا للاستهلاك (وهي القيمة المتوسطة $\bar{ص}$) عند مستويات الدخل المختلفة . فعند مستوى الدخل $س_1$ نجد أن القيمة الأكبر احتمالا للاستهلاك هي $\bar{ص}_1$ ، وعند مستوى الدخل $س_2$ نجد أن $\bar{ص}_2$ هي القيمة الأكبر احتمالا للاستهلاك وهكذا. وبتوصيل النقاط هـ ، ن ، ل نحصل على دالة الاستهلاك المقدرة والتي توضح القيم

المتوقعة للاستهلاك عند مستويات الدخل المختلفة . وهكذا يتضح لنا أن القيم $\overline{ص}_1$ ، $\overline{ص}_2$ ، $\overline{ص}_3$ ليست هي القيم الوحيدة للاستهلاك التي يمكن أن تسود عند مستويات الدخل المختلفة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ولكن هي فقط القيم الأكبر احتمالا . فعند مستوى الدخل $س_1$ قد تكون القيم المشاهدة بالواقع للاستهلاك هي $هـ_1$ ، $هـ_2$ بالإضافة إلى هـ . وحيث أن "هـ" هي القيمة المقدرة أو المتوقعة فان هناك انحرافا بين القيمة المقدرة "هـ" والقيم المشاهدة "$هـ_1$، $هـ_2$" . وإذا سمينا خط الانحدار (أل) بالخط المقدر فإننا نجد أن هناك انحرافا بين القيم المشاهدة والخط المقدر . ومثل هذا الانحراف يجعل العلاقة احتمالية . ولذلك فانه يمثل أثر الحد العشوائي بالدالة المقدرة. وهذا يعني أن العلاقة الاحتمالية لابد أن تحتوي على الحد العشوائي (ع) . ومن ثم فان دالة الاستهلاك الاحتمالية يمكن كتابتها في الصورة التالية :

$$ص = أ + ب\, س + ع \leftarrow Y = a + b\,X + u$$

حيث ع (u) تشير إلى الحد العشوائي بالدالة والذي يجعلها احتمالية .

والسؤال الذي يثور الآن . ما هي العوامل التي تحدد حجم الحد العشوائي بالدالة المقدرة ؟ وبمعنى آخر ما هي العوامل التي تؤدي لانحراف القيم المشاهدة عن الخط المقدر أو الخط النظري ؟

يلاحظ في هذا الصدد أن الحد العشوائي كثيرا ما يسمى بالخطأ العشوائي . ويمكن التفرقة بين نوعين من الخطأ العشوائي : (١) خطأ المعادلة (خطأ الحذف) ، (٢) خطأ المشاهدة (خطأ القياس) . وسوف نتعرض لهذين النوعين من الخطأ بنوع من التفصيل في هذا المبحث .

(١) خطأ المعادلة (خطأ الحذف) Equation Error

يشأ مثل هذا الخطأ عن بعض العوامل التي تؤدي لاختلاف شكل المعادلة المستخدمة في التقدير عن المعادلة الحقيقية التي تمثل العلاقة الصحيحة . ومن أهم العوامل التي تؤدي إلى اقتراف مثل هذا الخطأ ما يلي :

أ- حذف بعض المتغيرات . ففي حالات كثيرة يحذف الباحث بعض المتغيرات من النموذج رغم أهميتها في تفسير الظاهرة محل البحث . ويرجع هذا ربما لعدم معرفة الباحث بهذه المتغيرات نظرا لعدم ذكرها في النظرية ، ويسمى هذا بعدم كمال النظرية. وفي حالات أخرى قد تكون هناك بعض المتغيرات التي تؤثر في الظاهرة ولكنها غير قابلة للقياس ، مثال ذلك الأذواق والتوقعات والجنس والدين . أو قد توجد هناك بعض المتغيرات العشوائية التي لا يمكن التنبؤ بحدوثها مسبقا مثل حدوث الأوبئة أو الزلازل والبراكين . وقد تكون هناك بعض المتغيرات المعروفة للباحث والقابلة للقياس ولكن البيانات المتاحة عنها غير كافية أو غير دقيقة . وكل هذه أسباب تؤدي بالباحث إلى أن يحذف بعض المتغيرات الهامة التي تؤثر في الظاهرة . ونتيجة لمثل هذا الحذف فان الدالة المستخدمة في القياس ربما تكون مختلفة عن العلاقة الصحيحة .

ب – عدم كمال تعيين الشكل الرياضي للنموذج . قد يفترض الباحث أن العلاقة محل الدراسة علاقة خطية في حين أنها في الواقع غير خطية أو العكس . أو قد يسقط بعض المعادلات من النموذج بدون مبرر من أجل تبسيط حجم النموذج ، هذا في الوقت الذي تكون فيه الظاهرة معقدة وتحتوي على علاقات عديدة يصعب إدراجها في معادلة واحدة . ومثل هذه المشكلة تسمى بمشكلة التعيين .

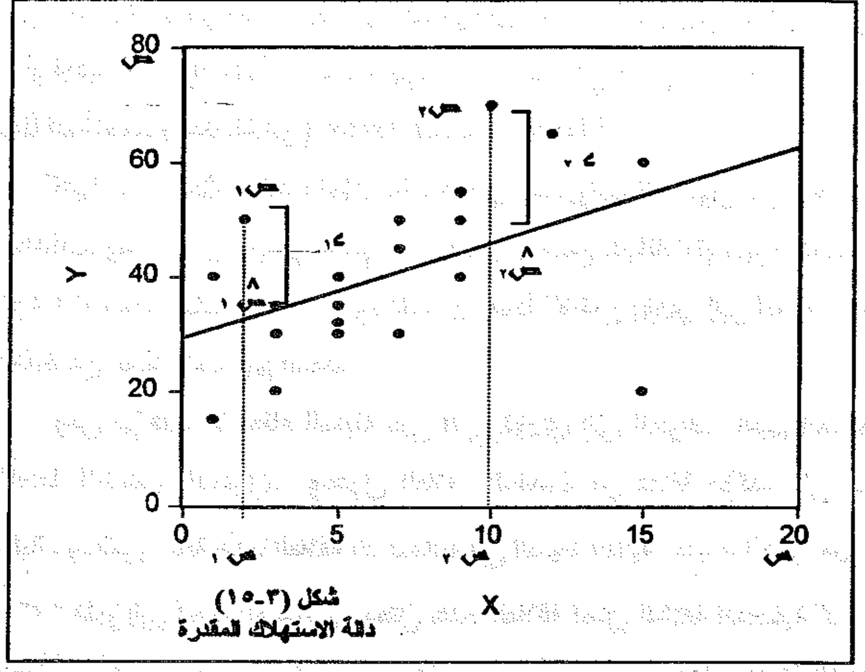
جـ- أخطاء التجميع . عند استخدام بيانات تجميعية كالتي تخص الدخل الكلي ، والاستهلاك الكلي والادخار الكلي ، فان هذه البيانات تعبر فقط عن مجموع المقادير المتعلقة بالأفراد دون أن تعكس الاختلافات المتعلقة بنوعية هذه المقادير أو بهيكل توزيعها ، رغم أن هذه الاختلافات تؤثر في الظاهرة محل البحث . فتساوي مجموع الدخل القومي لبلدين متساويين في عدد السكان لا يعني تساوي درجة الرفاهية الاقتصادية بهما ، حيث أن توزيع الدخل بين الأفراد ربما يكـون مختلفا في كل منهما . كما أن عملية تجميع الناتج الكلي للمشروعات المختلفة تهمل ما لهيكل هذا الناتج من أثر ، مثال ذلك نسبة الصناعات التحويلية إلى الصناعات الإستخراجية من الناتج ، أو توزيع الناتج بين سلع استهلاكية وإنتاجية . فلا شك أن اختلاف هيكل الناتج رغم ثبات

قيمته يؤثر على الظواهر الاقتصادية . وباختصار فان عملية التجميع تسقط أثر التغير في هيكل أو نوعية المتغيرات التجميعية مما يترتب عليه خطأ في شكل المعادلة.

(٢) خطأ المشاهدة (خطأ القياس) Measurement Error

كثيراً ما تحدث هناك أخطاء عند قياس المتغيرات للحصول على ما يسمى بالمشاهدات، وهذا قد يرجع إلى عدم كمال أساليب جمع البيانات أو نتيجة للخطأ عند المعالجة الإحصائية لهذه البيانات . ولاشك أن خطأ القياس يؤدي إلى انحراف القيم المشاهدة عن الخط المستقيم المقدر .

ومن ثم فان الأخطاء السابقة هي التي تؤدي إلى انحراف القيم المشاهدة عن الخط المستقيم النظري، وتحول العلاقة المقدرة من علاقة مؤكدة إلى علاقة احتمالية . ويمكن كتابة هذه العلاقة الاحتمالية في الصيغة التالية : ص = أ + ب س + ع، حيث "ع" تشير إلى الحد العشوائي . ومثل هذه العلاقة تمثل العلاقة الحقيقية كما هي في الواقع ، وهي تتكون من جزأين : جزء يمكن تفسيره من خلال معادلة الانحدار (أ + ب س) وجزء آخر يتم تفسيره بالمتغير العشوائي (ع) . ويمكن توضيح ذلك من الشكل (٣-١٥) .



شكل (٣-١٥)
دالة الاستهلاك المقدرة

ويمثل شكل الانتشار (٣-١٥) العلاقة بين الاستهلاك والدخل كما تم مشاهدتها في الواقع ، حيث أن هذا الشكل مبني على أساس بيانات واقعية . ويوضح خط الانحدار ذلك الجزء من المتغير التابع (ص) الذي يمكن تفسيره بدلالة المتغير المستقل المنتظم (س) . فعندما تكون قيمة المتغير المستقل هي س١ مثلا فان القيمة المتوقعة للمتغير التابع تكون هي ص̂١ كما يحددها خط الانحدار والجزء الباقي من ص وهو "ع١"(ع١ = ص١ – ص̂١) يرجع للمتغير العشوائي . أي أن : ص١ = ص̂١ + ع١ . وهكذا بالنسبة لكل قيمة مشاهدة من قيم (ص) يوجد جزء منها يرجع للمتغير المنتظم س وجزء آخر يرجع للمتغير العشوائي ع . أي أنه بوجه عام يمكن القول :

ص ر = ص̂ر + ع ر ← $Y_i = \hat{Y}_i + u_i$

وحيث أن : ص̂ر = أ̂ + ب̂ س ر تمثل خط الانحدار

∴ ص ر = (أ̂ + ب̂ س ر) + ع ر ← $Y_i = \hat{a} + \hat{b} X_i + u_i$

أي أن : التغير في الاستهلاك = تغير منتظم يرجع للدخل + تغير عشوائي

ولكن إذا كان ليس من الممكن قياس المتغيرات العشوائية في قيم محددة فكيف يمكن تمثيلها في معادلة انحدار بالحد (ع) وكيف يمكن التعامل معها إحصائيا عند القياس ؟

وفي هذا الصدد يتم وضع عدد من الافتراضات الخاصة بشكل المتغير العشوائي حتى يمكن التعامل معه إحصائيا ، ومثل هذه الافتراضات قد تكون مطابقة للواقع وقد لا تكون . ولاشك أنه بقدر مطابقتها للواقع بقدر ما يكون قياسنا للعلاقة محل البحث أكثر دقة . ويسمى تحديد شكل المتغير العشوائي من خلال هذه الافتراضات تعيين الحد العشوائي . و سوف نتعرض لهذه الافتراضات في الجزء الخاص بتقدير النموذج .

المبحث الثاني

تقدير دالة الاستهلاك

بعد الانتهاء من مرحلة تعيين النموذج بخطواتها المختلفة ، تأتي مرحلة تقدير النموذج . وفي هذه المرحلة يتم قياس القيم الرقمية لمعلمات النموذج . وفي هذا الخصوص يتعين علينا التفرقة بين العلاقة الحقيقية والعلاقة المقدرة . فالعلاقة الحقيقية هي التي يمكن الحصول عليها عند جمع بيانات عن كل القيم الممكنة لمجتمع المتغيرات ص ، س وهي تتمثل في الصيغة التالية:

ص ر = أ + ب س ر + ءر ← $Y_i = a + bX_i + u_i$

ومن ثم فان خط الانحدار الحقيقي الذي يمثل هذه العلاقة هو :

ص ر = أ + ب س ر ← $Y_i = a + bX_i$

أما عن العلاقة المقدرة فهي التي يمكن الحصول عليها من بيانات عينة ، وتتمثل في الصيغة التالية :

ص ر = أ̂ + ب̂ س ر + د ر ← $Y_i = \hat{a} + \hat{b} X_i + e_i$

ومن ثم فان خط العلاقة المقدرة الذي يمثل هذه العلاقة يتمثل في :

ص̂ ر = أ̂ + ب̂ س ر ← $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b} X_i$

حيث :

ص̂ ر = القيمة المقدرة للمتغير التابع بدلالة المتغير س = $\hat{Y}_i$

أ̂ = القيمة المقدرة للمعلمة الناقلة أ = $\hat{a}$

ب̂ = القيمة المقدرة للمعلمة الانحدارية ب = $\hat{b}$

د ر = القيمة المقدرة للحد العشوائي ء ر = e_i

وتمر مرحلة تقدير النموذج بعدد من الخطوات سوف نركز على إثنين منها في هذا المبحث :

(٣-٢-١) تجميع البيانات لنموذج الاستهلاك .

(٣-٢-٢) اختيار طريقة القياس الملائمة .

ثم نختتم المبحث بالتعرض لنقطة ثالثة هي :

(٣-٢-٣) الفرق بين الارتباط و الانحدار .

(٣-٢-١) تجميع البيانات لنموذج الاستهلاك

حتى يمكن تقدير نموذج الانحدار الذي تم تعيينه في المرحلة السابقة لابد من توافر بيانات عن متغيرات هذا النموذج وهي ص، س ، ع . وسوف نتعرض في هذه المرحلة لأهم المشاكل التي تواجهنا عند جمع بيانات عن هذه المتغيرات .

أولا: مشاكل متعلقة بجمع بيانات عن الاستهلاك والدخل

(١) هل نستخدم بيانات عن الدخل الحقيقي أم عن الدخل النقدي ؟

يلاحظ عموما أنه في غياب ظاهرة الوهم النقدي فان الدخل الحقيقي وليس النقدي هو المحدد الأساسي لمستوى الاستهلاك . فإذا زاد الدخل النقدي بنسبة معينة وزاد المستوى العام لأسعار التجزئة بنفس النسبة فان مستوى الاستهلاك الحقيقي لا يتغير نظرا لثبات الدخل الحقيقي . بل أكثر من هذا ، إذا ظل الدخل النقدي ثابتا وارتفع المستوى العام للأسعار ، فان الدخل الحقيقي سوف ينخفض ومن ثم مستوى الاستهلاك. وهذا يعني أنه يتعين جمع بيانات عن الدخل النقدي و الإنفاق الاستهلاكي ثم القيام بتحويلها إلى قيم حقيقية باستخدام المستوى العام لأسعار التجزئة قبل استخدامها في تقدير دالة الاستهلاك . فإذا افترضنا أن ث (P) هو الرقم القياسي لأسعار التجزئة فان العلاقة التي يتعين تقديرها تصبح كما يلي :

$$\frac{ص}{ث} = أ + ب \frac{س}{ث} + ع \quad ....(٣-٦)$$

$$\frac{Y}{P} = a + \frac{X}{P} + u$$

حيث : ص = الإنفاق الاستهلاكي النقدي = Y

س = الدخل النقدي =X

$\frac{ص}{ث}$ = القيمة الحقيقية للإنفاق الاستهلاكي = $\frac{Y}{P}$

$\frac{س}{ث}$ = الدخل الحقيقي = $\frac{X}{P}$

وبضرب المعادلة (٣-٦) في ث نحصل على :

ص = ث أ + ب س + ع١ ....(٣-٧)

$$Y = Pa + bX + u_1$$

ومن هذه المعادلة يلاحظ أن الإنفاق النقدي على الاستهلاك ليس دالة في الدخل النقدي وحده (س) بل في مستوى الأسعار أيضا (ث) . وعموما فان استخدام بيانات عن الدخل النقدي والإنفاق النقدي على الاستهلاك لتقدير دالة استهلاك غير نسبية يعطي نتائج مختلفة عنها عندما نستخدم نفس البيانات بعد تعديلها لقيم حقيقية . ويمكن توضيح ذلك من المثال (٣-١) المعطي بالجدول (٣-٣) .

مثال (٣-١)
القيم النقدية والقيم الحقيقية

افترض أن البيانات التالية تعبر عن الدخل والإنفاق الاستهلاكي على الكماليات ومستوى الأسعار لعدد من الدول عند نقطة زمنية معينة .

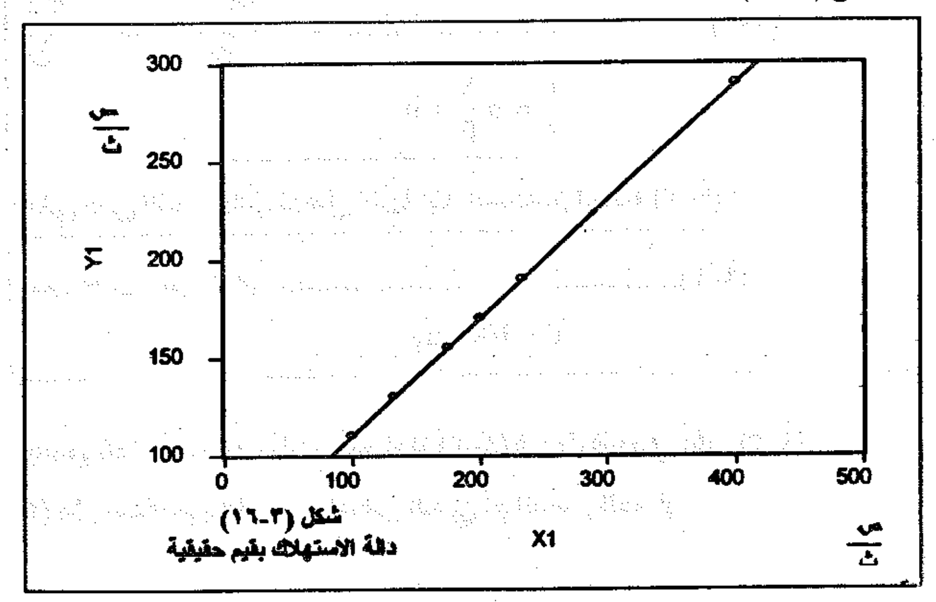
جدول (٣-٣)

تعديل القيم النقدية إلى قيم حقيقية

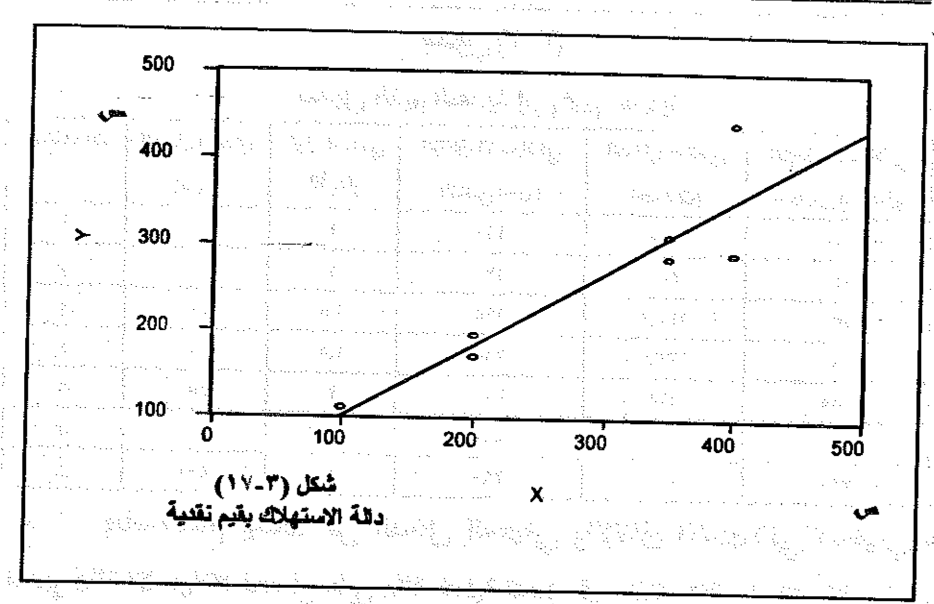
المشاهدات	الدخل النقدي (ص)	الرقم القياسي للأسعار	الإنفاق الاستهلاكي النقدي (س)	الدخل الحقيقي (ص / ث)	الإنفاق الاستهلاكي الحقيقي (س/ث)
أ	١٠٠	١	١١٠	١٠٠	١١٠
ب	٢٠٠	١	١٧٠	٢٠٠	١٧٠
جـ	٢٠٠	١,٥	١٩٥	١٣٣,٣	١٣٠
د	٣٥٠	١,٥	٢٨٥	٢٣٣,٣	١٩٠
هـ	٣٥٠	٢	٣١٠	١٧٥	١٥٥
ق	٤٠٠	٤	٤٤٠	١٠٠	١١٠
ن	٤٠٠	١	٢٩٠	٤٠٠	٢٩٠

وباستخدام بيانات عن الدخل الحقيقي والإنفاق الاستهلاكي الحقيقي في تقدير دالة الاستهلاك نحصل على دالة خطية تتمثل في شكل الانتشار (٣-١٦) . أما إذا استخدمنا بيانات عن الدخل النقدي والإنفاق النقدي على الاستهلاك فان شكل الانتشار الممثل لدالة الاستهلاك يصبح (٣-١٧).

ومن الواضح أن العلاقة الموضحة بالشكل (٣-١٧) لا تعكس العلاقة الحقيقة الموضحة بالشكل (٣-١٦).



شكل (٣-١٦)
دالة الاستهلاك بقيم حقيقية



شكل (٣-١٧)
دالة الاستهلاك بقيم نقدية

ولكن يلاحظ أن تعديل البيانات باستخدام المستوى العام للأسعار في حالة بيانات السلسلة الزمنية التي تعكس دالة استهلاك نسبية لا يؤثر على شكل دالة الاستهلاك ، ولا يؤثر على نتيجة القياس . أي أن استخدام الصيغة التالية :

$$\frac{ص}{ث} = ب \frac{س}{ث} + ع \quad .... (٣-٨)$$

$$\frac{Y}{P} = b\frac{X}{P} + u$$

يعطي نفس النتائج التي نحصل عليها عند استخدام الصيغة (٣-٩) :

$$ص = ب\ س + ع_١ \quad .... (٣-٩)$$

$$Y = bX + u_1$$

ويتضح هذا عند ضرب طرفي المعادلة (٣-٨) في ث فنحصل على (٣-٩).

(٢) هل نستخدم بيانات عن الدخل الكلي أم الدخل المتاح ؟

يلاحظ أن الدخل الكلي بالمفهوم الاقتصادي يشير إلى المقابل المستحق نتيجة لأداء خدمات إنتاجية خلال فترة زمنية معينة . أما الدخل المتاح = الدخل الكلي – الضرائب المباشرة + المدفوعات التحويلية . ومن الواضح في هذا الصدد أن الدخل المتاح يعبر عن المقدرة الإنفاقية بدرجة أكبر من الدخل الكلي . فالدخل الكلي لا يستبعد الضرائب المباشرة رغم أنها تؤثر سلبيا على المقدرة الإنفاقية . كما أنه لا يحتوي على المبالغ التي تحول إلى الفرد عن طريق غير الإنتاج كالإعانات النقدية والأرباح الرأسمالية وغيرها من مدفوعات تحويلية، رغم أنها تزيد من المقدرة الإنفاقية . ولما كان الدخل المتاح يستبعد الضرائب المباشرة ويتضمن المدفوعات التحويلية فانه يصبح أكثر تعبيراً عن المقدرة الإنفاقية من الدخل الكلي . ولعل هذا يعني أنه يتعين استخدام بيانات عن الدخل المتاح بدلا من الدخل الكلي عند تقدير دالة الاستهلاك.

(٣) هل نستخدم بيانات عن الدخل القومي أم متوسط الدخل ؟

من الأسئلة التي تطرح في هذا الصدد ، هل نستخدم بيانات عن الدخل القومي والاستهلاك القومي لتقدير دالة الاستهلاك، أم نستخدم بيانات عن متوسط الدخل ومتوسط الإنفاق لتقدير هذه الدالة ؟ .

يلاحظ عموما أن الاستهلاك القومي يمكن أن يزداد لأحد سببين أو كليهما :

(أ) زيادة حجم السكان مع ثبات متوسط الدخل الفردي .

(ب) زيادة متوسط الدخل الفردي مع ثبات حجم السكان .

(جـ) زيادة حجم السكان ومتوسط الدخل الفردي معا .

فإذا صاحب الزيادة في الدخل القومي زيادة في حجم السكان بنفس النسبة فان متوسط نصيب الفرد أو الأسرة من الدخل لن يتغير ، ومن ثم فان مقدرته الإنفاقية لن تتغير . وفي هذه الحالة إذا زاد الاستهلاك القومي فان هذه الزيادة سوف تكون راجعة لزيادة السكان المصحوبة بزيادة مساوية في الدخل القومي دون أن تكون راجعة لزيادة متوسط الدخل الفردي .

أما إذا زاد الدخل القومي وظل حجم السكان ثابتا ، فان متوسط نصيب الفرد أو الأسرة من الدخل سوف يزداد . وفي هذه الحالة إذا زاد الاستهلاك القومي فان هذه الزيادة سوف تكون راجعة لزيادة متوسط الدخل الفردي، وليس لزيادة حجم السكان . وإذا زاد الدخل وزاد حجم السكان ، ولكن كان معدل الزيادة في الأول أكبر منه في الثاني، فان الزيادة في الاستهلاك القومي في هذه الحالة يمكن أن تكون راجعة لكل من زيادة حجم السكان وزيادة متوسط الدخل .

ومما سبق يتضح أن استخدام بيانات عن الدخل القومي في تقدير دالة الاستهلاك لا يعكس فقط أثر الدخل أو المقدرة الإنفاقية على الاستهلاك، ولكن يعكس أيضا أثر حجم السكان . وحتى يمكن عزل أثر حجم السكان على الاستهلاك يتعين استخدام بيانات عن متوسط الدخل ومتوسط الإنفاق .

(٤) كيف يمكن حساب المتوسط ؟

يلاحظ أنه عند جمع بيانات قطاعية عن الدخل والإنفاق الاستهلاكي فان هذا يتم على أساس الأسر وليس الأفراد ، باعتبار أن الأسرة هي الوحدة المنفقة وليس الفرد . ومن ثم فان البيانات التي يتم جمعها في هذه الحالة تعبر عن دخول الأسر المختلفة وإنفاقها الاستهلاكي . والسؤال الذي يثور الآن : هل إذا جمعنا بيانات قطاعية عن الأسر يمكن استخدامها في تقدير دالة الاستهلاك كما هي بدون تعديل ؟

و للإجابة عن هذا السؤال دعنا نفترض أن هناك أسرتين مثلا أ ، ب ، وكان دخل الأسرة "أ" =١٠٠٠ جنيه وإنفاقها الاستهلاكي = ٨٠٠ جنيه ، هذا في حين كان دخل الأسرة ب = ٥٠٠ جنيه وإنفاقها الاستهلاكي = ٤٠٠جنيه . لاشك أن استخدام هذه البيانات على هذه الصورة في تقدير دالة الاستهلاك يتضمن افتراض أن اختلاف الإنفاق الاستهلاكي الخاص بالأسرة "ب " عن الإنفاق الاستهلاكي الخاص بالأسرة "أ" يرجع إلى اختلاف الدخل بينهما . أي يرجع لاختلاف المقدرة الإنفاقية للأسرتين في المتوسط. غير أن هذا قد لا يكون صحيحا. فربما يرجع الاختلاف في الإنفاق في هذه الحالة لاختلاف حجم الأسرتين فقط ، وليس لاختلاف مقدرتيهما على الإنفاق في

المتوسط . فإذا افترضنا أن حجم الأسرة " أ " هو فردين من الكبار ، هذا في حين أن حجم الأسرة "ب " هو فرد بالغ واحد ، فان هذا يعني أن متوسط دخل الفرد وكذلك متوسط إنفاقه في الأسرة " أ" يساوي متوسط دخله ومتوسط إنفاقه في الأسرة ب، وأن الاختلاف في الإنفاق على مستوى الأسر كان راجعا فقط لمجرد اختلاف حجم الأسرتين . ومن هذا المنطلق يتعين استخدام بيانات قطاعية بعد تعديلها على أساس متوسط فردي في تقدير دالة الاستهلاك وذلك حتى يكون التغير في الإنفاق الاستهلاكي راجعاً في المقام الأول إلى التغير في المقدرة الإنفاقية التي يحددها أساسا دخل الفرد في المتوسط .

وتثور هنا مشكلة تتعلق بكيفية حساب المتوسط . فإذا كان لدينا أسرتين جـ ، د ، وكان دخل الأسرة "جـ" =١٠٠٠ جنيه وإنفاقها الاستهلاكي =٨٠٠ جنيه ، وكان دخل الأسرة "د " = ١٠٠٠ جنيه وإنفاقها الاستهلاكي = ٨٠٠ جنيه أيضا ، بالإضافة إلى كون حجم كل أسرة منهما = ٤ أفراد ، فهل يعني هذا بالضرورة أن متوسط دخل ومتوسط إنفاق الفرد في الأسرتين متساوي؟ والإجابة في هذه الحالة بالطبع بالنفي .فإذا كانت الأسرة " جـ " تتكون من ٢ كبار ، و ٢ أطفال أقل من ١٥ سنة ، هذا في حين كانت الأسرة "د" تتكون من ٤ أفراد من البالغين ، فليس من المنطقي أن نعتبر متوسط إنفاق الطفل في هذه الحالة مساوياً لمتوسط إنفاق البالغ . ولذلك يتعين تحويل عدد الأطفال إلى ما يوازيهم من عدد مكافيء للكبار. فإذا افترضنا أن الدراسات المتخصصة أثبتت أن احتياجات الطفل الأقل من ١٥ سنة تمثل نصف احتياجات الفرد البالغ ، فمن الممكن اعتبار أن:

العدد المكافيء لأفراد الأسرة جـ = ٢كبار + $\frac{١}{٢}$ ×٢صغار = ٣ كبار

وأن عدد أفراد الأسرة د = ٤ من الكبار . ومن هذا المنطلق نجد أن متوسطات الدخل والإنفاق في الأسرتين كما هو موضح بالجدول (٣-٤).

جدول (٣-٤)

العدد المكافيء للكبار ومتوسط الدخل والإنفاق

الأسرة	دخل الأسرة	إنفاق الأسرة	العدد المكافيء للكبار	متوسط الدخل الفردي	متوسط الإنفاق الفردي
جـ	١٠٠٠	٨٠٠	٣	٣٣٣,٣	٢٦٦,٧
د	١٠٠٠	٨٠٠	٤	٢٥٠	٢٠٠

حيث :

متوسط الدخل الفردي = دخل الأسرة / العدد المكافيء للكبار

متوسط الإنفاق الفردي = إنفاق الأسرة / العدد المكافيء للكبار

ثانيا : مشاكل متعلقة بجمع بيانات عن المتغير العشوائي

إذا كان من الممكن جمع بيانات عن الاستهلاك (ص) والدخل (س) فانه من الصعب جمع بيانات رقمية عن المتغير العشوائي (ع)، وذلك لأن العوامل العشوائية عادة ما تكون غير معروفة أو غير قابلة للقياس الدقيق . ولهذا السبب فإننا سوف نقوم بوضع عدد من الافتراضات التي يتعلق جزء كبير منها بشكل المتغير العشوائي . ومثل هذه الافتراضات لازمة لتقدير معلمات النموذج ، وهي لا تعدو أن تكون عملية تخمين لما يمكن أن يكون عليه شكل المتغير العشوائي . وتسمى هذه الافتراضات بافتراضات نموذج الانحدار الخطي الاحتمالي ، وهي تنقسم إلى نوعين :

(١) افتراضات احتمالية.

(٢) افتراضات أخرى .

(١) الافتراضات الاحتمالية :

يلاحظ أن هذه الافتراضات من شأنها أن تحول الطريقة الإحصائية التي تستخدم في قياس العلاقة محل البحث إلى طريقة قياسية تتلاءم مع الطبيعة الاحتمالية للعلاقات الاقتصادية . وحيث أن الطريقة الإحصائية التي تستخدم في قياس معاملات الانحدار في هذا الفصل هي طريقة المربعات الصغرى العادية Ordinary Least Squares (OLS) فان هذه الافتراضات الاحتمالية تتعلق بهذه الطريقة ، وكلها تدور حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي .

الافتراض الأول : أن المتغير ($ع_ر$) متغير حقيقي عشوائي .

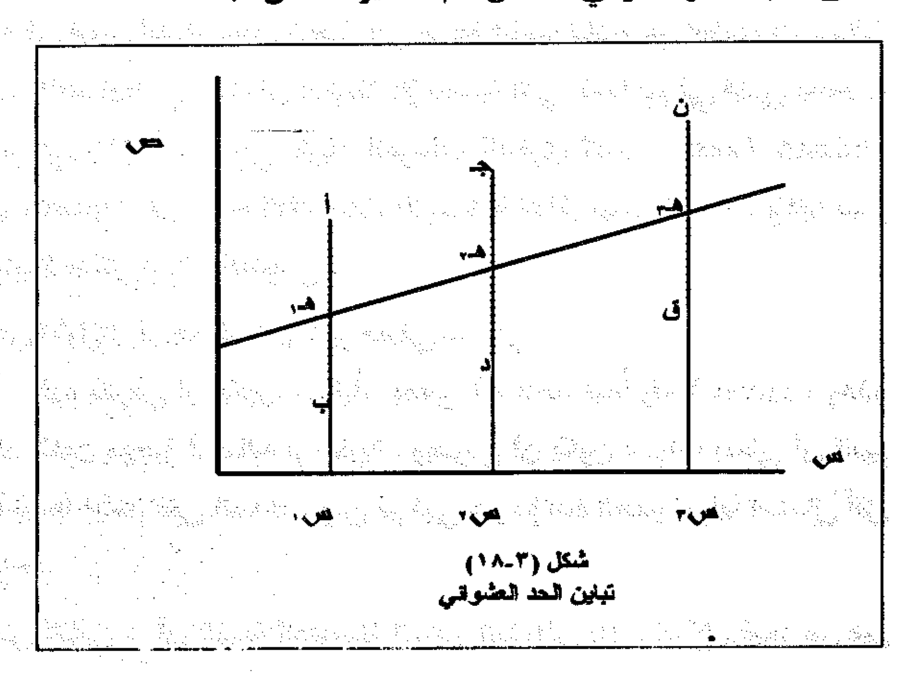
فهو يفترض أن يكون حقيقياً، بمعنى أنه يأخذ قيماً رقمية محددة ، وهذه القيم قد تكون موجبة أو سالبة أو صفرية . ويفترض أن يكون عشوائيا بمعنى أن القيم التي يأخذها تعتمد على الصدفة ، ومن ثم فهي غير مؤكدة الحدوث ولها احتمال أقل من الواحد .

الافتراض الثاني : أن القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي (ع) عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل تساوي صفراً . فكما هو واضح من الشكل (٣-١٤) فان الحد العشوائي قد يأخذ أكثر من قيمة عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل . ومن الملاحظ أن بعض هذه القيم موجب (هـ هـ١) وبعضها سالب (هـ هـ٢) وبعضها صفري (النقطة هـ) . وفي هذه الحالة نفترض أن مجموع القيم الموجبة يساوي مجموع القيم السالبة بحيث أن متوسط كل القيم يساوي صفراً. ويسهل هذا الافتراض من استخدام الصيغة المقدرة للدالة :

$ص_ر = أ + ب س_ر$ في التنبؤ ، حيث نصبح في غير حاجة لتحديد القيمة المتوقعة للحد العشوائي نظراً لأنها تساوي صفر.

الافتراض الثالث : أن تباين ($ع_ر$) يكون ثابتا عند جميع قيم المتغير المستقل . وفي الشكل (٣-١٨) نجد أن هذا الافتراض يعني أن قيم ($ع_ر$) تتغير في حدود ثابتة حول

وسطها الحسابي والذي هو صفر . أي أن الفرق أو المدى بين الحد الأقصى والحد الأدنى لقيم المتغير العشوائي عند كل قيم المتغير المستقل ثابت .



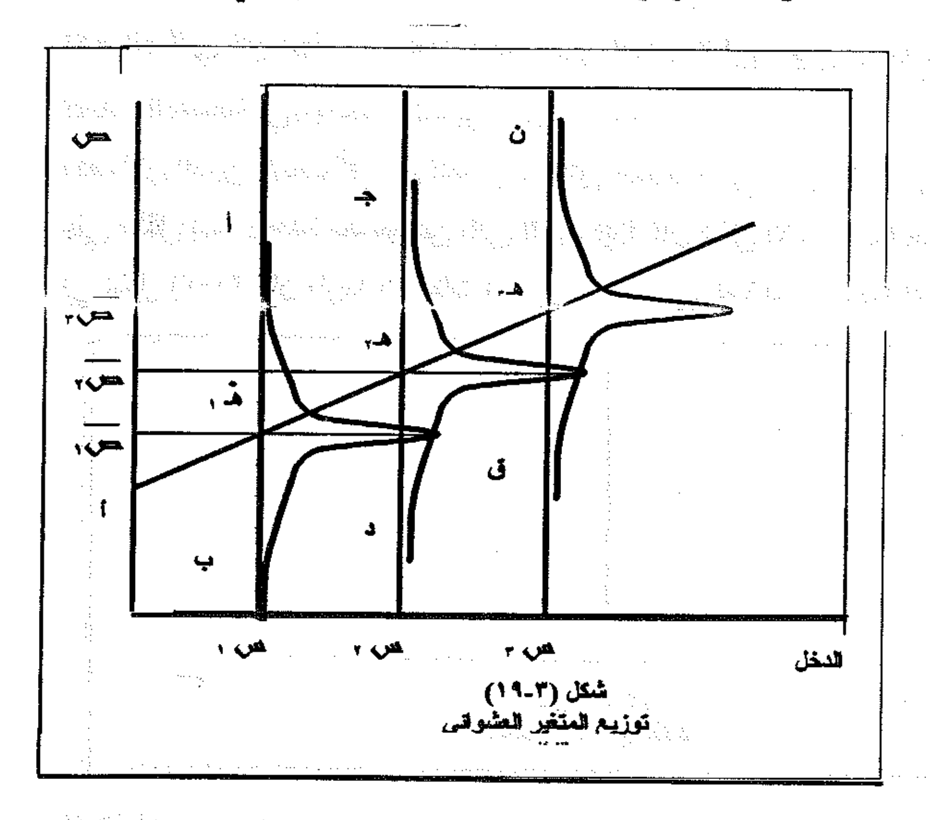
شكل (۳-۱۸)
تباين الحد العشوائي

فإذا كان (أ ب) هو المدى الذي تتراوح فيه قيم ى عند القيمة س١ للدخل ، (جـ د) هو المدى الذي تتراوح في قيم ى عند القيمة س٢ للدخل وهكذا ، فان هذا الافتراض يعني أن : أ ب= جـ د = ن ق . وهو افتراض للتبسيط ، حيث يهدف لتوضيح أن هناك توزيعاً واحداً للمتغير العشوائي عند كل قيم المتغير المستقل . ويرجع هذا لكون متوسط هذا المتغير متساوي عند كل قيم س (=صفر) ، وتباينه متساوي أيضا .

الافتراض الرابع : أن المتغير العشوائي له توزيع معتدل . وهذا يعني أن توزيع (ى) عند كل قيمة للمتغير التفسيري (س) سوف يكون متماثلا حول الوسط الحسابي ، أي سوف يكون ناقوسي الشكل . ولعل هذا الافتراض يرجع لعدد من الأسباب ، أولها أنه أقرب التوزيعات للواقع حيث أن نسبة كبيرة من التوزيعات الطبيعية تتبعه، وثانيها أنه أسهل

التوزيعات التي يمكن التعامل معها وذلك لوجود جداول خاصة به دون غيره من التوزيعات .

والافتراضات السابقة تعني أن المتغير العشوائي له قيم محددة واحتمالية وموزعة توزيعا معتدلا ، متوسطها صفر ، وتباينها ثابت . وهذا يمكن ترجمته في الشكل (٣-١٩).



شكل (٣-١٩)
توزيع المتغير العشوائي

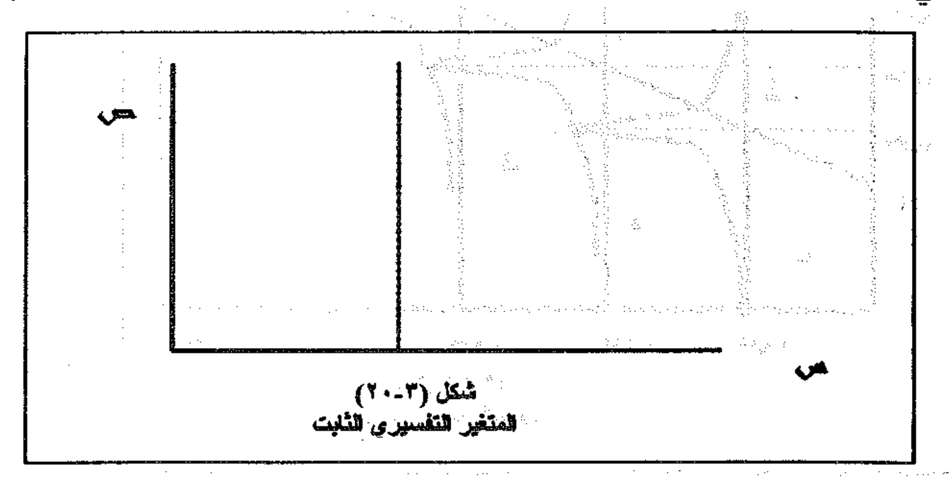
الافتراض الخامس : أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل مستقلة عن بعضها البعض . أي أن تغاير قيم المتغير العشوائي في الفترات المتتالية = صفر . وهذا يعفينا من مشكلة مؤداها أن الخطأ العشوائي في فترة واحدة قد يكون هو السبب في توليد الأخطاء العشوائية في كل الفترات التالية .

الافتراض السادس: أن قيم المتغير ($ى_ر$) مستقلة عن قيم المتغير التفسيري ($س_ر$) . أي أن ($س_ر$)لا يؤثر في ولا يتأثر بـ ($ى_ر$). وهذا يعني أن تغاير ($س_ر$ ، $ى_ر$) = صفر . فلاشك أن

التداخل بين المتغير المنتظم (س) والمتغير العشوائي (ع) يجعل من الصعب علينا تحديد النسبة التي يمكن تفسيرها من الاستهلاك (ص) بدلالة الدخل (س) ، ويؤدي لوجود مشكلة تسمى عدم ثبات التباين Heterscedasticity .

الافتراض السابع : أن المتغيرات المستقلة كالدخل تقاس بلا أخطاء ، وهذا يعني أن الأخطاء التي نقع فيها توجد فقط عندما نقيس المتغير التابع . ومن ثم فان أخطاء القياس المتضمنة في (ع) تتعلق بالمتغير التابع (ص) فقط .

الافتراض الثامن : ليست كل قيم المتغير المستقل متساوية ، حيث يتعين أن تكون هناك على الأقل قيمة واحدة مختلفة عن باقي القيم. فإذا كان شكل الانتشار كما هو موضح في شكل (٣-٢٠) فان طريقة المربعات الصغرى تصبح غير صالحة لتقدير علاقة الانحدار .



شكل (٣-٢٠)
المتغير التفسيري الثابت

(٢)افتراضات أخرى

الافتراض التاسع : أن المتغيرات التفسيرية مستقلة إحصائيا . أي إذا وُجد أكثر من متغير تفسيري فان الارتباط بينهم يكون منعدما أو ضعيفاً . فلو أن هناك متغيرين تفسيريين مرتبطين ارتباطاً خطياً تاماً يمكن اعتبارهما متغيراً واحداً، ومن ثم فان إدراجهما سوياً في معادلة الانحدار يؤدي إلى عدم دقة في قياس المعلمات .

الافتراض العاشر : أن المتغيرات التجميعية تكون مجمعة بطريقة سليمة ولا يوجد هناك مشاكل للتجميع .

الافتراض الحادي عشر : أن العلاقة موضع القياس تكون متعرف عليها ، أي يكون لها صيغة رياضية متميزة لا تتشابه مع صيغ أخرى في نفس النموذج . وهذا الافتراض يضمن لنا أن تكون العلاقة المقدرة هي العلاقة التي يقصدها الباحث .

الافتراض الثاني عشر : أن يكون تعيين النموذج صحيحاً سواء من حيث عدد المعادلات ، أو درجة خطية كل معادلة ، أو عدد المتغيرات التفسيرية .

وإذا تحققت كل هذه الافتراضات في الواقع فان النتائج التي نحصل عليها من استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في القياس يمكن الاطمئنان إلى صحتها . ولذلك فان هناك حاجة لاختبار مدى توافر هذه الافتراضات فيما بعد ، وهذا ما سوف نفعله في فصول تالية.

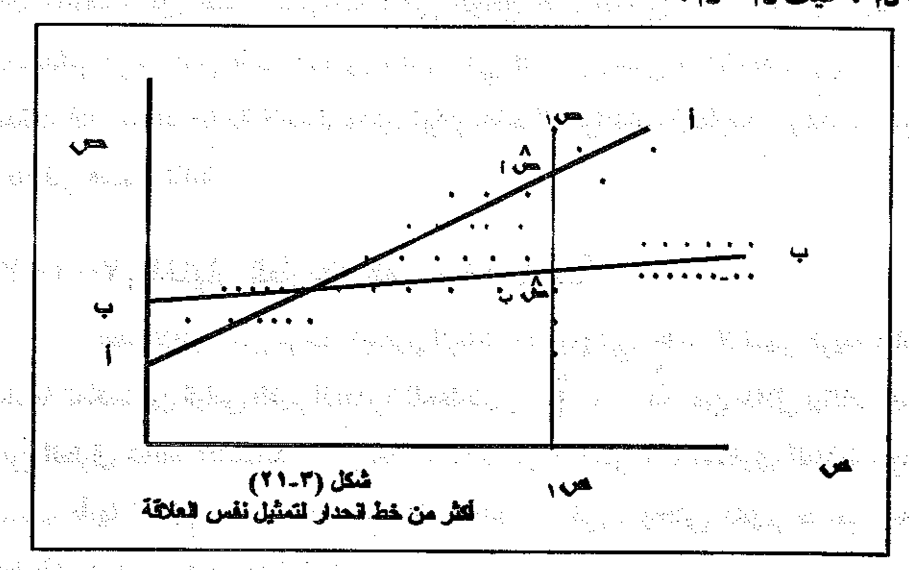
(٣-٢-٢) اختيار الطريقة القياسية الملائمة

بعد الانتهاء من مرحلة تجميع البيانات نصبح في حاجة لاختيار طريقة قياسية مناسبة تمكننا من قياس القيم المقدرة للمعلمتين $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ من خلال بيانات عينة . ومن الطرق شائعة الاستخدام في هذا الصدد طريقة المربعات الصغرى العادية ، وهي تتصف بأنها تجعل الخطأ العشوائي عند حده الأدنى . وحتى نتفهم مضمون هذه الطريقة علينا تتبع الخطوات التالية :

(١) بعد القيام بجمع بيانات عن المتغيرين ص التابع ، س المستقل في صورة عينة ، نقوم بتصوير العلاقة بين هذين المتغيرين في شكل انتشار باستخدام هذه البيانات كما بالشكل (٣-٢١) . والمطلوب الآن هو تقدير خط انحدار يمثل هذه العلاقة أفضل تمثيل ممكن .

(٢) يمكن تمثيل العلاقة بين ص ، س من خلال عدد لانهائي من خطوط الانحدار التي تمر بنقاط شكل الانتشار (٣-٢١) . فمثلا يمكن تمثيل هذه العلاقة بالخط "أ أ" أو الخط "ب ب" . ويختلف هذان الخطان في مدى انحراف القيم المقدرة والواقعة عليهما ($\hat{ص}_ر$) عن القيم المشاهدة ($ص_ر$) . فيلاحظ مثلا أنه عندما تكون قيمة المتغير

التفسيري هي $س_{1}$ ، فان القيمة المقدرة أو المتوقعة للمتغير التابع وفقا للخط" ب ب" تكون هي ($\hat{ص}_{ب}$) ، ووفقا للخط "أ أ" تكون هي ($\hat{ص}_{أ}$). ولعل الفرق بينهما هو أن انحراف القيمة المقدرة عن القيمة المشاهدة في حالة الخط " ب ب " هو $(ص_{1} - \hat{ص}_{ب}) = د_{1}$ ، في حين أن هذا الانحراف في حالة الخط " أ أ " هو $(ص_{1} - \hat{ص}_{أ}) = د_{2}$ ، حيث $د_{2} < د_{1}$.



شكل (٣-٢١)
أكثر من خط انحدار لتمثيل نفس العلاقة

ولاشك أن أفضل خط يمثل العلاقة هو الذي تكون انحرافات القيم الواقعة عليه عن القيم المشاهدة أصغر ما يمكن . ومن ثم تكون القيم المقدرة للمعلمات بواسطة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ هي أفضل تقديرات .

ولعل الخط الذي يجعل الانحرافات عند حدها الأدنى هو الخط الذي يتوسط القيم المشاهدة خير توسط ، فإما ينطبق عليها جميعا ، أو يتخللها بحيث تكون الانحرافات الموجبة للقيم المشاهدة التي تقع أعلاه مساوية للانحرافات السالبة التي تقع أسفله ، مما يلغي بعضها بعضاً عند جمعها .

أي أن: $\sum د_{ر} = \sum (ص_{ر} - \hat{ص}_{ر}) =$ صفر .

ولكن يجب ملاحظة أن كون مجموع الانحرافات مساويا للصفر لا يعني أن هذه الانحرافات قد اختفت ، فهي موجودة وكل ما هناك أن مجموعها يساوي صفر . والسؤال الآن هو : كيف يمكن معرفة أن هذه الانحرافات قد وصلت لحدها الأدنى طالما أن مجموعها يساوي صفر ؟

يمكن التغلب على هذه الصعوبة بتربيع هذه الانحرافات ، ومن ثم يكون خط الانحدار الذي يمثل العلاقة محل البحث أفضل تمثيل هو الذي يجعل مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة عن القيم المشاهدة عند حدها الأدنى، أي يجعل:

د٢ ، $\left(\sum e_i^2\right)$ عند حدها الأدنى .

(٣) يتضح مما سبق أن :

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad (3-10)$$

وبالتعويض عن قيمة : $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$ نحصل على:

$$e_i = Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i \qquad (3-11)$$

$$\sum e_i^2 = (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2 \qquad (3-12)$$

والشرط اللازم للتدنية هو أن المشتقات الجزئية الأولى لمربع الانحرافات تساوي صفر . أي :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = 0, \quad \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}} = 0$$

حيث $\hat{b}, \hat{a}$ هما المعلمتان المراد إيجاد صياغة محددة لتقديرهما .

وبالحصول على المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة (٣-١٢) بالنسبة لـ ($\hat{a}$) ومساواتها بالصفر نجد أن :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = 2\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b} X_i)(-1) = 0$$

$$= -2\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b} X_i) = 0$$

وبقسمة طرفي المعادلة على ٢ نحصل على :

$$-\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b} X_i) = 0$$

$$-\sum Y_i + n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i \quad \text{.......(I)}$$

وتسمى المعادلة(I) بالمعادلة الطبيعية الأولى.

وبمفاضلة المعادلة (٣-١٢) بالنسبة للمعلمة ($\hat{b}$) ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}} = 2\sum (Y_i - \hat{a} - bX_i)(-\hat{X}_i) = 0$$

$$= -2\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b} X_i) X_i = 0$$

وبقسمة طرفي المعادلة على ٢ نحصل على :

$$-\sum Y_i X_i + \hat{a}\sum X_i + \hat{b} X_i^2 = 0$$

$$\sum Y_i X_i = \hat{a}\sum X_i + \hat{b} X_i^2 \quad \text{.......(II)}$$

وتسمى المعادلة (II) بالمعادلة الطبيعية الثانية.

وبحل المعادلتين الطبيعيتين نحصل على طرق قياسية لتقدير المعلمتين ($\hat{b}, \hat{a}$) :

فبضرب المعادلة (I) في(ΣXi) ، وضرب المعادلة(II) في(n) وطرح الأولى من الثانية نحصل على :

$$n\sum Y_iX_i = n\hat{a}\sum X_i + n\hat{b}\sum X_i^2$$

$$\sum X_i \sum Y_i = n\hat{a}\sum X_i + \hat{b}\,(\sum Xi)^2$$

$$\hat{b}\,n\Sigma X_i^2 - \hat{b}(\Sigma Xi)^2 = n\Sigma X_iY_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i$$

$$\hat{b}\left[n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2\right] = n\Sigma Y_iX_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i$$

$$\hat{b} = \frac{n\Sigma Y_iX_i - \Sigma Y_i \Sigma X_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} \quad \text{.........(3-13)}$$

وبضرب المعادلة (I) في (ΣX_i^2) وضرب المعادلة (II) في (ΣXi)، وطرح II من I نحصل على :

$$\Sigma X_i^2 \Sigma Y_i = n\hat{a}\Sigma X_i^2 + \hat{b}\Sigma X_i \Sigma X_i^2$$

$$\Sigma X_i \Sigma Y_iX_i = \hat{a}(\Sigma X_i)^2 + \hat{b}\Sigma X_i \Sigma X_i^2$$

$$n\hat{a}X_i^2 - \hat{a}\left(\Sigma X_i^2\right)^2 = \Sigma X_i^2 \Sigma Y_i - \Sigma X_i \Sigma X_i Y_i$$

$$\hat{a} = \frac{\Sigma X_i^2 \Sigma Y_i - \Sigma X_i \Sigma X_i Y_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} \quad \text{.........(3-14)}$$

ومما سبق نجد أن :

$$\hat{ب} = \frac{ن \sum س_ر ص_ر - \sum س_ر \sum ص_ر}{ن \sum س_ر^٢ - (\sum س_ر)^٢} \quad \text{.......(٣-١٣)}$$

$$\hat{أ} = \frac{ن \sum س_ر^2 \sum ص_ر - \sum س_ر ص_ر \sum س_ر}{ن \sum س_ر^2 - (\sum س_ر)^2} \quad (٣-١٤)$$

ويلاحظ أن الصياغتين (٣-١٣) ، (٣-١٤) تعطيان أفضل تقدير للمعلمات أ ، ب ، ويمكن تقدير $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ من خلالهما بالتعويض عن قيم س ، ص .

(٤) من الممكن الحصول على صياغتين أخرتين ولكن باستخدام انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بدلا من استخدام القيم الأصلية س ، ص وذلك على النحو التالي :

افترض أن : س = س - $\bar{س}$ ، ص = ص - $\bar{ص}$ ← $x = X-\bar{X}, y = Y-\bar{Y}$

$$xy = (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$$
$$xy = YX - \bar{X}Y - \bar{Y}X + \bar{X}\bar{Y}$$

وبأخذ المجموع نحصل على :

$$\sum yx = \sum YX - \bar{X}\sum Y - \bar{Y}\sum X + n\bar{X}\bar{Y}$$
$$\sum yx = \sum YX - \frac{\sum X \sum Y}{n} - \frac{\sum X \sum Y}{n} + \frac{n\sum X\sum Y}{n^2}$$
$$\sum yx = \langle\frac{n\sum XY - \sum X\sum Y}{n}\rangle - \langle\frac{n\sum X\sum Y - n\sum X\sum Y}{n^2}\rangle$$

$$\sum yx = \frac{n\sum YX - \sum X\sum Y}{n} \quad ......(3-15)$$

وبما أن : $x = X - \bar{X}$

$$\sum x^2 = \sum(X-\overline{X})^2$$

$$= \sum X^2 - 2\overline{X}\sum X + n\overline{X}^2$$

$$= \sum X^2 - \frac{2n\overline{X}\sum X}{n} + n\overline{X}^2$$

$$= \sum X^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2$$

$$\sum x^2 = \sum X^2 - n\left(\frac{\sum X}{n}\right)^2$$

$$\sum x^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$

$$\sum x^2 = \frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3-16)$$

وبالتعويض من (٣-١٥) ، (٣-١٦) في (٣-١٣) نحصل على :

$$\hat{ب} = \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sum س_ر^٢} \quad \ldots\ldots\ldots (١٧-٣)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum yx}{\sum X^2}$$

وبقسمة المعادلة الطبيعية الأولى(I) على (n) نحصل على :

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \hat{a} + \hat{b}\frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X}$$

أي أن : $\overline{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\ \overline{س}$ .... (٣-١٨)

$\hat{أ} = \overline{ص} - \hat{ب}\ \overline{س}$ .... (٣-١٩)

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}$$

وتوضح المعادلة (٣-١٨) أن خط الانحدار المقدر لابد أن يمر خلال النقطة التي تتمثل إحداثياتها في الوسطين الحسابيين للمتغيرين س̄ ، ص̄ . وتمثل المعادلتين (٣-١٧) ، (٣-١٩) مُقَدِّري طريقة المربعات الصغرى العادية للمعلمتين أ، ب في نموذج الانحدار الخطي البسيط .

مثال (٣-٢)

تقدير دالة الاستهلاك

قام باحث بجمع بيانات عن الميزانية الشهرية لعشرة من الأسر التي تقطن مدناً مختلفة بنفس المجتمع فكانت هذه البيانات كما بالجدول (٣-٥) ، علماً بأن مدينة الأسرة الأولى أخذت كنقطة أساس في الأسعار . فإذا علمت أن الدراسات المتخصصة أوضحت أن احتياجات الطفل الأقل من خمس سنوات من الاستهلاك = ١ / ٤ احتياجات البالغ وأن احتياجات الطفل بين ٦ -١٦ سنة من الاستهلاك = ١ / ٢ احتياجات البالغ ، قدر دالة الاستهلاك من البيانات السابقة مستخدما الصيغة الخطية التالية : ص = أ̂ + ب̂ س + د ← $Y_i = \hat{a} + \hat{b} X_i + e_i$

جدول (٣-٥)

الدخل النقدي والإنفاق لعينة من الأسر

الأسرة	الدخل النقدي المتاح	الإنفاق الاستهلاكي النقدي	حجم الأسرة			رقم قياسي لأسعار التجزئة
			عدد الكبار	عدد أطفال أقل من ٥	عدد أطفال بين ٦-١٦	
١	٣٠٠	٤٥٠	٢	٢	١	١
٢	٤٥٠	٦٠٠	٣	–	–	١
٣	٨٢٥	٨٢٥	٢	٢	١	١,١
٤	١٢٠٧,٥	١٠٠٦,٢٥	١	٢	٤	١,١٥
٥	١٢٩٣,٧٥	١١٦٤,٣٨	١	٣	١	١,١٥
٦	٢٧٣٠	٢١٠٠	٢	٤	١	١,٢٠
٧	٢٧٠٠	٢١٦٠	٢	–	٢	١,٢٠
٨	١٩٦٨,٧٥	١٧٥٠	١	٣	–	١,٢٥
٩	٤٣٧٥	٣٩٣٧,٥	٢	٤	١	١,٢٥
١٠	٥٠٧٨,١٣	٤٠٦٢,٥	٢	٣	١	١,٢٥

حيث هـ (X) = متوسط الدخل الحقيقي ، ص (Y) = متوسط الاستهلاك الحقيقي .

ولتقدير دالة الاستهلاك من خلال البيانات المعطاة بالجدول (٣-٥) يتعين القيام بإجراء بعض التعديلات على هذه البيانات قبل أن تصبح صالحة للاستخدام في التقدير ، وذلك على النحو التالي :

(١) نحول القيم النقدية إلى قيم حقيقية باستخدام الصيغتين التاليتين :

$$\text{الدخل الحقيقي المتاح} = \frac{\text{الدخل النقدي المتاح للأسرة}}{\text{الرقم القياسي لأسعار التجزئة}}$$

$$\text{الاستهلاك الحقيقي للأسرة} = \frac{\text{الانفاق الاستهلاكي النقدي}}{\text{الرقم القياسي لأسعار التجزئة}}$$

وتتضح نتائج هذه الخطوة بالعمودين (١) ، (٢) بالجدول (٣-٦) .

(٢) نحول القيم الكلية على مستوى الأسرة إلى قيم متوسطة على مستوى فردي وذلك بعد حساب العدد المكافيء لأفراد الأسرة من الكبار على النحو التالي :

$$\text{العدد المكافيء للكبار} = \text{عدد الكبار} + \frac{1}{4}\,(\text{عدد الصغار أقل من ٥}) + \frac{1}{2}\,(\text{عدد الصغار بين ٦-١٦})$$

$$\text{متوسط الدخل الحقيقي (هـ)} = \frac{\text{الدخل الحقيقي المتاح}}{\text{العدد المكافيء للكبار}}$$

$$\text{متوسط الاستهلاك الحقيقي (ص)} = \frac{\text{الاستهلاك الحقيقي للأسرة}}{\text{العدد المكافيء للكبار}}$$

وتتضح نتيجة هذه الخطوة في الأعمدة (٣) ، (٤) ، (٥) بالجدول (٣-٦).

(٣) نحصل على انحرافات القيم عن وسطها الحسابي على النحو التالي :

$\text{س} = \text{هـ} - \overline{\text{هـ}}$ = انحراف الدخل الفردي عن الوسط الحسابي .

$\text{ص} = \text{ص} - \overline{\text{ص}}$ = انحراف الاستهلاك الفردي عن الوسط الحسابي .

جدول (٣-٦)

الحسابات اللازمة لتقدير دالة الاستهلاك

رقم الأسرة	(١) الدخل الحقيقي المتاح للأسرة	(٢) الاستهلاك الحقيقي للأسرة	(٣) العدد المكافيء للكبار	(٤) متوسط الدخل الحقيقي س	(٥) متوسط استهلاك حقيقي ص	(٦) س	(٧) ص	(٨) س ص	(٩) س٢
١	٣٠٠	٤٥٠	٣	١٠٠	١٥٠	٤٨٥-	٣٦٠-	١٧٤٦٠٠	٢٣٥٢٢٥
٢	٤٥٠	٦٠٠	٣	١٥٠	٢٠٠	٤٣٥-	٣١٠-	١٣٤٨٥٠	١٨٩٢٢٥
٣	٧٥٠	٧٥٠	٣	٢٥٠	٢٥٠	٣٣٥-	٢٦٠-	٨٧١٠٠	١١٢٢٢٥
٤	١٠٥٠	٨٧٥	٣,٥	٣٠٠	٢٥٠	٢٨٥-	٢٦٠-	٧٤١٠٠	٨١٢٢٥
٥	١١٢٥	١٠١٢,٥	٢,٢٥	٥٠٠	٤٥٠	٨٥-	٦٠-	٥١٠٠	٧٢٢٥
٦	٢٢٧٥	١٧٥٠	٣,٥	٦٥٠	٥٠٠	٦٥	١٠-	٦٥٠-	٤٢٢٥
٧	٢٢٥٠	١٨٠٠	٣	٧٥٠	٦٠٠	١٦٥	٩٠	١٤٨٥٠	٢٧٢٢٥
٨	١٥٧٥	١٤٠٠	١,٧٥	٩٠٠	٨٠٠	٣١٥	٢٩٠	٩١٣٥٠	٩٩٢٢٥
٩	٣٥٠٠	٣١٥٠	٣,٥	١٠٠٠	٩٠٠	٤١٥	٣٩٠	١٦١٨٥٠	١٧٢٢٢٥
١٠	٤٠٦٢,٥	٣٢٥٠	٣,٢٥	١٢٥٠	١٠٠٠	٦٦٥	٤٩٠	٣٢٥٨٥٠	٤٤٢٢٢٥
مجـ				٥٨٥٠	٥١٠٠			١٠٦٩٠٠٠	١٣٧٠٢٥٠

ثم نجري الحسابات المطلوبة كما بالأعمدة (٦) ، (٧) ، (٨) ، (٩) بالجدول (٣-٦).

$\sum$ س = ٥٨٥٠ ، $\sum$ ص = ٥١٠٠ ، $\sum$ ص س = ١٠٦٩٠٠٠ ، $\sum$ س^2 = ١٣٧٠٢٥٠

$\bar{}$س = $\sum$ س ÷ ن = ٥٨٥٠÷١٠=٥٨٥ ، $\bar{}$ص = $\sum$ ص ÷ ن = ٥١٠٠÷١٠ = ٥١٠

(٤) نعوض من بيانات الجدول (٣-٦) في الصياغات التالية لتقدير معلمات دالة الاستهلاك على النحو التالي :

$$\text{ب} = \frac{\sum \text{س ص}}{\sum \text{س}^2} = \frac{1069000}{1370250} = 0.78$$

$\hat{}$أ = $\bar{}$ص - $\hat{}$ب $\bar{}$س = ٥١٠ - ٠,٧٨ × ٥٨٥ = ٥١٠ - ٤٥٦,٣ = ٥٣,٧

$\hat{}$ص = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ س ....(٣-٢٠)

$$\hat{Y} = 53.7 + 0.78X$$

وتمثل المعادلة (٣-٢٠) دالة الاستهلاك المقدرة . ومنها يتضح أن :

الميل الحدي للاستهلاك = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٧٨,

الميل المتوسط للاستهلاك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٥١٠}{٥٨٥}$ = ٨٧,

مرونة الاستهلاك للدخل = $\frac{\text{الميل الحدي للاستهلاك}}{\text{الميل المتوسط للاستهلاك}}$ = $\frac{٧٨,}{٨٧,}$ = ٩٠,

أي أن كل زيادة في الدخل بنسبة ١٠٪ يصاحبها زيادة في الاستهلاك بنسبة ٩٪ . ومن الممكن اشتقاق دالة الادخار من دالة الاستهلاك (٣-٢٠) كما يلي :

$\hat{\text{خ}}$ = س - $\hat{\text{ص}}$ = س - ٥٣,٧٠ - ٧٨, س

$\hat{\text{خ}}$ = -٥٣,٧٠ + (١-٧٨,) س

$\hat{\text{خ}}$ = - ٥٣,٧ + ٠,٢٢ س .... (٣-٢١)

الميل الحدي للادخار = $\frac{\text{ء خ}}{\text{ء س}}$ = ٢٢,

الميل المتوسط للادخار = ١ - الميل المتوسط للاستهلاك = ١-٨٧, = ١٣,

مرونة الادخار للدخل = $\frac{\text{الميل الحدي للادخار}}{\text{الميل المتوسط للادخار}}$ = $\frac{٢٢,}{١٣,}$ = ١,٧

أي أن كل زيادة في الدخل بنسبة ١٠٪ يصاحبها زيادة في الادخار بنسبة ١٧٪.

(٥) يمكن تحديد قيم الحد العشوائي د ر (e_i) في هذه الحالة كبواقي Residuals على النحو التالي :

ص ر = $\hat{\text{ص}}$ ر + د ر حيث : ص ر = القيمة المشاهدة للاستهلاك

$\hat{\text{ص}}$ ر = القيمة المقدرة للاستهلاك

∴ د ر = ص ر - $\hat{\text{ص}}$ ر = ص ر - $\hat{\text{أ}}$ - $\hat{\text{ب}}$ س ر

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{a} - \hat{b} X_i$$

أي أن :

د ر = ص ر − ٥٣,٧ − ٠,٧٨ س ر

وتتضح الحسابات الخاصة بتحديد قيم الحد العشوائي (د) بالجدول (٣-٧) .

وبمعاينة الجدول (٣-٧) يتضح أن Σ ص ر = Σ صَ ر ، حيث Σ د ر = صفر.

ويحقق هذا المعادلة التالية:

Σ ص ر = Σ صَ ر + Σ د ر ← $\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i + \sum e_i$

وتتمثل نتائج حسابات الجدول (٣-٧) فيما يلي :

Σ ص ر = ٥١٠٠ ، Σ صَ ر = ٥١٠٠ ، Σ د = صفر

Σ د ر^٢ = ١٥٠٢٠ ، Σ ص ر^٢ = ٨٤٩٠٠٠ ، Σ س ر^٢ = ٤٧٩٢٥٠٠

(٦) يلاحظ أنه إذا كانت الدالة المراد تقديرها نسبية، أي تأخذ الصيغة التالية :

ص ر = ب س ر + د ر ← $Y_i = \hat{b} X_i + e_i$

جدول (٣-٧)

الحسابات الخاصة بتحديد قيم الحد العشوائي

رقم	س ر	ص ر	صَ = −٥٣,٧ + ٠,٧٨ س	د	د^٢	ص^٢	س^٢
١	١٥٠	١٠٠	١٣١,٧	١٨,٣	٣٣٤,٨٩	١٢٩٦٠٠	١٠٠٠٠
٢	٢٠٠	١٥٠	١٧٠,٧	٢٩,٣	٨٥٨,٤٩	٩٦١٠٠	٢٢٥٠٠
٣	٢٥٠	٢٥٠	٢٤٨,٧	١,٣	١,٦٩	٦٧٦٠٠	٦٢٥٠٠
٤	٢٥٠	٣٠٠	٢٨٧,٧	−٣٧,٧	١٤٢١,٢٩	٦٧٦٠٠	٩٠٠٠٠
٥	٤٥٠	٥٠٠	٤٤٣,٧	٦,٣	٣٩,٦٩	٣٦٠٠	٢٥٠٠٠٠
٦	٥٠٠	٦٥٠	٥٦٠,٧	−٦٠,٧	٣٦٨٤,٤٩	١٠٠	٤٢٢٥٠٠
٧	٦٠٠	٧٥٠	٦٣٨,٧	−٣٨,٧	١٤٩٧,٦٩	٨١٠٠	٥٦٢٥٠٠
٨	٨٠٠	٩٠٠	٧٥٥,٧	٤٤,٣	١٩٦٢,٤٩	٨٤١٠٠	٨١٠٠٠٠
٩	٩٠٠	١٠٠٠	٨٣٣,٧	٦٦,٣	٤٣٩٥,٦٩	١٥٢١٠٠	١٠٠٠٠٠٠
١٠	١٠٠٠	١٢٥٠	١٠٢٨,٧	−٢٨,٧	٨٢٣,٦٩	٢٤٠١٠٠	١٥٦٢٥٠٠
مجموع	٥١٠٠		٥١٠٠	صفر	١٥٠٢٠	٨٤٩٠٠٠	٤٧٩٢٥٠٠

فان الصيغة التي تستخدم في تقدير معامل الانحدار ' بَ ' في هذه الحالة تصبح :

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص_ر س_ر}{\sum س^2_ر} \quad (٣-٢٢)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

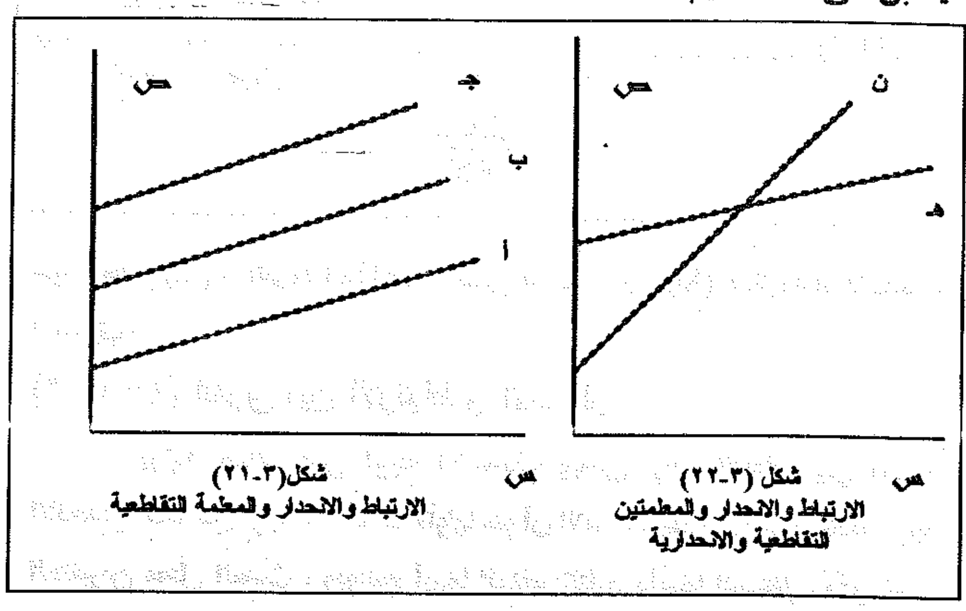
حيث ص ر (Y_i) = القيمة المشاهدة للمتغير التابع ، س ر (X_i) = القيمة المشاهدة للمتغير التفسيري .

(٣-٢-٣) الفرق بين الارتباط و الانحدار

يوجد هناك بعض أوجه الاختلاف وبعض أوجه الاتفاق بين الارتباط و الانحدار . فأما عن أوجه الاختلاف فأولها هو أن الانحدار يفترض وجود علاقة سببية بين المتغيرين محل البحث ، ويوضح أيهما المتغير التابع وأيهما المستقل. ومن ثم يمكن التنبؤ بقيم المتغير التابع بدلالة المتغير المستقل باستخدام العلاقة المقدرة . أما الارتباط فهو يحدد درجة اقتران التغيرات في المتغيرين محل البحث دون أن يوضح وجود أي علاقة سببية بينهما، أي لا يوضح أي المتغيرات تابع وأيها مستقل. ونظراً لأن معامل الارتباط يتحدد في قيمة واحدة فهو لا يساعدنا على التنبؤ بقيمة أي متغير بدلالة الآخر.

ومن ناحية أخرى ، في الوقت الذي تختلف فيه قيم معلمات خط الانحدار بانتقاله موازيا نفسه أو بتغير ميله ، فان معامل الارتباط قد لا يتغير طالما أن شكل الانتشار منطبقا على خط مستقيم . ويتضح هذا من الشكلين (٣-٢١) ، (٣-٢٢) . ففي الشكل (٣-٢١) تختلف المعلمة الناقلة لمعادلة الانحدار بين الخطوط أ ، ب ، جـ ، وإن كانت المعلمة الانحدارية واحدة .ولكن معامل الارتباط للخطوط الثلاثة واحد ، حيث يشير إلي وجود ارتباط تام نظراً لانطباق شكل الانتشار على خط مستقيم . وفي الشكل (٣-٢٢) نجد أن كل من المعلمتين الانحدارية والتقاطعية تختلفان بين الخطين هـ ، ن. أي أن معادلتي الانحدار الممثلتان للخطين مختلفتان تماما. هذا في حين أن

معامل الارتباط لا يختلف في الحالتين ، حيث يساوي الواحد نظرا لأن شكل الانتشار ينطبق على خط مستقيم .



شكل (٣-٢٢)
الارتباط والانحدار والمعلمتين التقاطعية والانحدارية

شكل(٣-٢١)
الارتباط والانحدار والمعلمة التقاطعية

أما عن أوجه الاتفاق بين معامل الانحدار الخطي ومعامل الارتباط الخطي فهي تنحصر في تماثل الإشارة . فإذا كان معامل الانحدار موجبا بين متغيرين فلابد أن يكون معامل الارتباط موجبا ، وإذا كان معامل الانحدار سالباً فلابد أن يكون معامل الارتباط سالباً ، وإذا كان معامل الانحدار مساوياً للصفر فلابد أن يكون معامل الارتباط الخطي مساوياً للصفر .

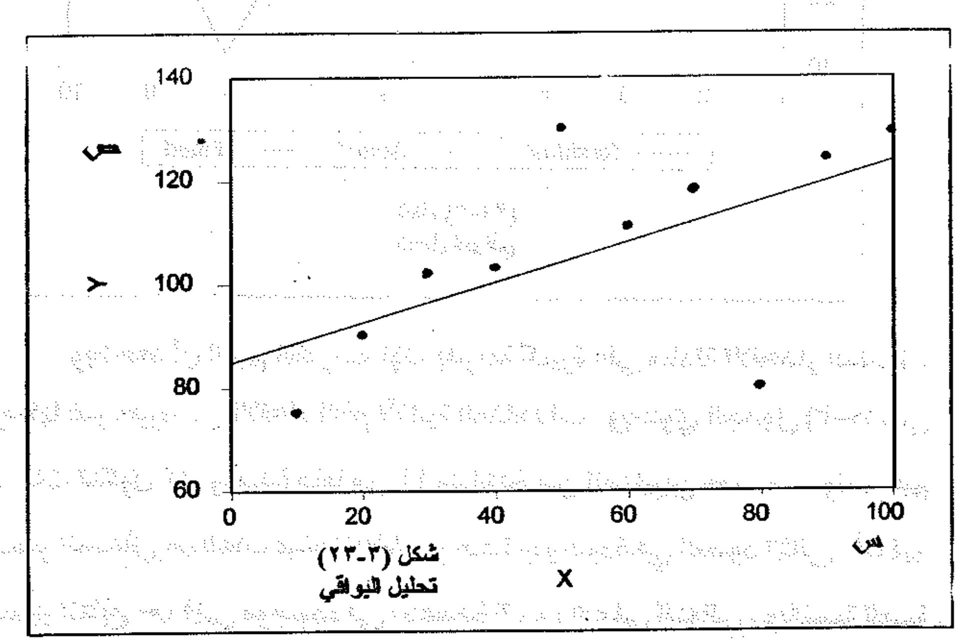
وإذا ثبت أن هناك علاقة سببية بين المتغيرين التابع والمستقل فان معامل الارتباط الخطي البسيط يوضح درجة هذه العلاقة في هذه الحالة .

المبحث الثالث

القيم الخارجة

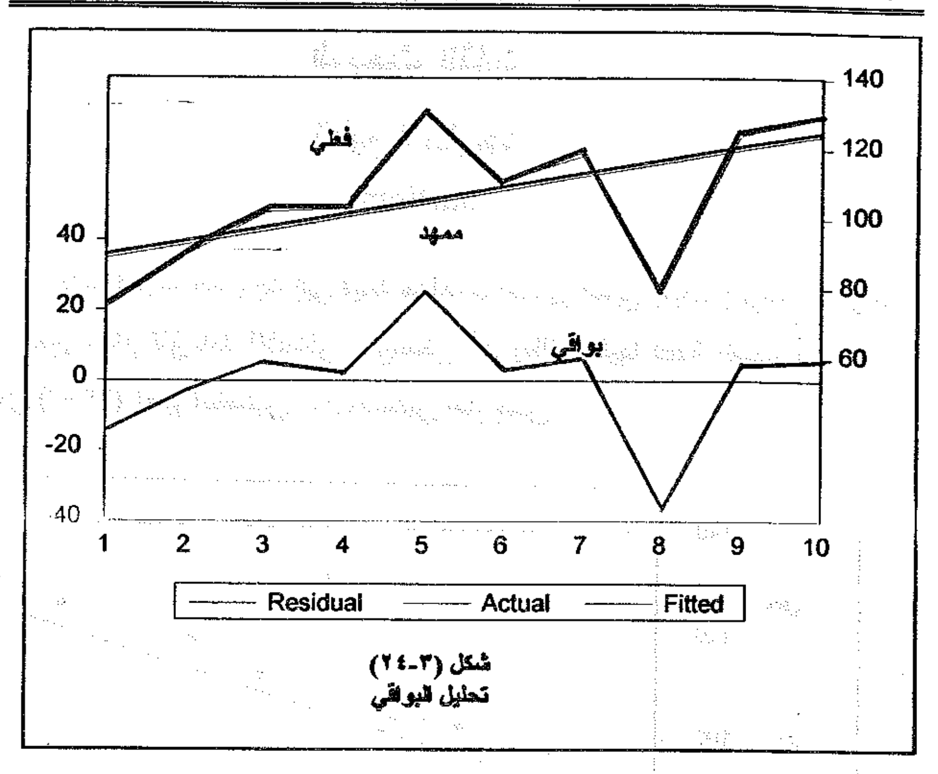
outliers

تشير القيمة الخارجة إلى قيمة مشاهدة للمتغير التابع بعيدة بدرجة ملحوظة عن التجمع العام لنقـاط الانتشار ، ويمكن أن يطلق عليها لفظة القيمة الشـاذة . وبالشكل (٣–٢٣) تعتبر النقطتين أ ، ب قيمتين خارجتين .



شكل (٣-٢٣)
تحليل البواقي

ويمكن التأكد من وجود أو عدم وجود قيم خارجة من خلال تحليل قيم البواقي Residuals ، والتي تشير إلى الفرق بين القيم المشاهدة والقيم المقدرة للمتغير التابع ونرمز لها ر (u_i) . ويوضح الشكل (٣–٢٤) مسار البواقي لعينة ما . ومن الواضح أن القيمتين ٥ ، ٨ هما قيمتان خارجتان نظراً لأن قيمتي البواقي الخاصة بهما تخرجان عن حدود التقلب العام للبواقي والمحددة بالشكل .



شكل (٣-٢٤)
تحليل البواقي

ويلاحظ أن القيم الخارجية تؤثر بدرجة كبيرة على معادلة الانحدار المقدرة ، وتجعلها غير معبرة عن الاتجاه العام لأغلبية المشاهدات . ويحتوي الجدول (٣-٨) على ٤ عينات تتكون كل واحدة منها من ١١ مشاهدة عن المتغيرين ص ، س . وتعتبر قيم المتغير المستقل س للثلاث عينات الأولى واحدة وموجودة في العمود الثاني ، أما قيم المتغير التابع ص فهي موجودة في الأعمدة ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي . وبالنسبة للعينة الرابعة فقيم المتغيرين س ، ص توجد في العمودين الأخيرين . وتمثل القيم التالية جميع العينات :

ن = عدد المشاهدات = ١١ ، $\bar{ص}$ = ٧,٥ ، $\bar{س}$ = ٩

$\sum$ ص^2 = ١١٠ ، $\sum$ س^2 = ٤١,٢٥ ، $\sum$ س ص = ٥٥

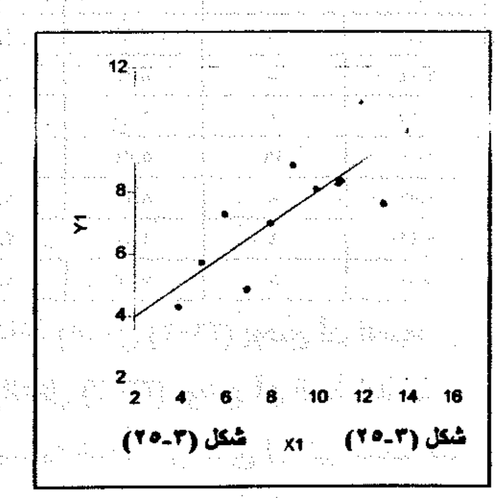
وبتقدير معادلة الانحدار بالنسبة للعينات الأربعة نحصل على صيغة واحدة تتمثل في :

ص^ = ٣ + ,٥ س^
(,١١٨)

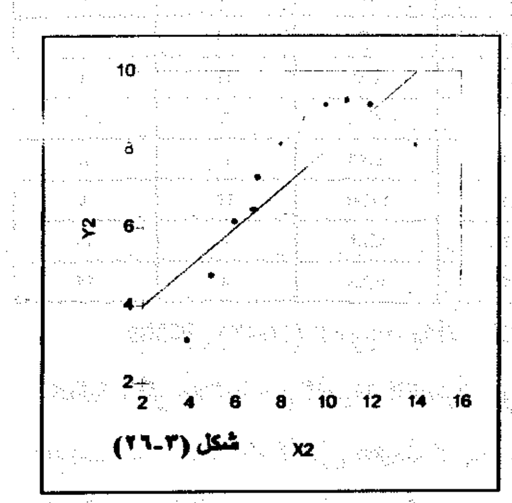
ر ٢ = ,٦٦٧

$$\hat{Y} = 3 + 0.5X$$

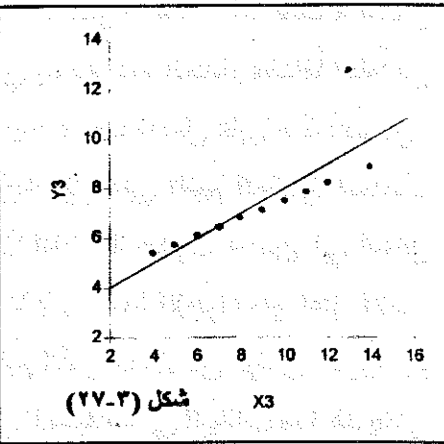
وبالرغم من أن معادلة الانحدار المقدرة متماثلة في الأربعة عينات إلا أن شكل الانتشار الممثل لهذه العينات مختلف بالنسبة لها كما يتضح من الأشكال (٣-٢٥)-(٣-٢٨) .



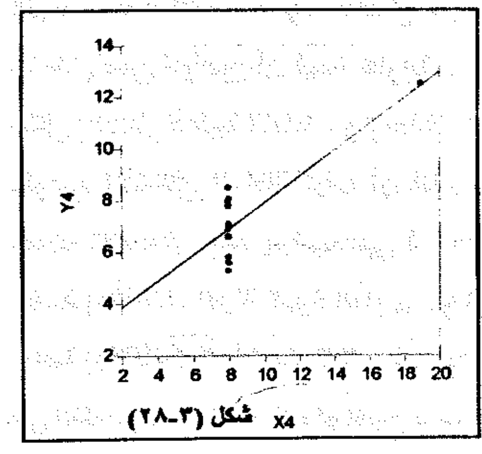
شكل (٣-٢٥)



شكل (٣-٢٦)



شكل (٣-٢٧)



شكل (٣-٢٨)

جدول (٣-٨)

قيم أربع عينات تعطي نفس معادلة الانحدار

(١) المشاهدات	(٢) س١ – س٣	(٣) ص١	(٤) ص٢	(٥) ص٣	(٦) س٤	(٧) ص٤
١	١٠	٨,٠٤	٩,١٤	٧,٤٦	٨	٦,٥٨
٢	٨	٦,٩٥	٨,١٤	٦,٧٧	٨	٥,٧٦
٣	١٣	٧,٥٨	٨,٧٤	١٢,٧٤	٨	٧,٧١
٤	٩	٨,٨١	٨,٧٧	٧,١١	٨	٨,٠٠
٥	١١	٨,٣٣	٩,٢٦	٧,٨١	٨	٨,٤٧
٦	١٤	٩,٩٦	٨,١٠	٨,٨٤	٨	٧,٠٤
٧	٦	٧,٢٤	٦,١٣	٦,٠٨	٨	٥,٢٥
٨	٤	٤,٢٦	٣,١٠	٥,٣٩	١٩	١٢,٥
٩	١٢	١٠,٨٤	٩,١٣	٨,١٥	٨	٥,٥٦
١٠	٧	٤,٨٢	٧,٢٦	٦,٤٢	٨	٧,٩١
١١	٥	٥,٦٨	٤,٧٤	٥,٧٣	٨	٦,٨٩

فالشكل (٣-٢٥) لا توجد بشأنه مشكلة ، والشكل (٣-٢٦) يوضح أن الصيغة غير الخطية أكثر ملائمة من الصيغة الخطية ، والشكل (٣-٢٧) يوضح أن قيمة خارجة قد جذبت خط الانحدار لأعلى بحيث لا يمر بأغلبية النقاط . وبالطبع إذا تم حذف هذه القيمة وأعدنا التقدير فسوف نحصل على معادلة انحدار مختلفة . أما بالنسبة للشكل (٣-٢٨) فمن الواضح أن قيمة خارجة تسببت في إعطاء خط انحدار مختلفاً تماماً عن شكل الانتشار لأغلبية النقاط . ولو حذفنا هذه القيمة فسوف نحصل على خط عمودي . وتوضح الأشكال السابقة كيف أن القيم الخارجة تؤثر على القيم المقدرة لمعلمات معادلة الانحدار. وقد يترتب على استبعاد القيم الخارجة حدوث تحسن في النتائج خاصة إذا كانت العينة كبيرة الحجم . ولكن قد لا يكون هذا الإجراء هو الحل الأمثل خاصة إذا كانت العينة صغيرة الحجم . وقد يستلزم الأمر البحث عن عوامل أخرى تؤثر في الظاهرة محل البحث ، أو القيام بإجراء بعض التعديلات في البيانات مما قد يقضي على هذه القيم الشاذة ، أو استخدام نموذج أكثر ملائمة للتقدير .

الفصل الرابع

تقييم المعلمات المقدرة - اختبارات الفروض

Tests of Hypotheses

لقد أوضحنا في فصل سابق أن هناك ثلاثة أنواع من المعايير التي تستخدم في تقييم المعلمات المقدرة للنموذج ، وهي تنحصر في المعايير الاقتصادية والمعايير الإحصائية والمعايير القياسية . أما عن المعايير الاقتصادية فهي تتمثل في التوقعات القبلية لمعلمات النموذج والتي تتحدد بناءا على ما جاء في النظرية الاقتصادية أو الدراسات السابقة . وفيما يتعلق بنموذج الاستهلاك الذي تعرضنا له في الفصل الثالث فقد أشرنا للتوقعات القبلية الخاصة به في نفس الفصل . ويمكن استخدام هذه التوقعات النظرية في تقييم النموذج المقدر الذي يأخذ الصيغة التالية :

ص = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ س + د ← $Y = 53.7 + 0.78 X + e$

ومن هذه الصيغة يتضح أن :

(١) $\hat{أ}$ = ٥٣,٧ أي أن حد الكفاف الحقيقي للفرد البالغ يساوي ٥٣،٧ جنيه في الشهر، وهو يشير إلى المبلغ الذي ينفقه الفرد على الاستهلاك الحقيقي حتى إذا انخفض دخله إلى الصفر . ويبلغ حد الكفاف للصبي الذي يتراوح عمره بين ٦-١٦ سنه ما يوازي نصف القيمة السابقة وفقا لما حددته الدراسات المتخصصة ، أي ما قيمته ٢٦,٨٥ جنيه . كما يبلغ حد الكفاف للطفل دون السادسة ربع القيمة السابقة ، أي ما يوازي ١٣,٤٣ جنيه في المتوسط . وإذا افترضنا أن المجتمع الذي قدرت له هذه الدالة يتكون من ٢٠ مليون نسمة توزيعهم كالتالي : ٨ مليون طفل أقل من سن السادسة ، ٥ مليون طفل بين السادسة والسادسة عشر ، ٧ مليون من الكبار البالغين ، يمكن حساب حد الكفاف للمجتمع ككل في المتوسط على النحو التالي :

(٨ × ١٣,٤٣) + (٥× ٢٦,٨٥) + (٧ × ٥٣,٧) = (١٠٧,٤٤ + ١٣٤,٢٥ + ٣٧٥,٩) = ٦١٧,٦ مليون جنيه بالأسعار الثابتة.

ولما كانت أ̂ > صفر ، فان هذا يتفق مع التوقعات القبلية المحددة وفقا للنظرية.

(ب) أما عن الميل الحدي للاستهلاك (ب̂) فهو يساوي ٧٨ ،. ولعل هذا يعني أن كل زيادة في الدخل الحقيقي بواحد جنيه تؤدي إلى زيادة الإنفاق الاستهلاكي الحقيقي بمقدار ٧٨ قرش . وحيث أن :

ء ص ÷ ء س = ,٧٨

فإن ء ص = ٠,٧٨ ء س . فإذا كان الدخل القومي قد ازداد بمقدار ٥٠٠ مليون جنيه ، فإن الزيادة في الإنفاق الاستهلاكي =٥٠٠×٧٨ ، =٣٩٠ مليون جنيه . ويتم ادخار ١١٠ مليون جنيه من هذه الزيادة في الدخل . ولما كانت القيمة المقدرة للميل الحدي للاستهلاك أقل من الواحد وأكبر من الصفر، فان هذا يتفق مع التوقعات القبلية المحددة وفقا للنظرية الاقتصادية.

(جـ) يمكن الحصول على دالة الاستهلاك التجميعية على المستوى القومي من الدالة السابقة التي قدرت على أساس قيم متوسطة عن طريق التجميع ، وذلك كما يلي :

Σ ص= ٥٣,٧ ن + ٠,٧٨ Σ س + Σ د

وحيث أن Σ د = صفر ، ن = العدد المكافئ للكبار من سكان المجتمع ، فإن دالة استهلاك المجتمع يمكن كتابتها على النحو التالي :

ص = ٥٣,٧ ن + ٠,٧٨ Σ س ....(٤-١)
$\Sigma Y = 53.7 n + .78 \ \Sigma X$

ومما سبق يتضح أنه طالما اتفقت القيم المقدرة للمعلمات أ̂ ، ب̂ مع التوقعات النظرية القبلية فمن الممكن قبول هذه التقديرات اقتصاديا . أي أن هذه المعلمات المقدرة قد اجتازت الاختبار من وجهة النظر الاقتصادية .

وسوف نركز فيما تبقى من هذا الفصل على الاختبارات الإحصائية على أن نرجئ الاختبارات القياسية لفصول تالية . وتعتبر المعايير الإحصائية واحدة من المعايير التي تستخدم في تقييم المعلمات المقدرة للنموذج . وتنقسم هذه المعايير إلى نوعين :

١- اختبار جودة التوفيق وهو يستخدم للحكم على المقدرة التفسيرية للنموذج.

٢- اختبارات المعنوية ، وهي تستخدم لقياس درجة الثقة في المعلمات المقدرة من العينة كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع.

ويحتوي هذا الفصل على عدد من المباحث تتمثل في :

المبحث الأول : اختبار جودة التوفيق

المبحث الثاني : اختبارات المعنوية –اختبار الخطأ المعياري

المبحث الثالث : اختبارات المعنوية – اختبار " ز" Z test

المبحث الرابع : اختبارات المعنوية – اختبار "ت" T test

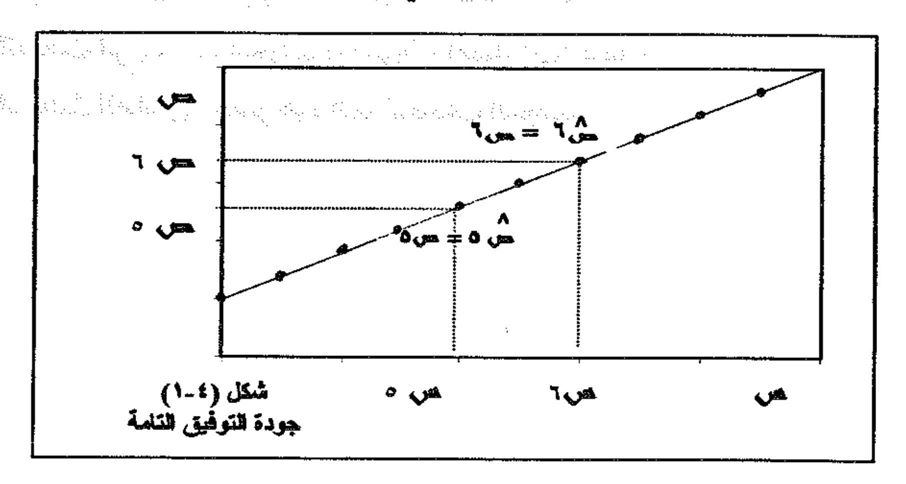
المبحث الخامس : تقدير فترة الثقة لمعلمات المجتمع

المبحث الأول

اختبار جودة التوفيق

The Test of the Goodness of Fit

يعتبر خط الانحدار المقدر $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\ س$ توفيقاً لنقاط الانتشار التي تمثل القيم المشاهدة للمتغيرين س ، ص . ولو أن هذا الخط يمر بجميع النقاط التي تمثل القيم المشاهدة ، فان جودة التوفيق سوف تكون عند حدها الأقصى ، ذلك لأن القيم المقدرة للمتغير التابع ص وفقا لخط الانحدار المقدر سوف تكون منطبقة تماما على القيم المشاهدة ص ، كما هو واضح في الشكل (٤-١) .



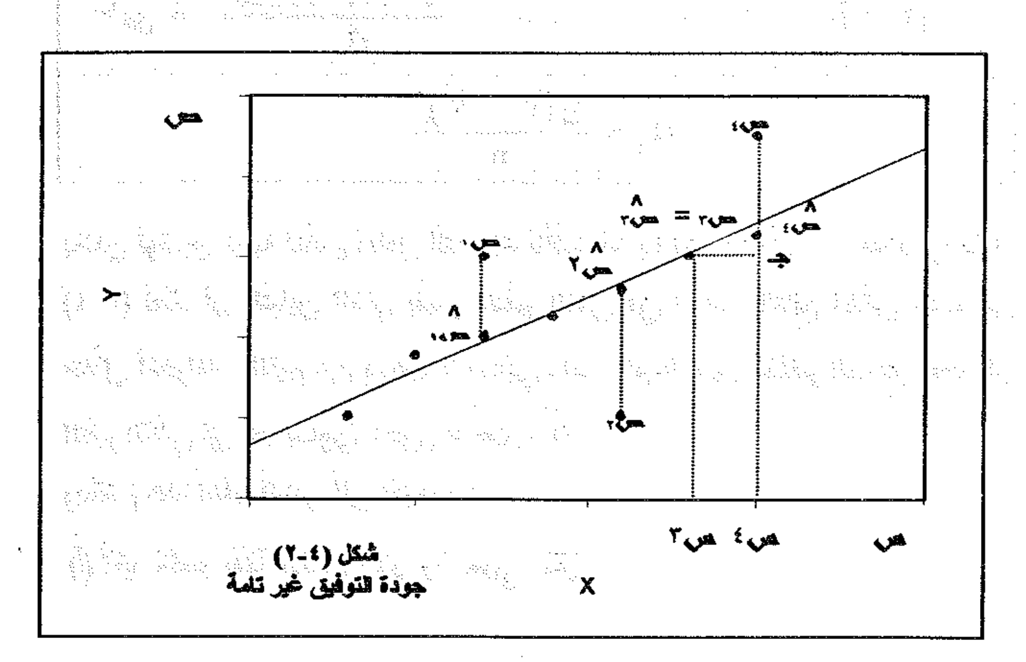
شكل (٤-١)
جودة التوفيق التامة

وفي هذه الحالة نجد أن الانحرافات بين القيم المقدرة $\hat{ص}_ر$ والقيم المشاهدة $ص_ر$ تساوي صفرا . ومن ثم فان التغير في المتغير التابع $ص_ر$ يمكن تفسيره بالكامل بالتغير في المتغير المستقل $س_ر$. أي أن خط الانحدار يفسر ١٠٠ ٪ من التغيرات في المتغير التابع ، ولا يوجد هناك أي انحرافات عشوائية . ويتضح هذا من الشكل (٤-١) حيث نجد أن التغير في المتغير التابع من $ص_٥$ إلى $ص_٦$ مثلا يرجع بكامله للتغير في المتغير المستقل من $س_٥$ إلى $س_٦$ ولا يوجد هناك انحرافات عشوائية

حيث ص . = ص̂ . ، ص، = ص̂ ، . ومن ثم فان المقدرة التفسيرية تصل لحدها الأقصى عندما تكون جودة التوفيق تامة .

أما إذا كان خط الانحدار المقدر لا يمر بجميع النقاط التي تمثل القيم المشاهدة، وإنما يمر ببعضها ولا يمر بالبعض الآخر ، فان جودة التوفيق في هذه الحالة لا تكون تامة حيث يوجد هناك انحرافات بين القيم المقدرة والقيم المشاهدة. ويلاحظ أنه كلما زادت انحرافات القيم المقدرة ص̂ , عن القيم المشاهدة ص , كلما قلت جودة التوفيق ، والعكس صحيح . ولاشك أن انخفاض جودة التوفيق تعني انخفاض المقدرة التفسيرية للنموذج . ويمكن ملاحظة ذلك من الشكل (٤-٢) ، حيث أن تغير المتغير التابع من ص. إلى ص، بالمقدار " جـ ص،" يرجع إلى التغير في المتغير التفسيري (من س. إلى س،) ، ويتبقى الجزء "ص، ص̂ ، " بدون تفسير وهو يمثل انحراف عشوائي . أي أن :

النسبة المفسرة = $\frac{جـ ص̂_٤}{جـ ص_٤}$ ؛ والنسبة غير المفسرة = $\frac{ص_٤ ص̂_٤}{جـ ص_٤}$



شكل (٤-٢)
جودة التوفيق غير تامة

وهكذا كلما زاد انحراف القيم المشاهدة عن القيم المقدرة (ص ر - ص̂ ر) كلما قلت جودة التوفيق ، وكلما انخفضت المقدرة التفسيرية للنموذج، أي زادت النسبة غير المفسرة . ومما سبق نجد أن هناك ارتباطاً تاماً بين جودة التوفيق والمقدرة التفسيرية، ومن ثم يمكن اعتبار مقياس جودة التوفيق هو نفسه مقياس المقدرة التفسيرية للنموذج . ويستخدم معامل التحديد Determination Coefficient في اختبار جودة التوفيق أو المقدرة التفسيرية للنموذج .

(٤-١-١-١) معامل التحديد (ر٢) R^2 :

يشير معامل التحديد إلى النسبة المئوية من التغير الكلي في المتغير التابع (ص) التي يمكن تفسيرها بدلالة المتغير المستقل (المتغيرات المستقلة) المدرج بالدالة محل القياس (س).

ولما كان التغير الكلي في المتغير التابع يقاس بدلالة التباين (ع٢ص) S_y^2 حيث:

ع٢ص = مج (ص - ص̄)٢ / ن ....(٤-٢)
$S_y^2 = \frac{\sum (Y - \overline{Y})^2}{n}$

يمكن توضيح كيفية قياس معامل التحديد بالاستعانة بالشكل (٤-٣) . فبالنظر للشكل (٤-٣) نجد أن التباين الذي يقيس التغير الكلى في المتغير التابع يمكن قياسه من خلال انحرافات القيم عن وسطها الحسابي . فعند القيمة س ر للمتغير المستقل نجد أن التغير الكلي في ص يساوي : ص ر = ص ر - ص̄

وينقسم هذا التغير الكلي إلى جزءين :

(أ) تغير مفسر بدلالة الانحدار=ص̂ ر= ص̂ر- ص̄

$$\hat{y}_i = \hat{Y} - \bar{Y}$$

(ب) تغير عشوائي = د ر = ص ر − صْ ر

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

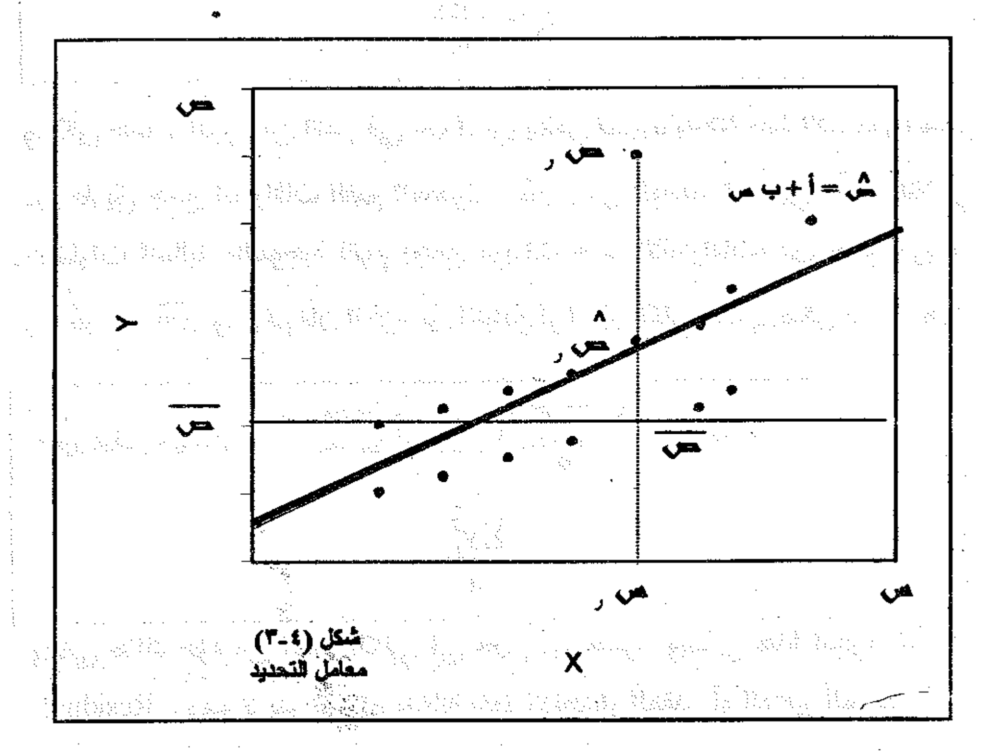
حيث ص ر = صْ ر + د ر أو

ص ر − ص̄ = (صْ ر − ص̄) + (ص ر − صْ ر)

$$y_i = \hat{y}_i + e_i = Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

والنسبة المفسرة = (صْ ر − ص̄) / (ص ر − ص̄) = صْ ر / ص ر

$$= \frac{\hat{y}_i}{y_i}$$



شكل (٤-٣)
معامل التحديد

ولحساب التغير الكلي في المتغير التابع عند جميع قيم المتغير المستقل لابد أن نجمع كل انحرافات قيم ص عن وسطها الحسابي والتي تتمثل في المسافات $ص_ر - \bar{ص}$ على الرسم . ولكن حيث أن هذه الانحرافات منها ما هو موجب ومنها ما هو سالب فإن $\sum ص_ر = $ صفر . ولتلاشي ذلك نقوم بقياس التغير الكلي في ص عن طريق مجموع مربعات انحرافات القيم عن $\bar{ص}$. ويعتبر التباين هو المقياس المعبر في هذه الحالة عن التغير الكلي في المتوسط ، حيث :

$$\text{متوسط التغير الكلي في المتغير التابع} = ع^2_ص = \frac{\sum (ص_ر - \bar{ص})^2}{ن} = \frac{\sum ص^2_ر}{ن} \quad \dots\dots(٤-٣)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}$$

ويمكن حساب الجزء من التغير في ص الذي يمكن تفسيره بدلالة خط الانحدار المقدر عن طريق جمع انحرافات القيم المقدرة $\hat{ص}_ر$ عن الوسط الحسابي $\bar{ص}$.ولتلاشي الإشارات السالبة والموجبة نقوم بجمع مربعات هذه الانحرافات، أي جمع مربعات ($\hat{ص}_ر - \bar{ص}$). ومن ثم فان الجزء من التباين أو التغير الكلي الذي يمكن تفسيره هو:

$$\text{التغير المفسر في المتوسط} = \frac{\sum (\hat{ص} - \bar{ص})^2}{ن} = \frac{\sum \hat{ص}^2_ر}{ن} \quad \dots\dots(٤-٤)$$

$$= \frac{\sum \hat{y}_i^2}{n}$$

ويبقى هناك جزء من التغير الكلي في $ص_ر$ غير مفسر. ويسمى هذا الجزء المتبقي Residual ، وهو لا يتم تفسيره بدلالة خط الانحدار المقدر أو المتغير المستقل $س_ر$ ، وإنما يرجع وجوده للمتغير العشوائي $ع_ر (u_i)$. ويمكن إيجاد مقياس لهذا الجزء غير المفسر

عن طريق الحصول على مجموع مربعات الانحرافات د ر = (ص ر - ص̂ ر) . أي أن الجزء غير المفسر من التباين الكلي في المتوسط يساوي :

$$\frac{\sum د_ر^2}{ن} = \frac{\sum (ص_ر - \hat{ص}_ر)^2}{ن} \quad \text{........(٤-٥)}$$

$$\frac{\sum e_i^2}{n} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}$$

والمطلوب هنا الآن هو إثبات أن :

$$\frac{\sum ص_ر^2}{ن} = \frac{\sum \hat{ص}_ر^2}{ن} + \frac{\sum د_ر^2}{ن} \quad \text{........(٤-٦)}$$

$$\frac{\sum y_i^2}{n} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{n} + \frac{\sum e_i^2}{n}$$

التغير الكلي في ص = التغير المفسر + التغير غير المفسر

ولإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية :

(I) د ر = ص ر - ص̂ ر = انحراف القيم المشاهدة عن خط الانحدار المقدر

(II) ص ر = ص ر - ص̄ = انحراف القيم المشاهدة عن وسطها الحسابي

(III) ص̂ ر = ص̂ ر - ص̄ = انحراف القيم المقدرة عن وسطها الحسابي

وبربط هذه المعادلات مع بعضها البعض نجد أن :

ص ر = ص ر + ص̄ من (II)

ص̂ ر = ص̂ ر + ص̄ من (III)

وبالتعويض في (I) عن ص ر، ص̂ ر نحصل على :

$$د_ر = ص_ر + \bar{ص} - \hat{ص}_ر - \bar{ص} = ص_ر - \hat{ص}_ر \quad \text{........(٤-٧)}$$

ص ر = صَ ر + د ر ....(٤-٨)

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

والمعادلة (٤-٨) تعني أن كل انحراف من انحرافات القيم المشاهدة صر عن وسطها الحسابي يحتوي على عنصرين أولهما يمكن تفسيره بواسطة خط الانحدار المقدر وهو الجزء صَ ر والآخر غير مفسر ويتمثل في د ر . ومن المعادلة (٤-٨) نجد أن :

∑ ص ر^٢ = ∑ صَ ر^٢ + ∑ د ر^٢ + ٢ ∑ صَ ر د ر ....(٤-٩)

والمطلوب هو إثبات أن ∑ صَ ر د ر = صفر حتى نصل إلى النتيجة التي نبتغي الوصول اليها في المعادلة (٤-٦).

(IV) صَ ر = أ̂ + ب̂ س ر ، صَ̄ = أ̂ + ب̂ س̄

وبالتعويض من (IV) في (III) نحصل على :

صَ ر = أ̂ + ب̂ س ر - أ̂ - ب̂ س̄

صَ ر = ب̂ (س ر - س̄) = ب̂ س ر ....(٤-١٠)

وبالتعويض من (٤-١٠) في (٤-٧) نحصل على :

د ر = ص ر - ب̂ س ر ....(٤-١١)

$$\therefore \sum \hat{ص}_ر\, د_ر = \sum (\hat{ب}\, س_ر)(ص_ر - \hat{ب}\, س_ر)$$

$$= \sum (\hat{ب}\, س_ر ص_ر - \hat{ب}^2 س_ر^2)$$

$$\therefore \sum \hat{ص}_ر\, د_ر = \hat{ب}\left(\sum س_ر ص_ر - \hat{ب} \sum س_ر^2\right) \quad \text{.............(٤-١٢)}$$

وبالتعويض عن ب من (٣-١٧) في (٤-١٢) نحصل على :

$$\sum \hat{ص}_ر\, د_ر = \hat{ب}\left(\sum س_ر ص_ر - \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sum س_ر^2} \cdot \sum س_ر^2\right) = \text{صفر} \quad \text{....(٤-١٣)}$$

وبالتعويض من (٤-١٣) في (٤-٩) مع القسمة على ن نحصل على :

$$\frac{\sum ص_ر^2}{ن} = \frac{\sum \hat{ص}_ر^2}{ن} + \frac{\sum د_ر^2}{ن} \quad \text{.............(٤-١٤)}$$

وهذه هي النتيجة التي أردنا إثباتها في (٤-٦).

$$\text{وحيث أن معامل التحديد} = \frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلي}}$$

$$\therefore \text{معامل التحديد} = \frac{\sum \hat{ص}_ر^2 / ن}{\sum ص_ر^2 / ن} = \frac{\sum \hat{ص}_ر^2}{\sum ص_ر^2} \quad \text{.............(٤-١٥)}$$

حيث :

التغير الكلي $= \sum ص_ر^2 =$ TSS = Total Sum of Squares

التغير المفسر $= \sum \hat{ص}_ر^2 =$ RSS = Regression Sum of Squares

التغير غير المفسر $= \sum د_ر^2 =$ ESS = Error Sum of Squares

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS}$$

ومن الواضح أن معامل التحديد لا يتأثر بوحدات القياس حيث أنه مقياس نسبي .

(٤-١-٢) معامل التحديد و معامل الارتباط

يوجد هناك علاقة بين معامل الارتباط ومعامل التحديد . فبالتعويض من (٤-١٠) في (٤-١٥) نجد أن :

$$\text{معامل التحديد} = \frac{\sum (\hat{ب}\, س_ر)^2}{\sum ص_ر^2} = \hat{ب}^2 \frac{\sum س_ر^2}{\sum ص_ر^2} \quad \ldots\ldots (٤\text{-}١٦)$$

وبالتعويض عن $\hat{ب}$ من (٣-١٧) نجد أن :

$$\text{معامل التحديد} = \frac{(\sum س_ر ص_ر)^2}{(\sum س_ر^2)^2} \cdot \frac{\sum س_ر^2}{\sum ص_ر^2}$$

$$\text{معامل التحديد} = \frac{(\sum س_ر ص_ر)^2}{\sum س_ر^2 \sum ص_ر^2} = ر^2 \quad \ldots\ldots\ldots (٤\text{-}١٧)$$

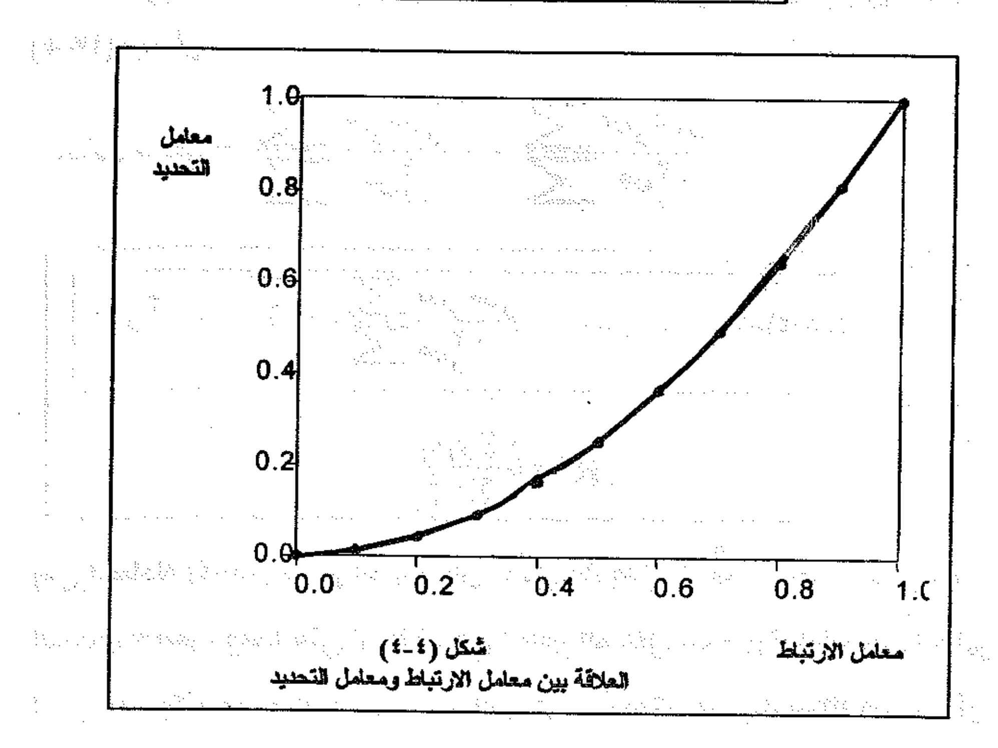
$$R^2 = \frac{(\sum y_i x_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$$

وبمقارنة المعادلتين (٣-٢) ، (٤-١٧) نجد أن معامل التحديد يساوي مربع معامل الارتباط . ومن ثم فانه كلما زاد معامل الارتباط كلما زاد معامل التحديد. غير أن العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل التحديد ليست خطية ، فهي تأخذ الشكل (٤-٤) الذي يعبر عن الجدول (٤-١) .

جدول (٤-١)

العلاقة بين معامل التحديد ومعامل الارتباط

معامل الارتباط	معامل التحديد
٠,١	٠,٠١
٠,٢	٠,٠٤
٠,٣	٠,٠٩
٠,٤	٠,١٦
٠,٥	٠,٢٥
٠,٦	٠,٣٦
٠,٧	٠,٤٩
٠,٨	٠,٦٤
٠,٩	٠,٨١
١	١



شكل (٤-٤)
العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل التحديد

فعندما يكون" ر" =٠,١ يكون " ر^{٢}" =٠,٠١ ، وعندما يزداد " ر" إلى ٠,٢ يزداد "ر^{٢}" إلى ٠,٠٤ وهكذا فان معامل التحديد يزداد بمعدل متزايد نتيجة لزيادة معامل الارتباط بمقدار معين .

ومعامل الارتباط لا ينطوي على علاقة سببية بالضرورة بين المتغيرين محل البحث ، وإن كان معامل التحديد ينطوي على مثل هذه العلاقة نظراً لعلاقته بمعامل الانحدار كما سوف يتضح فيما بعد. فإذا كان ر^{٢} =٠,٨ مثلا فان هذا يعني أن خط الانحدار المقدر يعطي توفيقاً جيداً للبيانات المشاهدة ، حيث يفسر المتغير المستقل س في هذه الحالة ٨٠ ٪ من التغير الكلي في ص . ولكن يتعين ملاحظة أن معامل التحديد لا ينطوي على علاقة سببية إلا إذا كان معامل الانحدار المقدر له معنوية إحصائية .

(٤-١-٣) معامل التحديد ومعامل الانحدار

توجد هناك علاقة طردية بين معامل الانحدار ومعامل التحديد . فمن المعادلة (٤-١٧) نجد أن :

$$\text{معامل التحديد} = \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sum س_ر^2} \cdot \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sum ص_ر^2}$$

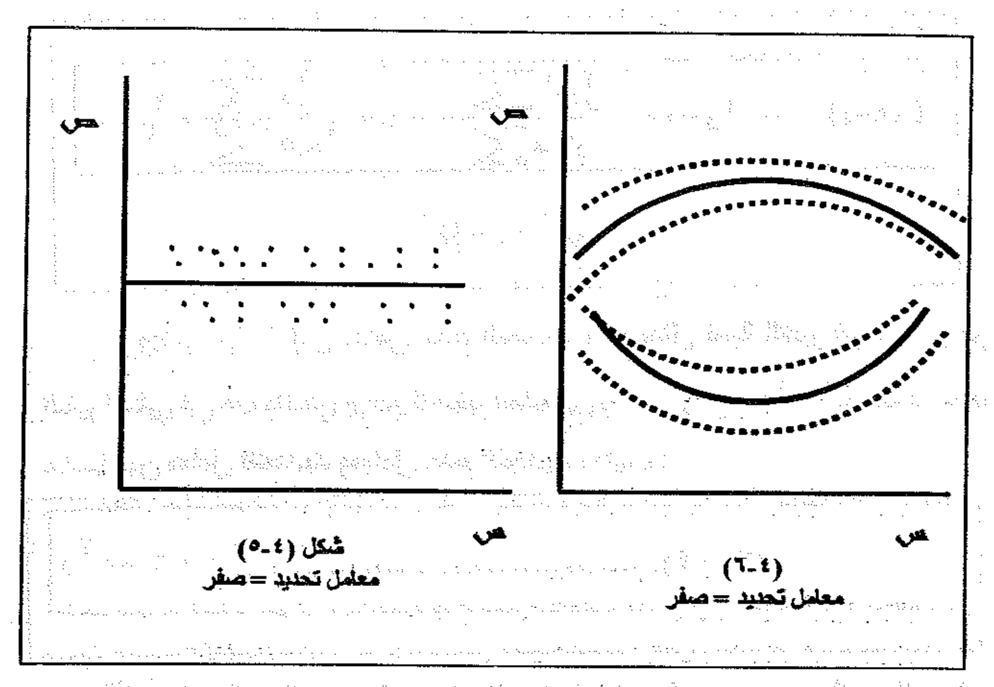
$$\therefore ر^2 = \hat{ب} \frac{\sum س_ر ص_ر}{\sum ص_ر^2} \quad ....(١٨-٤)$$

$$R^2 = \hat{b}\frac{\sum y_i x_i}{\sum y_i^2}$$

ومن المعادلة (٤-١٨) يتضح أنه إذا كان معامل الانحدار " $\hat{ب}$ " =صفر ، فان معامل التحديد = صفر . وهذا يعني أن التغير في المتغير المستقل س لا يؤثر تماما على المتغير التابع ص ، ولا يوجد هناك أي نسبة من التغير في ص يمكن تفسيرها بدلالة س . أي أن

مقدرة النموذج على التفسير تكون منعدمة . وفي هذه الحالة يأخذ خط الانحدار أحد الأشكال (٤-٥) ، (٤-٦).

ولأن إشارة " $\hat{ب}$ " هي نفسها إشارة $\sum$ س ر ص ر فان العلاقة بين معامل التحديد ومعامل الانحدار " $\hat{ب}$ " لابد أن تكون طردية . ومن ثم فان كل زيادة في قيمة المعلمة الانحدارية المقدرة تنطوي على زيادة في المقدرة التفسيرية للنموذج لأنها تزيد من درجة استجابة المتغير التابع للتغير في المتغير المستقل .



شكل (٤-٥)
معامل تحديد = صفر

(٤-٦)
معامل تحديد = صفر

(٤-١-٤) معامل التحديد ومعامل عدم التحديد

Determination and Nondetermination Coefficient

وبقسمة طرفي المعادلة (٤-١٤) على : $\frac{\sum ص_ر^2}{ن}$: نحصل على :

$$\frac{\sum ص_ر^{\wedge 2}}{\sum ص_ر^2} + \frac{\sum د_ر^2}{\sum ص_ر^2} = ١$$

$$\therefore م^2 = \frac{\sum د_ر^2}{\sum ص_ر^2} = ١ - \frac{\sum ص_ر^{\wedge 2}}{\sum ص_ر^2} = ١ - ر^2 \quad .... \quad (٤-١٩)$$

$$M^2 = 1 - R^2$$

ويشير "م٢" إلى معامل عدم التحديد وهو يمثل نسبة التغير غير المفسر من التغير الكلي في ص والذي يرجع للمتغير العشوائي ($د_ر$). وحري بالذكر أن هناك علاقة عكسية بين معامل التحديد ومعامل عدم التحديد ، حيث :

$$ر^2 = ١ - م^2 \quad .... \quad (٤-٢٠)$$

فإذا كانت كل القيم المشاهدة تنطبق على خط الانحدار المقدر فان الحد العشوائي سوف يساوي الصفر ، أي أن معامل عدم التحديد = صفر ، ومن ثم فان معامل التحديد = ١ . أما إذا كان هناك انحرافات بين القيم المشاهدة والقيم المقدرة على خط الانحدار فان معامل عدم التحديد سوف يكون أكبر من الصفر ، و من ثم فان معامل التحديد سوف يكون أقل من الواحد . وإذا لم يفسر خط الانحدار المقدر أي قدر من التغير في ص ، فإن كل التغير في ص يكون غير مفسر ، ومن ثم فان معامل التحديد = صفر ،

ومعامل عدم التحديد = ١ . وهكذا توجد هناك علاقة عكسية بين معاملي التحديد وعدم التحديد ، وتتراوح قيمة كل منهما بين الواحد والصفر .

مثال (٤-١)

حساب معامل التحديد

باستخدام بيانات نموذج الاستهلاك الموضحة بالجدولين (٣-٦) ، (٣-٧) نجد أن :

$$\text{معامل عدم التحديد} = \frac{\sum د_ر^٢}{\sum ص_ر^٢} = \frac{١٥٠٢٠}{٨٤٩٠٠٠} = ٠,٠٢$$

$$\therefore \text{معامل التحديد} = ر^٢ = ١ - م^٢ = ١ - ٠,٠٢ = ٠,٩٨$$

وباستخدام معامل الانحدار :

$$\text{معامل التحديد} = \hat{ب} \; \frac{\sum ص_ر س_ر}{\sum ص_ر^٢} = ٠,٧٨ \; \frac{١٠٦٩٠٠٠}{٨٤٩٠٠٠} = ٠,٩٨$$

وهذا يعني أن ٩٨ ٪ من التغير في الاستهلاك يمكن تفسيره بالتغير في الدخل . ولاشك أن هذه النتيجة تشير إلى أن نموذج الاستهلاك المقدر يتمتع بجودة توفيق عالية كما أنه يتمتع بمقدرة تفسيرية عالية .

(٤-١-٥) معامل التحديد في حالة دالة الانحدار النسبية

يصلح معامل التحديد الموضح في الصيغة (٤-١٥) في حالة دالة الانحدار غير النسبية التي يوجد بها معلمة تقاطعية ، حيث أن الصيغة التالية :

$$\sum ص_ر^٢ = \sum \hat{ص}_ر^٢ + \sum د_ر^٢$$

$$TSS = RSS + ESS$$

لا تكون صحيحة إلا في حالة وجود معلمة تقاطعية بمعادلة الانحدار . أما في حالة معادلة الانحدار النسبية التي لا يوجد بها معلمة تقاطعية فان الصيغة (٤-١٥) لا تكون صالحة لحساب معامل التحديد ، حيث أن استخدامها قد يعطي لنا قيم سالبة أو أكبر من الواحد. والصيغة التي تنطبق في حالة دالة الانحدار النسبية هي :

$$\sum ص_ر^٢ = \sum \hat{ص}_ر^٢ + \sum د_ر^٢ \quad ....(٤-٢٠)$$

$$\Sigma Y_i^2 = \Sigma \hat{Y}_i^2 + \Sigma e_i^2$$

ولذا فان صيغة معامل التحديد الملائمة هي :

$$ر^٢ = ١ - \frac{\sum د_ر^٢}{\sum ص_ر^٢} \quad ....(٤-٢١)$$

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{\Sigma Y_i^2}$$

ولكن يلاحظ أن الصيغة (٤-٢١) غير قابلة للمقارنة مع الصيغة (٤-١٥) لاختلاف المقام في الحالتين .

(٤-١-٦) الانحدار العكسي ومعامل التحديد

إذا كان لدينا متغيرين هما ص (Y) ، س (X) فإن الانحدار المباشر Direct Regression بينهما يأخذ الصيغة العامة التالية :

$$ص = د(س) \leftarrow Y = f(X) \quad ....(٤-٢٢)$$

أما الانحدار العكسي Inverse Regression فيأخذ الصيغة العامة التالية :

$$س = د'(ص) \leftarrow X = f'(Y) \quad ....(٤-٢٣)$$

وفي بعض الحالات يكون هناك معنى من الناحية الاقتصادية للاتجاهين. فإذا كانت ص (Y) = مستوى الدخل ، س (X) = مستوى التعليم ، فان اختبار مدى تأثير مستوى التعليم على الدخل يقتضي قياس العلاقة المباشرة الممثلة بالصيغة (٤-٢٢) ، أما اختبار مدى تأثير مستوى الدخل على مستوى التعليم فيقتضي قياس العلاقة العكسية الممثلة في الصيغة (٤-٢٣) .

وإذا كانت علاقة الانحدار المباشر تأخذ الصيغة الخطية التالية :

ص = أ + ب س + ع ← $Y = a + bX + u$ ....(٤-٢٤)

فان

ب = $\frac{\sum ص س}{\sum س^2}$

$b = \frac{\sum yx}{\sum x^2}$ ....(٤-٢٥)

أ = $\bar{ص}$ - ب $\bar{س}$ ← $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ ....(٤-٢٦)

أما في حالة الانحدار العكسي فإن:

س = أ' + ب' ص + و ← $X = \grave{a} + \grave{b}Y + w$ ....(٤-٢٧)

ومن ثم فإن :

ب' = $\frac{\sum ص س}{\sum ص^2}$

$b' = \frac{\sum yx}{\sum y^2}$ ....(٤-٢٨)

$$\text{أ}' = \bar{\text{س}} - \text{ب}'\bar{\text{ص}} \longrightarrow a' = \bar{X} - b'\bar{Y} \quad \text{.......................... (٤-٢٩)}$$

ويلاحظ أن معامل التحديد متماثل في حالتي الصيغة المباشرة والصيغة العكسية للانحدار، حيث :

$$\text{ر}^{2} = \text{ب ب}' = \frac{(\sum \text{ص س})^{2}}{\sum \text{س}^{2} \sum \text{ص}^{2}} \quad \text{.......................... (٤-٣٠)}$$

$$R^{2} = bb' = \frac{(\sum yx)^{2}}{\sum x^{2} \sum y^{2}}$$

مثال (٤-٢)

تقدير دالتى الإنتاج والعمالة

افترض أن البيانات التالية تشير إلى حجم الإنتاج ص (Y)، والعمالة س (X) في عدد من المنشآت العاملة في مجال معين .

جدول (٤-٢)

بيانات العمالة والإنتاج

مشاهدة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
س	٢٢	٢٠	٢٤	١٢	٢٠	١٤	١٨	٢٠	٢٢	٢٠
ص	٢٠	١٤	٢٠	١٠	١٦	١٦	١٢	١٤	١٨	٢٠

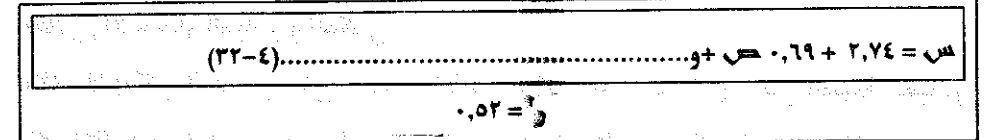
والمطلوب هو اختبار أثر العمالة على الإنتاج (العلاقة المباشرة) ، واختبار أثر الإنتاج على العمالة (علاقة الانحدار العكسي) .

وبتقدير علاقة الانحدار المباشرة نحصل على المعادلة (٤-٣١) والممثلة لشكل الانتشار (٤-٧) .

$$\text{ص} = ٧,٢ + ٠,٧٥\ \text{س} + \text{ع} \quad \text{.......................... (٤-٣١)}$$

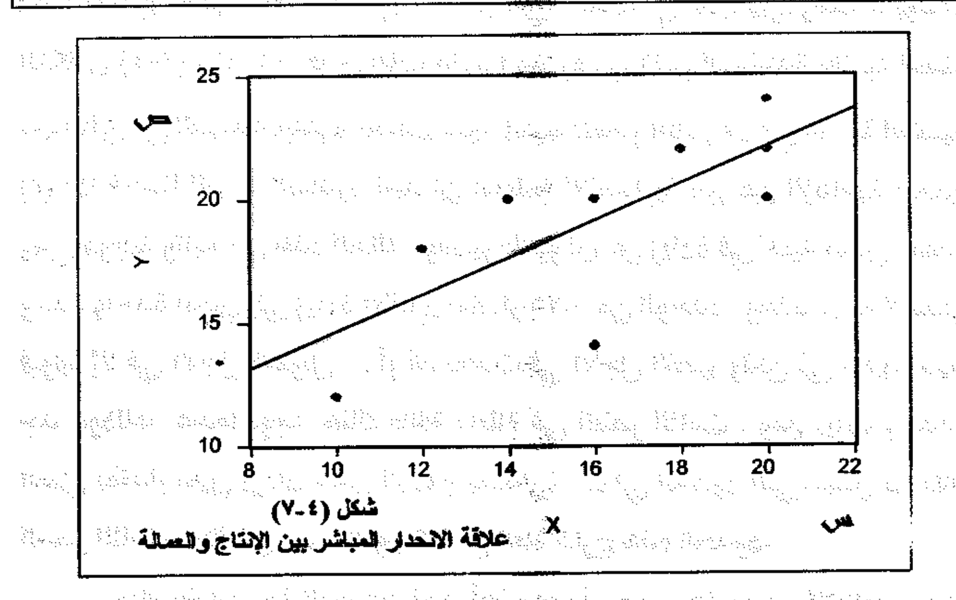
$$\text{ر}^{2} = ٠,٥٢$$

وبتقدير علاقة الانحدار العكسية نحصل على المعادلة (٤-٣٢) والممثلة لشكل الانتشار (٤-٨) .

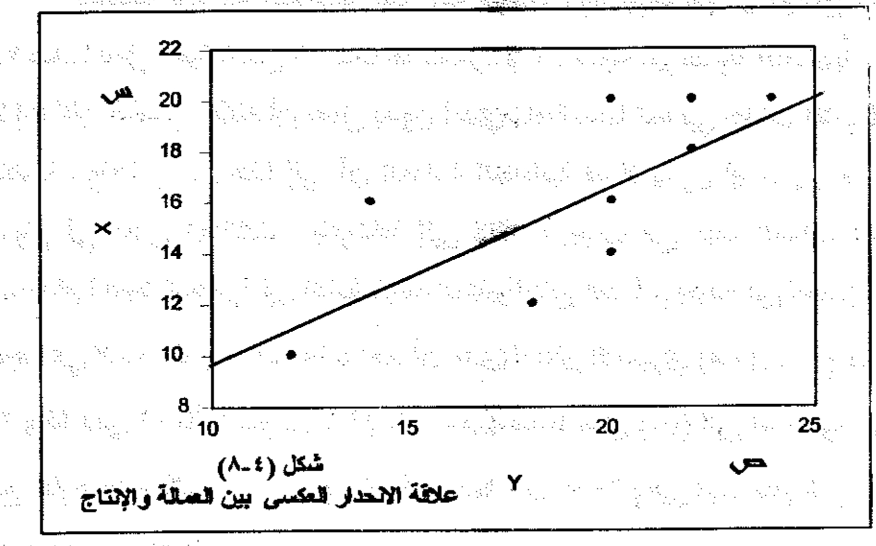


س = ٢,٧٤ + ٠,٦٩ ص +و...(٤-٣٢)

ر² = ٠,٥٢



شكل (٤-٧)
علاقة الانحدار المباشر بين الإنتاج والعمالة



شكل (٤-٨)
علاقة الانحدار العكسى بين العمالة والإنتاج

ومن النتائج التي يمكن التوصل إليها مما سبق :

(١) ر^{٢} = ب ب̸= ٠,٧٥ × ٠,٦٩ = ٠,٥٢. ويلاحظ أن معامل التحديد متماثل في حالتي الانحدار المباشر و العكسي .

(٢) لا يمكن الحصول على الصيغة العكسية للانحدار (٤-٣٢) من الصيغة المباشرة (٤-٣١) بدون تقدير ، وذلك لوجود حد عشوائي مختلف في الصيغتين، وهذا ما يوضحه الشكلان (٤-٧) ، (٤-٨) . فانحرافات القيم المقدرة عن القيم المشاهدة بالنسبة للمتغير ص التابع في الصيغة المباشرة تختلف عنها بالنسبة للمتغير التابع س في الصيغة العكسية.

(٣) إذا فحصنا الصيغة المباشرة نجد أن المعلمة الانحدارية تعبر عن الإنتاجية الحدية وهي موجبة وثابتة في هذه الحالة . وتفسيرها هو أن كل زيادة في كمية العمل بمقدار وحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار ٠.٧٥ من الوحدة . وهذه نتيجة لا يمكن قبولها إلا في الأجل الطويل . أو قد تحدث في الأجل القصير ولكن في حدود ضيقة جداً ،وذلك عندما توجد هناك طاقة عاطلة في العنصر الثابت ، ومع زيادة وحدات العمل بمقدار معين يزداد حجم الإنتاج بمقدار ثابت في الحدود التي تسمح بها طاقة العنصر الثابت . وبالطبع يسود قانون تناقص الغلة خارج هذه الحدود.

وبالنسبة للمعلمة التقاطعية نجد أنها موجبة ، وتفسيرها هو أن الإنتاج يساوي ٧,٢ عندما تصل كمية العمل المستخدمة للصفر . وهذه نتيجة غير مقبولة اقتصادياً . اللهم إلا إذا كان المصنع يمكنه أن يعمل بدون أيدي عاملة تماما كما في حالات الأتوماتيكية الكاملة . ونخلص من هذا إلى أن المعلمة التقاطعية قد لا يكون لها معنى اقتصادي مقبول في بعض الحالات . بالإضافة إلى ذلك لا يجب في حالة العينات الصغيرة استخدام الصيغة المقدرة في التنبؤ بقيمة المتغير التابع عند قيم بعيدة عن المدى الذي يوجد في العينة . ففي حالتنا هذه نجد أن مدى المتغير التفسيري (س) يتراوح بين ١٠، ٢٠ ولذا فمن الخطأ التنبؤ بقيمة الإنتاج (ص) عندما تصل (س) إلى الصفر وهي قيمة تقع خارج مدى العينة بدرجة كبيرة ، أو عندما س = ٣٠ وهي قيمة تقع خارج نطاق العينة أيضا بدرجة كبيرة.

(٤) يمكن الحصول على العلاقة العكسية من العلاقة المباشرة في حالة واحدة فقط وهي عندما يكون معامل التحديد مساوياً الواحد ، ففي هذه الحالة لا يوجد حد عشوائي . أي أن :

$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{س}$ **وهي صيغة لاتحتوى على حد عشوائي . ومنها :**

$$\text{س} = -\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ب}}\,\text{ص} \quad \text{،} \quad \text{أي}\quad \text{س} = \text{أ}' + \text{ب}'\,\text{ص}$$

$$\text{حيث}\quad \text{ب}' = \frac{1}{\text{ب}} \quad \text{، أي أن}\quad \frac{\sum \text{ص}\,\text{س}}{\sum \text{ص}^2} = \frac{\sum \text{س}^2}{\sum \text{ص}\,\text{س}}$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 = \frac{\left[\sum \text{ص}\,\text{س}\right]^2}{\sum \text{س}^2 \sum \text{ص}^2} = 1$$

ويتضح مما سبق أنه في الحالة التي يساوي فيها معامل التحديد الواحد يمكن الحصول على المعلمات المقدرة للصيغة العكسية من المعلمات المقدرة للصيغة المباشرة، حيث :

$$\text{أ}' = -\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad \text{،} \quad \text{ب}' = \frac{1}{\text{ب}}$$

(٥) بمعاينة الصيغة العكسية (٤-٣٢) يتضح أن التغير في حجم الإنتاج بمقدار وحدة يصاحبه تغير في العمالة بمقدار ٠,٦٩ من الوحدة في نفس الاتجاه . كما أن الحد الأدنى من احتياجات المشروع للعمالة يصل ٢,٧٤ وحدة عمل ، وهو مستوى العمالة اللازم لإدارة شؤون المشروع وحراسته في حالة التوقف عن الإنتاج ، و يمثل الجزء الثابت من العمالة . ولاشك أن هذه التفسيرات مقبولة فقط في نطاق محدود لطاقة المشروع وعمره الإنتاجي .

المبحث الثاني

اختبارات المعنوية – اختبار الخطأ المعياري

Tests of Significance - Standard Error Test

لقد سبق وقمنا بتقدير $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ من بيانات عينة ، ونريد الآن أن نختبر إلى أي مدى يمكن الاعتماد عليها كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع أ ، ب . وسوف يتم ذلك من خلال اختبار مدى ملاءمتها الإحصائية Statistical Reliability باستخدام اختبارات المعنوية . ويوجد هناك ثلاث اختبارات يمكن استخدامها في هذا الصدد تتمثل في :

(١) اختبار الخطأ المعياري.

(٢) اختبار "ز" Z -Test.

(٣) اختبار " ت " T-Test.

وسوف نركز في هذا المبحث على اختبار الخطأ المعياري على أن نفرد مبحثا مستقلاً لكل اختبار من الاختبارين التاليين . ولكن قبل أن نقوم بشرح هذه الاختبارات يتعين أن نحدد من البداية صياغات الوسط الحسابي والتباين الخاصة بالمعلمات المقدرة $\hat{أ}_ر$ ، $\hat{ب}_ر$ ، وذلك لحاجتنا إليها عند شرح اختبارات المعنوية. وسوف نعرض هذه الصياغات بدون إثبات .

(٤-٢-١) الوسط الحسابي وتباين المعلمات المقدرة $\hat{a}_i, \hat{b}_i$

يمكن أن نطلق على الوسط الحسابي للمعلمة المقدرة " $\hat{أ}$ " القيمة المتوقعة ، ونرمز لها بالرمز ق($\hat{أ}$). ويلاحظ في هذا الصدد أن :

$$ق(\hat{أ}) = أ \longrightarrow E[\hat{a}] = a \quad ....(٤-٢٣)$$

ولعل هذا يعنى أنه إذا أخذنا عدداً كبيراً من العينات من المجتمع يبلغ ن ، وقدرنا لكل عينة أ̂ ، ثم حصلنا على متوسط القيم المقدرة أ̂ر (حيث ر= ١ ،٢،...، ن) فسوف نجد أن هذه القيمة المتوسطة تساوي تقريبا معلمة المجتمع نفسه وهي " أ " . وهذا يرجع إلى أن العدد الكبير من العينات يضمن تمثيل المجتمع بطريقة أفضل مما تفعله عينة واحدة .

أما تباين المعلمة المقدرة " أ̂ " والذي نرمز له " ع$^{٢}_{أ̂}$ " S_a^2 فهو يساوي :

$$ع^{٢}_{أ̂} = \frac{\sum (أ̂ - أ)^{٢}}{ن} = ع^{٢}_{ع} \left[\frac{\sum س^{٢}_{ر}}{ن \sum س^{٢}_{ر}} \right] \quad ......(٤-٣٤)$$

$$S_a^2 = S_u^2 \frac{\sum X_i^2}{n \sum X_i^2}$$

وهذا يعني أيضا أننا إذا قدرنا أ̂ لعدد كبير من العينات المسحوبة من مجتمع معين ، وحسبنا تشتت القيم أ̂ر عن وسطها الحسابي "أ" ، فانه يساوي الصيغة المحددة سابقا لـ ع$^{٢}_{أ̂}$، حيث س ر (X_i) هي القيمة المشاهدة للمتغير المستقل ، س ر (x_i) هي انحراف هذه القيمة عن الوسط الحسابي ، ع$^{٢}_{ع}$ (S_u^2) = تباين الحد العشوائي .

وفيما يتعلق بالوسط الحسابي للمعلمة المقدرة ب̂ر فإننا نرمز له ق(ب̂) ، حيث:

ق (ب̂) = ب $\quad E[\hat{b}]=b$ .... (٤-٣٥)

أما تباين (ب̂ر) ($\hat{b}_i$)

$$ع^{٢}_{ب̂} = ع^{٢}_{ع} \frac{١}{\sum س^{٢}_{ر}} \quad ....(٤-٣٦)$$

$$S_b^2 = S_u^2 \frac{1}{\sum x^2 i}$$

ويلاحظ أن $ع_{ع}^{2}$ يستخدم في حساب التباين الخاص بكل من $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ولذلك يتعين توضيح كيفية حسابه هو الآخر . ولما كان من الصعب مشاهدة قيم المتغير العشوائي "ع" (u) حتى يمكن حساب تباينه $ع_{ع}^{2}$ ، فإننا نستعيض عنها بقيم د $_ر$ (e_i) التي تمثل الانحراف بين القيم المشاهدة والقيم المقدرة من عينة .

ومن ثم فإن $ع_{ع}^{2}$ تتحدد كما يلي :

$$ع_{د}^{2} = \frac{\sum د_{ر}^{2}}{ن - ك} \quad \text{..........} (٤-٣٧)$$

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k}$$

حيث : ك (k) = عدد المعلمات المقدرة بدالة الانحدار ، ن (n) =حجم العينة.

ومما سبق يمكن القول أن التوزيع الاحتمالي لقيم $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ يعتبر توزيعا معتدلاً، وسطه الحسابي أ ، ب وتباينه $ع_{\hat{أ}}^{2}$ ، $ع_{\hat{ب}}^{2}$ على التوالي .

(٤-٢-٢) اختبار الخطأ المعياري

إذا افترضنا جدلاً أن الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ($ع_{\hat{أ}}$ ، $ع_{\hat{ب}}$) يساوي صفراً ، فإن هذا يعني أن قيم $\hat{أ}_{ر}$ ، $\hat{ب}_{ر}$ التي حصلنا عليها من عينات عديدة متساوية فيما بينها ولا تنحرف عن أوساطها الحسابية أ ، ب بأي قيمة . وفي هذه الحالة نجد أن $\hat{أ}$ =أ ، $\hat{ب}$ = ب ، أي أن المعلمات المقدرة من عينة تكون ممثلة للمجتمع تمثيلاً تاماً ، ولا يوجد أي نوع من الخطأ في التقدير ، ومن ثم فان الخطأ المعياري = صفر . ومن هذا المنطلق إذا كان $ع_{\hat{ب}}$ =صفر ، فإن الخطأ المعياري لتقدير $\hat{أ}$ = صفر ، وكذلك الحال بالنسبة لتقدير $\hat{ب}$. ولكن هذه الحالة نظرية ونادراً ما تحدث . وفي المقابل نجد أن الحالة الأكثر توقعا هي أن تكون قيمة الانحراف المعياري لكل من $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ أكبر من الصفر . وهذا يعني أن القيم المقدرة لهما من عينة عادة ما تختلف عن معلمات المجتمع أ ، ب التي تمثل الأوساط الحسابية .

ويمكن القول بوجه عام أنه كلما زادت قيمة الخطأ المعياري للمعلمات المقدرة ع$\hat{أ}$ ، ع$\hat{ب}$ كلما أصبحت المعلمات المقدرة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ أقل تمثيلا لمعلمات المجتمع أ، ب . ووجود خطأ معياري على هذا النحو يتطلب منا ضرورة قياس هذا الخطأ لتحديد درجة الثقة في مقدرات العينة كممثل جيد لمعلمات المجتمع . فإذا تجاوز الخطأ المعياري حداً أقصى معين فإننا لا نثق في المعلمات المقدرة من العينة كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع . وإذا كان الخطأ المعياري أقل من هذا الحد فإننا يمكن أن نثق في المعلمات المقدرة من العينة كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع أ ،ب ، ونقول في هذه الحالة أن هذه المعلمات المقدرة لها معنوية إحصائية .

وعموما لكي نختبر معنوية مقدرات العينة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ من خلال الخطأ المعياري يتعين استخدام ما يسمى بفرض العدم Null Hypothesis والفرض البديل Alternative Hypothesis . فإذا كانت القيمة المقدرة لـ $\hat{ب}$ =٠,٧٨ والقيمة المقدرة لـ $\hat{أ}$ = ٥٣,٧ كما هو الحال في نموذج الاستهلاك ، فإن هذا يعني أن العينة توحي بأن ب ≠ صفر ، أ ≠ صفر ، ونحن نريد اختبار مدى صحة ذلك. ونستطيع الحكم على مدى صحة ما تقوله العينة بشأن معلمات المجتمع عن طريق اختبار :

فرض العدم : أ = صفر　　$H0 : a = 0$

: ب = صفر　　$b = 0$

فإذا اتضح لنا من اختبار فرض العدم أنه صحيح، نرفض ما تقوله العينة بأن أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، أي نرفض الفرض البديل ، وبالتالي تكون القيم المقدرة من عينة غير معنوية من الناحية الإحصائية ، ولا يمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع أ، ب . أما إذا اتضح لنا من اختبار فرض العدم أنه فرض خاطئ فإننا نرفضه ، ونقبل الفرض البديل وهو ما توحي به العينة (أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر) . ومن ثم فان القيم المقدرة من عينة تكون معنوية من الناحية الإحصائية ، ويمكن أن نثق بها كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع .

والسؤال الآن هو : كيف يمكن اختبار فرض العدم :

ف٠ : أ = صفر	H0 : a =0
ب = صفر	b=0
في مواجهة الفرض البديل :	
ف١ : أ ≠ صفر	Ha: a ≠ 0
ب ≠ صفر	b ≠ 0

والإجابة على هذا السؤال يمكن تلخيصها فيما يلي :

(١) نقوم بحساب قيم الخطأ المعياري لكل من $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ من خلال الصيغ التالية والمشتقة من الصيغ (٤-٣٤) ، (٤ -٣٦) ، (٤-٣٧) :

$$\text{ع}_{\text{أ}} = \sqrt{\frac{\sum \text{د}_{\text{ر}}^{2} \sum \text{س}_{\text{ر}}^{2}}{\text{ن}(\text{ن} - \text{ك}) \sum \text{س}_{\text{ر}}^{2}}}$$

$$S_a = \sqrt{\frac{\Sigma e_i^2 \Sigma X_i^2}{n(n-k)\Sigma x_i^2}}$$

$$\text{ع}_{\text{ب}} = \sqrt{\frac{\sum \text{د}_{\text{ر}}^{2}}{(\text{ن} - \text{ك}) \sum \text{س}_{\text{ر}}^{2}}}$$

$$S_b = \sqrt{\frac{\Sigma e_i^2}{(n-k)\Sigma x_i^2}}$$

(٢) نقوم بمقارنة قيمة الخطأ المعياري لكل معلمة مقدرة بالقيمة المقدرة لهذه المعلمة ، وفي هذه الحالة يوجد أكثر من احتمال :

(أ) أن يكون $\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} < \frac{\hat{\text{ب}}}{٢}$ ، أي أن الخطأ المعياري يكون أقل من نصف القيمة المقدرة للمعلمة $\hat{\text{ب}}$. وفي هذه الحالة يمكن القول أن هذا الخطأ صغير نسبيا ، ومن ثم تكون القيمة المقدرة من العينة $\hat{\text{ب}}$ لها معنوية إحصائية ، ويمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول لمعلمة المجتمع ب . وينطبق نفس القول بالنسبة للمعلمة المقدرة $\hat{\text{أ}}$.

ونخلص من هذا أنه إذا كان الخطأ المعياري أقل من ٥٠ ٪ من قيمة المعلمة المقدرة نفسها ، فإننا نرفض فرض العدم القائل بأن المعلمة الحقيقية للمجتمع "أ" أو "ب" = صفر، ونقبل الفرض البديل القائل بأن المعلمة الحقيقية للمجتمع "أ" أو "ب" ≠ صفر وهو ما تقول به العينة .

(٢) أن يكون $ع_{\hat{ب}} > \frac{\hat{ب}}{٢}$ ، أي أن الخطأ المعياري يكون أكبر من نصف القيمة المقدرة للمعلمة . وفي هذه الحالة يمكن القول أن هذا الخطأ كبير نسبيا ، ومن ثم تكون القيمة المقدرة من العينة $\hat{ب}$ ليس لها معنوية إحصائية ، ولا يمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع ب . وينطبق نفس الشيء على المعلمة المقدرة $\hat{أ}$. ونخلص من هذا أنه إذا كان الخطأ المعياري أكبر من ٥٠ ٪ من قيمة المعلمة المقدرة نفسها فإننا نقبل فرض العدم القائل بأن المعلمة الحقيقية للمجتمع "أ" أو "ب" = صفر ، ونرفض الفرض البديل القائل بأن المعلمة الحقيقية للمجتمع "أ" أو "ب" ≠ صفر .

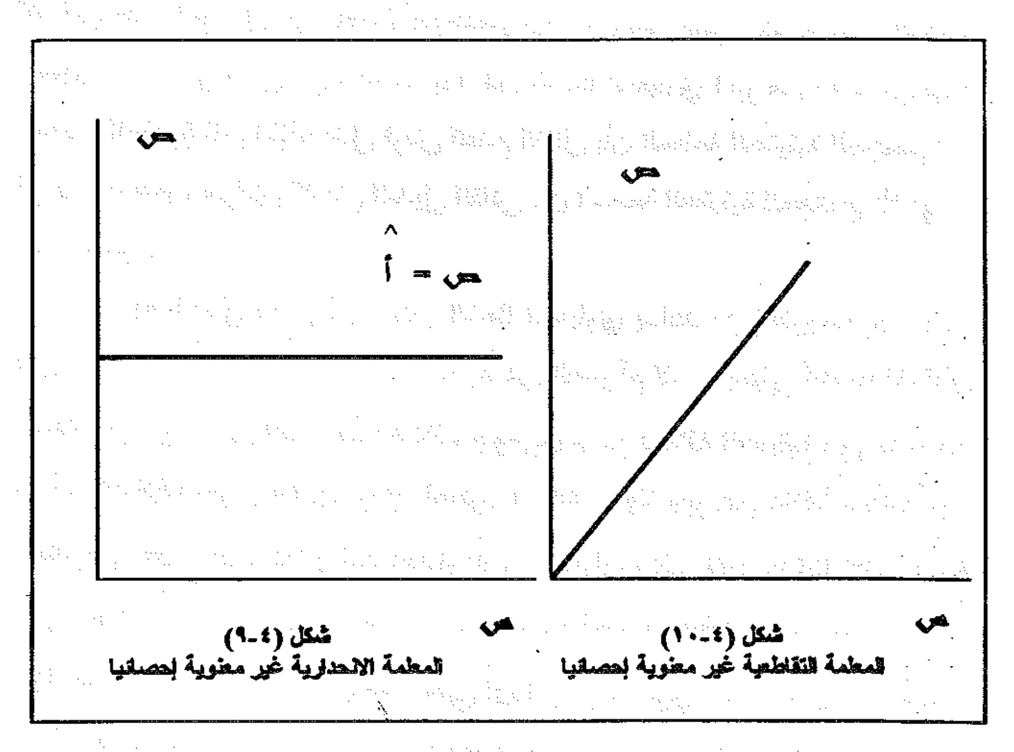
ومما سبق يتضح أن اختبار الخطأ المعياري يساعد على تقرير ما إذا كانت القيم المقدرة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ تختلف معنوياً عن الصفر أم لا. و بمعنى آخر ما إذا كان اختلاف قيمتيهما عن الصفر هو اختلاف جوهري يرجع للعلاقة الحقيقية بين ص ، س أم أنه اختلاف غير جوهري يرجع لمجرد الصدفة ، ولا يعبر عن علاقة حقيقية بين المتغيرين ص ، س . كما يساعد اختبار الخطأ المعياري على تقرير ما إذا كانت العينة التي قدرنا $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ منها قد جاءت من مجتمع معلماته الحقيقية أ ، ب = صفر ، أم لا . فإذا كان $ع_{\hat{ب}} > \frac{\hat{ب}}{٢}$ فان هذا يعني أن الفرض الصفري ب = صفر يعتبر صحيحاً، ومن ثم فان المجتمع الذي سحبت منه العينة تكون معلمته ب = صفر ، والعكس صحيح.

ويوجد هناك معنى اقتصادي لقبول أو رفض فرض العدم . فإذا قبلنا فرض العدم ب = صفر ، فان هذا يعني أن المتغير التفسيري س في العلاقة :

$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب} \hat{س}$ لا يؤثر في الواقع على المتغير التابع ص ، ومن ثم فان العلاقة الواقعية بين ص،س تأخذ الصيغة التالية : $ص = \hat{أ} + صفر = \hat{أ}$ ، وذلك بافتراض أن $\hat{أ}$ لها معنوية إحصائية . وتتضح هذه العلاقة في الشكل (٤-٩) .

وإذا قبلنا فرض العدم أ = صفر ، فان هذا يعني أن قيمة المتغير التابع ص = صفر عندما تساوي قيمة المتغير التفسيري صفر ، ومن ثم فان العلاقة الواقعية تأخذ الصيغة التالية:

$ص = \hat{ب}$ س ، وهي موضحة بالشكل (٤-١٠) . ويفترض في هذه الحالة أن المعلمة الانحدارية لها معنوية إحصائية .



شكل (٤-٩)
المعلمة الانحدارية غير معنوية إحصائيا

شكل (٤-١٠)
المعلمة التقاطعية غير معنوية إحصائيا

ولقد جرت العادة على كتابة الأخطاء المعيارية بين قوسين أسفل القيم المقدرة للمعلمات حتى تسهل عملية المقارنة بينها .

مثال (٤-٣)

حساب الخطأ المعياري

باستخدام بيانات نموذج الاستهلاك المعطاة في الجدولين (٣-٦) ، (٣-٧) يمكن حساب الخطأ المعياري كما يلي :

(١) نقوم بحساب $ع^{٢}_{د}$ حيث :

$$ع^{٢}_{د} = \frac{\sum د^{٢}}{ن - ك} = \frac{١٥٠٢٠}{(١٠ - ٢)} = ١٨٧٧,٥$$

(٢) نقوم بحساب $ع_{\hat{ب}}$ حيث :

$$ع_{\hat{ب}} = \sqrt{\frac{ع^{٢}_{د}}{\sum س^{٢}}} = \frac{١٨٧٧,٥}{١٣٧٠٢٥٠} = ٠,٠٣٧$$

(٣) نقوم بحساب $ع_{\hat{أ}}$ حيث :

$$ع_{\hat{أ}} = \sqrt{\frac{ع^{٢}_{د} \sum س^{٢}}{ن \sum س^{٢}}} = \frac{(١٨٧٧,٥)(٤٧٩٢٥٠٠)}{١٠ (١٣٧٠٢٥٠)} = ٢٥,٦$$

ومن ثم يمكن كتابة دالة الاستهلاك على النحو التالي :

$$\hat{ش} = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ \; س$$
$$(٢٥,٦) \qquad (٠,٠٣٧)$$

ويلاحظ من المعادلة السابقة أن :

$$ع_{\hat{أ}} < \frac{\hat{أ}}{٢} \quad ، \quad ع_{\hat{ب}} < \frac{\hat{ب}}{٢}$$

ومن ثم فإننا نرفض فرض العدم القائل بأن أ = ب = صفر ، ونقبل الفرض البديل القائل بأن أ ، ب ≠ صفر . وهذا يعني أن القيم المقدرة من ، $\hat{أ}$: $\hat{ب}$ عينة تختلف جوهريا عن الصفر ، ولها معنوية إحصائية ، وتعبر عن وجود علاقة حقيقية بين الاستهلاك والدخل ، وتشير إلى أن هذه المعلمات المقدرة من عينة تصلح كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع أ ، ب .

المبحث الثالث

اختبارات المعنوية – اختبار " ز "

Tests of Significance – the " Z " Test

يعتبر اختبار " ز " "Z" أحد المعايير الإحصائية التي تستخدم في اختبار مدى الثقة في المعلمات المقدرة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع أ ، ب . وحتى يمكن استخدام اختبار " ز " "Z" يتعين توفر بعض الشروط أهمها :

(١) أن يكون تباين المجتمع معلوم .

(٢) أن يكون تباين المجتمع مجهول ، ولكن حجم العينة كبير (ن > ٣٠) .

وغالباً ما يكون تباين المجتمع مجهولا في مجال التطبيقات القياسية ، ولذا إذا كان حجم العينة كبيراً فإننا يمكن افتراض أن تباينها تقريب مرضي لتباين المجتمع المجهول ، ومن ثم يمكن استخدام اختبار "ز" "Z" في هذه الحالة .

ويرجع التركيز على تباين المجتمع وحجم العينة في حالة استخدام اختبار "ز" إلى ما لهما من أهمية كبيرة في تحديد مدى تمثيل المعلمات المقدرة من عينة لمعلمات المجتمع . ويمكن توضيح هذه الحقيقة من المثال الموضح بالجدول (٤–٣). فإذا افترضنا أن هناك مجتمعين $ص_١$ ، $ص_٢$ وكان كل مجتمع منهما يشير إلى توزيع الإنتاجية لعشرة من الشركات الصناعية على النحو الموضح بالجدول (٤–٣) ، فمن الممكن استخلاص النتائج التالية :

(١) يلاحظ أن متوسطي الإنتاجية في المجتمعين متساويان ، حيث : $\bar{ص}_١ = \bar{ص}_٢ =$ ٣٠٠ ÷ ١٠ = ٣٠ ، غير أن تباينهما مختلف . فتباين المجتمع $ص_١$ = صفر ، في حين أن تباين المجتمع $ص_٢$ = ٢٧٥ ، أي أن تباين المجتمع $ص_٢$ أكبر من تباين المجتمع $ص_١$. ويترتب على اختلاف التباين على هذا النحو النتائج الموضحة في (٢) ، (٣) .

جدول (٤-٣)

إنتاجية العامل في المجتمعين $ص_1$ ، $ص_2$ (ألف جنيه)

رقم الشركة	إنتاجية العامل	رقم الشركة	إنتاجية العامل
مجتمع $ص_1$		مجتمع $ص_2$	
١	٣٠	١	٥
٢	٣٠	٢	١٠
٣	٣٠	٣	١٥
٤	٣٠	٤	٢٠
٥	٣٠	٥	٢٥
٦	٣٠	٦	٣٥
٧	٣٠	٧	٥٥
٨	٣٠	٨	٥٠
٩	٣٠	٩	٤٥
١٠	٣٠	١٠	٤٠
مجموع	٣٠٠	مجموع	٣٠٠

(٢) إذا أخذنا عينة مكونة من مفردتين (١) ، (٢) من المجتمع $ص_1$ وحسبنا متوسط هذه العينة نجده : $\overline{ص_1}$ = (٣٠ + ٣٠) ÷ ٢ = ٣٠ ، وهو يساوي متوسط المجتمع ، هذا في حين إذا أخذنا عينة مكونة من مفردتين (١) ، (٢) من المجتمع $ص_2$ وحسبنا متوسط هذه العينة نجده : $\overline{ص_2}$ = (٥ + ١٠) ÷ ٢ = ٧,٥ ، وهو بعيد جدا عن متوسط المجتمع . ولذا يمكن القول أنه كلما زاد تباين المجتمع كلما قلت الثقة في المعلمات المقدرة من عينة ما كممثل جيد لمعلمات المجتمع ، والعكس صحيح .

(٣) بالنسبة لمجتمع ما وليكن ص٢ ، إذا زاد حجم العينة من مشاهدتين مثلا (١ ، ٢) إلى أربع مشاهدات (١ ، ٢ ، ٨ ، ١٠) فإن متوسط العينة يصبح $\overline{ص_2}$ = (٥ + ١٠ + ٥٠ + ٤٠) ÷ ٤ = ٢٦,٢٥ . ولاشك أن متوسط العينة ذات الحجم الأكبر (٤

مشاهدات) أقرب من متوسط المجتمع منه في حالة العينة ذات الحجم الأصغر (مشاهدتين) . ومن ثم يمكن القول أنه كلما زاد حجم العينة كلما كانت المعلمات المقدرة منها أكثر تمثيلا لمعلمات المجتمع مع ثبات التباين .

وسوف نركز في هذا المبحث على عدد من النقاط الأساسية :

(٤-٣-١) خصائص توزيع "ز" "Z" المعياري .

(٤-٣-٢) استخدام "ز" "Z" كمعيار في اختبارات المعنوية .

(٤-٣-٣) مفهوم مستوى المعنوية .

(٤-٣-٤) العلاقة بين اختبار "ز" "Z" واختبار الخطأ المعياري .

ونتناول هذه النقاط بالتفصيل فيما يلي :

(٤-٣-١) خصائص توزيع "ز" "Z" المعياري :

يتصف توزيع "" بكونه توزيعاً معتدلاً معيارياً . ويتميز التوزيع المعتدل المعياري بعدد من الخصائص نوجزها فيما يلي :

(١) تأخذ قيمه الصيغة المعيارية التالية :

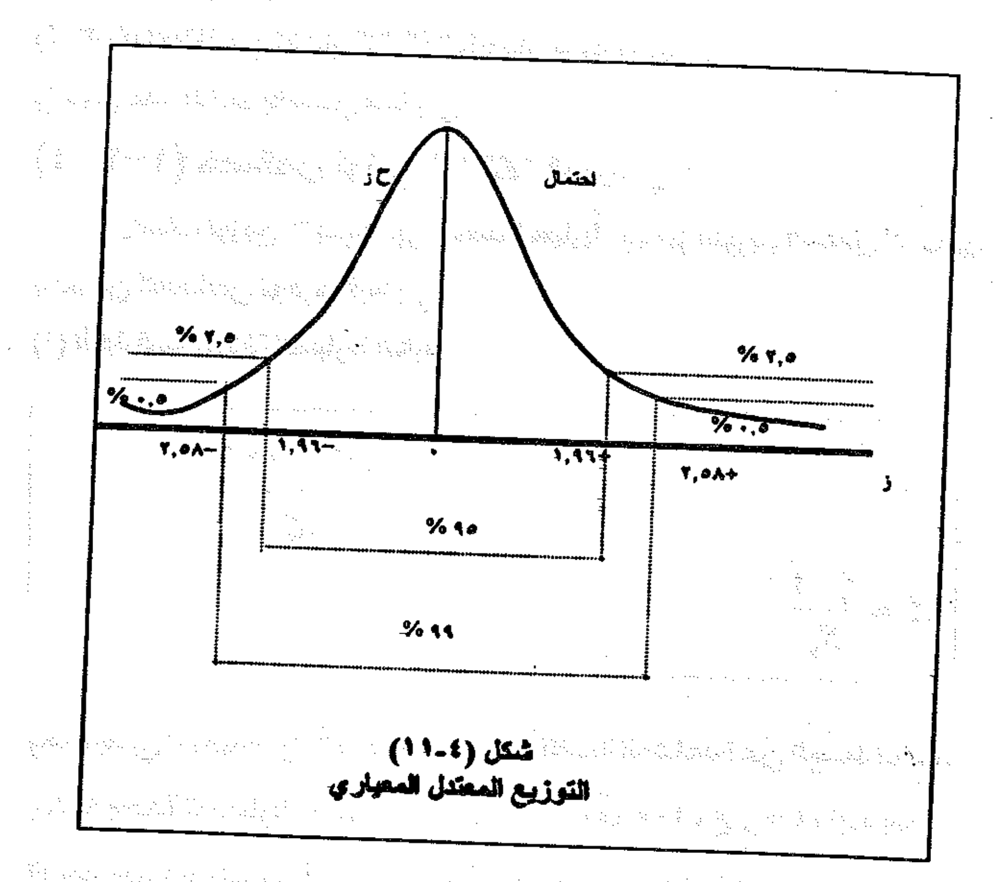
$$ز_ر = \frac{ص_ر - \bar{ص}}{ع_ص}$$

$$Z_i = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_y}$$

وهذا يعني أن قيمة "ز" "Z" تقيس انحراف القيمة المشاهدة عن الوسط الحسابي بدلالة وحدات معيارية . فإذا كانت $ص_ر = ٢٠$ ، $\bar{ص} = ١٠$ ، $ع_ص = ٥$ ، فإنه يقال أن القيمة $ص_ر$ تنحرف عن الوسط الحسابي بمقدار (٢٠ – ١٠) / ٥ = ٢ وحدة انحراف معياري ، أي بوحدتين معياريتين . وإذا كانت القيمة المشاهدة $ص_ر$ (Y_i)هي قيمة مطلقة ، فإن القيمة المعيارية المقابلة لها $ز_ر$ (Z_i) تعتبر قيمة نسبية . فيلاحظ أن $ز_ر$ (Z_i)

هي نسبة انحراف القيمة المشاهدة ص, (Y_i) عن وسطها الحسابي إلى مقياس متوسط انحرافات كل القيم ع ص (S_y) . فالقيمة المعيارية التي تقابل القيمة المشاهدة ص١ = ٢٠ هي ز١ = ٢ ، وهي تعني أن انحراف القيمة المشاهدة عن وسطها ضعف متوسط انحراف المجتمع (أو العينة) ككل .

(٢) الوسط الحسابي للتوزيع المعتدل المعياري "ز" "Z" = صفر ، والانحراف المعياري له = ١ .



شكل (٤-١١)
التوزيع المعتدل المعياري

كما أن مجموع احتمالات قيم "ز" التي تتراوح بين الحدين ١,٩٦ ، -١,٩٦ تساوي ٩٥٪ ، أي أن :

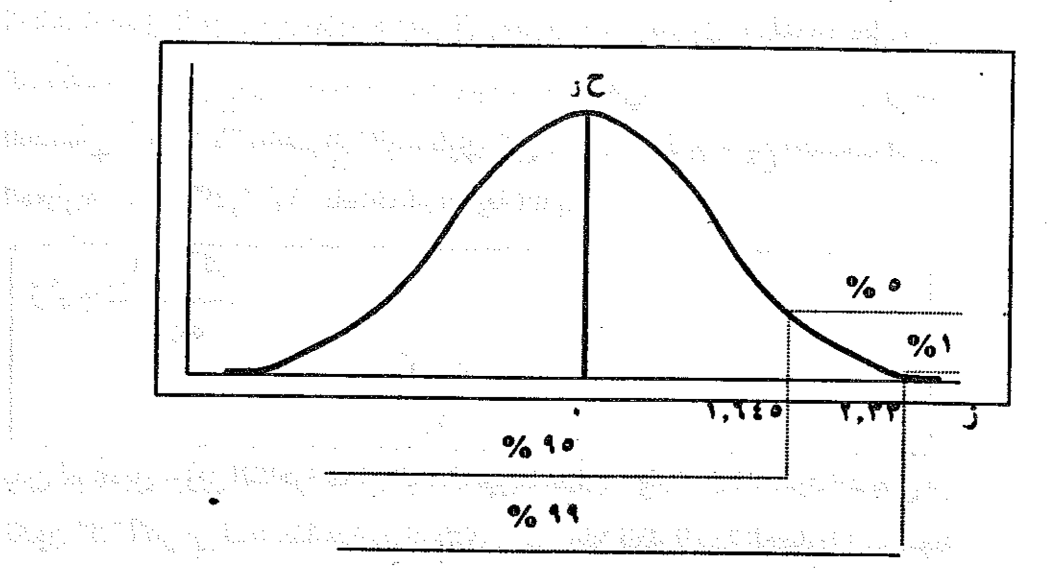
ح [-١,٩٦ < ز < ١,٩٦] = ٩٥ ٪

ح [+١,٩٦ < ز <- ١,٩٦] = ٥ ٪

ومجموع احتمالات قيم "ز" التي تتراوح بين ٢,٥٨ ، - ٢,٥٨ = ٩٩ ٪ ، أي أن :

ح [- ٢,٥٨ < ز < + ٢,٥٨] = ٩٩ ٪

ح [+ ٢,٥٨ < ز <- ٢,٥٨] = ١ ٪



شكل (٤-١٢)
توزيع "ز" "Z" المعتدل المعياري

أي أن :

ح [ز ≤ ١,٦٤٥] = ٩٥ ٪

ح [ز > ١,٦٤٥] = ٥ ٪

ومجموع احتمالات قيم "" التي تقل أو تساوي ٢,٣٣ = ٩٩ ٪ ، أي أن :

ح [ز ≤ ٢,٣٣] = ٩٩ ٪

ح [ز > ٢,٣٣] = ١ ٪

(٤) يوجد هناك جدول يسمى بجدول التوزيع المعياري يوضح احتمالات قيم "ز" "Z" المختلفة ، والاحتمالات الموضحة سابقا مستمدة من هذا الجدول . فعلى سبيل المثال نجد أن احتمال ز > ١,٩٦ بالجدول هو ٠,٠٢٥ . وبوجه عام إذا أردنا تحديد احتمال حدوث أي قيمة من قيم أي توزيع معتدل فمن الممكن استخدام جدول توزيع "ز" "Z" في عمل ذلك . والخطوة الأولى في هذا الصدد هي أن نقوم بتحويل توزيع الظاهرة محل البحث من توزيع معتدل إلى توزيع معتدل معياري وذلك بتحويل القيم المشاهدة إلى قيم معيارية . فإذا كانت القيم المشاهدة هي "كر" "Y_i"، نحسب وسطها الحسابي "كَ" "$\bar{Y}$" وانحرافها المعياري "عك" "S_y" ، ثم نقوم بحساب القيم المعيارية للمتغير "كر" "Y_i" باستخدام الصيغة التالية :

ز*ك = (كر - كَ) / عك

$$Z_y^* = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_y}$$

ومن ثم يصبح توزيع الظاهرة محل البحث توزيعا معياريا . وإذا أردنا تحديد احتمال أن تكون "ك" أكبر من قيمة مشاهدة معينة ولتكن "ك٢" مثلا ننظر للقيمة المعيارية المحسوبة لها "ز*٢" ثم نحدد من جدول التوزيع المعياري ح (ز > ز*٢) . ويعتبر هذا الاحتمال هو نفسه احتمال ك > ك٢ . أي أن : ح [ك > ك٢] = ح [ز > ز*٢] . ولكن يتعين ملاحظة أن هذا التحويل يعد صالحا فقط في حالة التوزيعات المعتدلة ذات الشكل الناقوسي المتماثل ، ذلك لأن التوزيع المعيار "Z" مبني على أساس توزيع معتدل .

(٤-٣-٢) استخدام "ز""Z" كمعيار في اختبارات المعنوية :

لعل السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو كيف يمكن استخدام المعيار الإحصائي "ز" "Z" في اختبار معنوية المعلمات المقدرة أ̂ ، ب̂ في نموذج انحدار يأخذ الصيغة التالية :

صر = أ̂ + ب̂ سر + دr $\qquad Y_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + e_i$

وللإجابة على هذا السؤال يتعين اتباع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتحويل قيم أ̂ ، ب̂ إلى قيم معيارية باستخدام الصيغة المعيارية المعروفة وهي :

القيمة المعيارية = (القيمة المشاهدة – القيمة المتوسطة) / الانحراف المعياري

خاصة وأننا قد افترضنا أن توزيع كل منهما توزيعا معتدلا . وحيث أن الوسط الحسابي لقيم أ̂ر = أ ، ب̂ر = ب وهى نفسها معلمات المجتمع ، فإن القيم المعيارية المحسوبة لكل من أ̂ ، ب̂ والتي سوف نرمز لها ونطقها المحسوبة نحددها كما يلي : نحددها كما يلي :

$$\text{ز}^*_{\hat{\text{أ}}} = \frac{\hat{\text{أ}} - \text{أ}}{\text{ع}_{\hat{\text{أ}}}} = \frac{\hat{\text{أ}} - \text{أ}}{\sqrt{\dfrac{\sum \text{د}_\text{ر}^2 \sum \text{س}_\text{ر}^2}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ك}) \sum \text{س}_\text{ر}^2}}} \quad \text{.........................(٤-٢٨)}$$

$$Z^*_a = \frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\dfrac{\sum e_i^2 \sum X_i^2}{n(n-k)\sum x_i^2}}}$$

حيث ع$_\text{أ}$ =الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة .

$$\text{ز}^*_{\hat{\text{ب}}} = \frac{\hat{\text{ب}} - \text{ب}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}} = \frac{\hat{\text{ب}} - \text{ب}}{\sqrt{\dfrac{\sum \text{د}_\text{ر}^2}{(\text{ن}-\text{ك}) \sum \text{س}_\text{ر}^2}}} \quad \text{.........................(٤-٢٩)}$$

$$Z^*_b = \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\dfrac{\sum e_i^2}{(n-k)\sum x_i^2}}}$$

حيث $ع_{\hat{ب}}$ = الخطأ المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{ب}$.

(٢) حتى يمكن حساب قيم $ز_{\hat{أ}}$ ، $ز_{\hat{ب}}$ يتعين تحديد قيم مكونات كل واحدة منها . غير أنه إذا كان من الممكن قياس $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، $ع_{\hat{أ}}$ ، $ع_{\hat{ب}}$ من بيانات العينة ، فان أ ، ب (وهي معلمات المجتمع) تظل مجهولة بالنسبة لنا . ولذا يجب علينا أن نقوم بافتراض قيم معينة خاصة بمعلمات المجتمع . وبالطبع فان هذه القيم المفترضة تحتمل الصواب والخطأ ، ولذلك يتعين علينا اختبارها . والشرط الأساسي بشأن القيم المفترضة هو ألا تكون هذه القيم مستمدة من العينة حتى لا تكون $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ متطابقة مع أ ، ب .

ولقد جرى العرف على استخدام القيمة المفترضة "صفر " لمعلمات المجتمع ، وهي تعني (في حالة المعاملات الانحدارية) أنه لا توجد علاقة بين المتغيرين ص ، س وغالبا ما تكون عكس ما تقرره العينة من أنه يوجد هناك علاقة بين ص ، س . ولاختبار الفرضين المتقابلين :

فرض العدم : ف٠ : أ = صفر ، ب = صفر ← $a=0 , b=0$ ←

في مواجهة الفرض البديل : ف١ : أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ← $a \neq 0 , b \neq 0$ ←

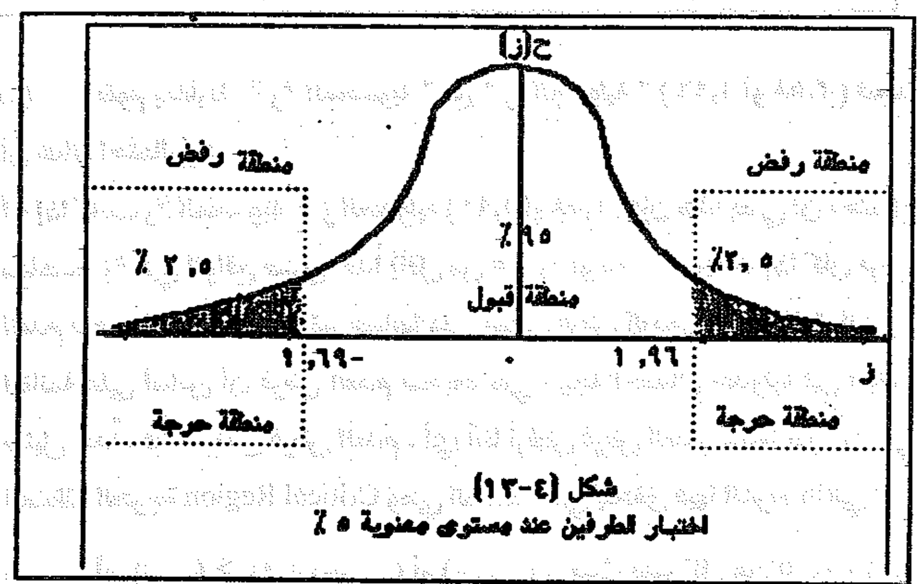
نقوم بالتعويض في الصيغ السابقة (٤-٣٨) ، (٤-٣٩) عن أ =صفر ، ب=صفر ، فنحصل على ز* المحسوبة كما يلي :

$$ز^*_{\hat{أ}} = \frac{\hat{أ} - صفر}{ع_{\hat{أ}}} = \frac{\hat{أ}}{ع_{\hat{أ}}} \qquad Z^*_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}}{S_{\hat{a}}} \quad ......(٤-٤٠)$$

$$ز^*_{\hat{ب}} = \frac{\hat{ب} - صفر}{ع_{\hat{ب}}} = \frac{\hat{ب}}{ع_{\hat{ب}}} \qquad Z^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}} \quad ......(٤-٤١)$$

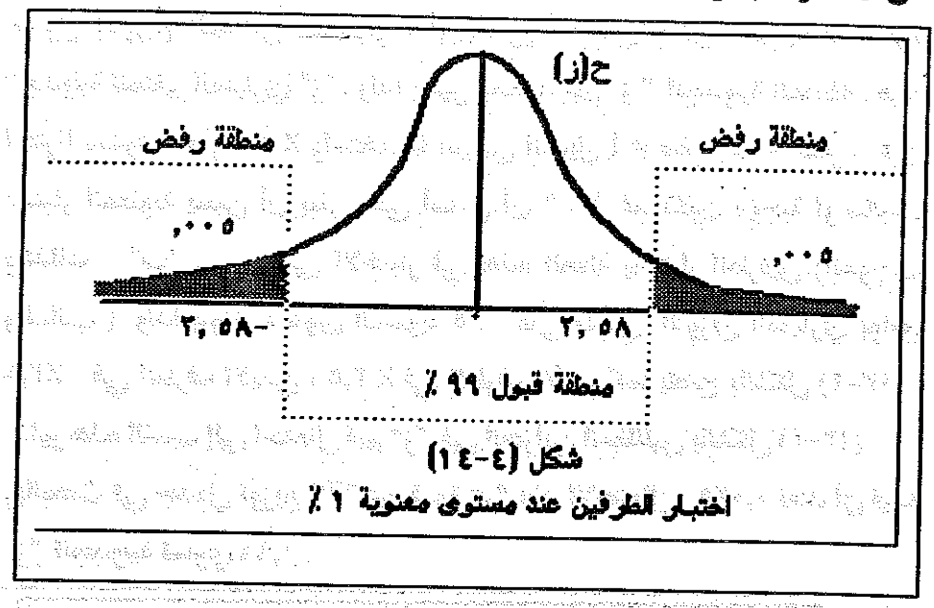
وهكذا فان الصيغتين السابقتين حولتا القيمتين المشاهدتين $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ إلى قيمتين معياريتين بدلالة الانحراف المعياري .

(٣) نقوم بتحديد احتمال حدوث القيم المحسوبة $ز^*_أ$،$ز^*_ب$ من خلال استخدام جدول التوزيع المعتدل المعياري ، أو بمعنى آخر من خلال مقارنتها مع القيم الجدولية للمتغير المعياري "ز" . ولذا يتعين تحديد قيم" ز " الجدولية المقابلة . فإذا اخترنا مستوى معنوية ٥ ٪ واستخدمنا الفرض البديل أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، فإن اختبار المعنوية يتعين أن يبنى على أساس أن " أ " قد تكون موجبة أو سالبة ، وكذلك "ب" . ويسمى الاختبار في هذه الحالة باختبار الطرفين (الموجب والسالب) ولذا يتوزع مستوى المعنوية ٥ ٪ على طرفي التوزيع المعياري بواقع ٢,٥٪ في الطرف الأيمن ، ٢,٥ ٪ في الطرف الأيسر كما يتضح بالشكل (٤-١٣) . وتشير هذه النسب إلى احتمال قيم "ز" في الجزأين المظللين بالشكل (٤-١٣).
وبالبحث في جدول توزيع "Z" عن قيمة "ز" عند الاحتمال ٠,٠٢٥ نجد أن قيمة "ز" الجدولية تساوي ١,٩٦ .



شكل (٤-١٣)
اختبار الطرفين عند مستوى معنوية ٥ ٪

أما إذا اخترنا مستوى معنوية ١ ٪ واستخدمنا اختبار الطرفين فان النسبة ١٪ تتوزع بين الطرفين بواقع ٠,٠٠٥ لكل طرف كما يتضح بالشكل (٤-١٤). وبالبحث عن قيمة "ز" الجدولية عند احتمال ٠,٠٠٥ نجد أنها = ٢,٥٨ .



شكل (٤-١٤)
اختبار الطرفين عند مستوى معنوية ١ ٪

(٤) نقوم بمقارنة " ز* المحسوبة " مع " ز الجدولية " (١,٩٦ أو ٢,٥٨) فنجد أن هناك احتمالين :

أ- إذا كانت ز* المحسوبة > ز الجدولية (١,٩٦ أو ٢,٥٨) فإن هذا يعني أن احتمال مشاهدة ز* في الواقع ضئيل جداً (أقل من ٠,٠٢٥ أو ٠,٠٠٥) وذلك إذا كان فرض العدم صحيحا (حيث أن ز* تم حسابها على أساس فرض العدم). وإذا كانت النتيجة القائمة على أساس أن فرض العدم صحيحاً هي نتيجة احتمال حدوثها في الواقع ضئيل جداً ، فإننا نرفض فرض العدم . أي أننا نرفض فرض العدم عندما تقع ز* في المنطقة الحرجة Critical Region وهي المنطقة التي يتحقق فيها الشرط التالي :

(ز٠,٠٥) أو (ز٠,٠١) ≥ ز* ≥ (-ز٠,٠٥) أو (- ز٠,٠١) ، حيث يشير كل من ٠,٠٥ ، ٠,٠١ إلى مستوى المعنوية . وبرفض فرض العدم نقبل الفرض البديل ، ومن ثم نقبل تقدير

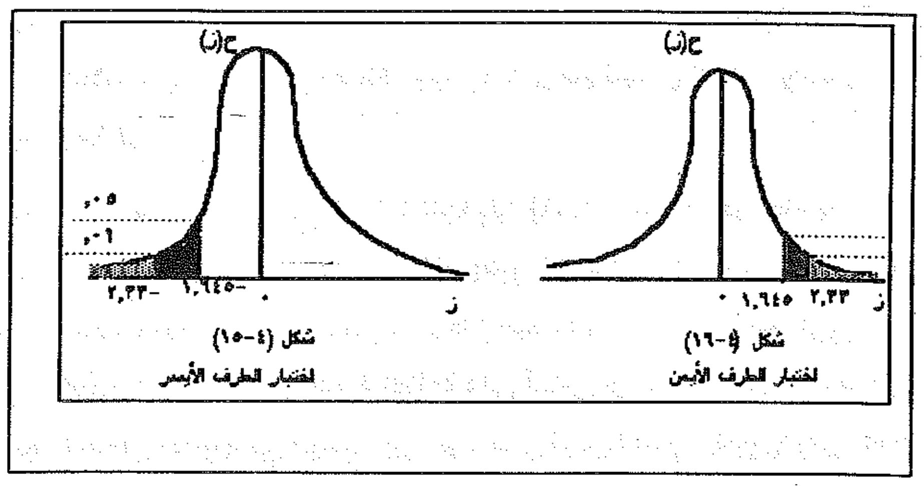
العينة . وفي هذه الحالة نقول أن تقدير العينة أ̂ أو ب̂ له معنوية إحصائية ، وأن اختلافه عن الصفر يعتبر اختلافا جوهريا لا يرجع لعوامل الصدفة وإنما يرجع لعوامل حقيقية .

ب- أما إذا كانت ز* المحسوبة < ز الجدولية (١,٩٦ أو ٢,٥٨) فإن هذا يعني أن احتمال مشاهدة ز* المحسوبة في الواقع يعتبر احتمالا كبيرا ، أكبر من ٠,٠٢٥ أو ٠,٠٠٥ وذلك إذا كان فرض العدم صحيحا (حيث أن "ز*" تم حسابها على أساس فرض العدم) . وحيث أن النتيجة القائمة على أساس أن فرض العدم صحيحا هي نتيجة احتمال حدوثها في الواقع كبير ، فإننا نقبل فرض العدم . وبقبول فرض العدم فإننا نرفض الفرض البديل ، ومن ثم نرفض تقدير العينة . وفي هذه الحالة لا يكون للقيمة المقدرة من العينة معنوية إحصائية ، ويكون اختلافها عن الصفر اختلافا غير جوهري أو غير معنوي ، أي يرجع لمجرد عوامل الصدفة .

(٥) عادة ما نستخدم اختبار الطرفين الذي سبق توضيحه عندما لا يكون لدينا معلومات مسبقة عن إشارة المعلمة محل الاختبار ، أو إذا كانت المعلمة المراد اختبارها يمكن أن تأخذ قيمة موجبة أو قيمة سالبة . أما إذا كان لدينا معلومات مسبقة عن إشارة هذه المعلمة كما هو الحال في كثير من الدراسات الاقتصادية (الميل الحدي للاستهلاك أو للادخار وغيرها) فإننا نستخدم اختبار الطرف الواحد . فإذا كانت إشارة المعلمة سالبة نستخدم اختبار الطرف الأيسر ، حيث :

ف٠ : أ أو ب = صفر ، في مواجهة ف١ : أ أو ب < صفر

وفي هذه الحالة نجد أن قيم "ز" الجدولية تختلف عنها في حالة اختبار الطرفين لأن مستوى المعنوية ينحصر في طرف واحد . فعند مستوى المعنوية ٥ ٪ أي احتمال ٠,٠٥ نجد أن قيمة " ز " الجدولية = ١,٦٤٥ ، وعند مستوى معنوية ١ ٪ نجد أن قيمتها = ٢,٣٣ . وتصبح المنطقة الحرجة ممثلة في المنطقة المظللة بالشكل (٤-١٥) عندئذ .



شكل (٤-١٥)
لاختبار الطرف الأيسر

شكل (٤-١٦)
لاختبار الطرف الأيمن

أما إذا كانت إشارة المعلمة المراد اختبارها موجبة فإننا نستخدم اختبار الطرف الأيمن ، حيث : ف٠ : أ أو ب = صفر ، ف١: أ أو ب > صفر

وتصبح المنطقة الحرجة هي المنطقة المظللة بالشكل (٤-١٦) .

(٤-٣-٣) مفهوم مستوى المعنوية

عندما نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية ٥ ٪ ونقبل الفرض البديل ، فإن هذا يعني أن هناك احتمالا ٩٥ ٪ أن يكون قرار الرفض قراراً صحيحاً ، وهناك احتمال ٥ ٪ أن يكون قرار الرفض قراراً خاطئاً . ومن ثم فان مستوى المعنوية يعبر عن احتمال الخطأ عند اتخاذ قرار الرفض لفرض العدم . ويترتب على ذلك أن مستوى الثقة في قرار الرفض لا يكون ١٠٠ ٪ ولكنه يكون ٩٥ ٪ فقط في هذه الحالة. أي أنه في كل ١٠٠ مرة يصدر فيها قرار الرفض لفرض العدم يوجد ٩٥ مرة منها يكون فيها هذا القرار صحيحاً ، و ٥ مرات خاطئاً . وإذا حدث وكان قرار الرفض خاطئاً فإن هذا يعني أننا وقعنا في خطأ هو " رفض فرض هو في حقيقة الأمر صحيح " وهذا هو الخطأ من النوع الأول . وعندما نجري اختباراتنا عند مستوى معنوية ١٪ بدلا من ٥ ٪ فإن هذا يعني أننا قد قللنا من احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول ، أي قللنا من احتمال رفض فرض العدم رغم أنه صحيح وقبول الفرض البديل رغم أنه خطأ .

وخلاصة القول أن مستوى المعنوية (α) يشير إلى احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول .

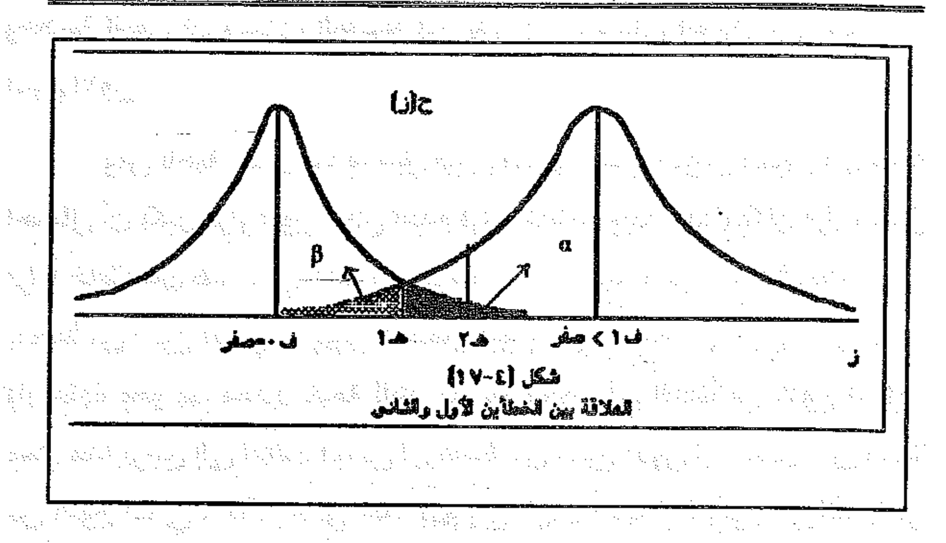
ومن ناحية أخرى عندما نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل فإن هناك احتمال أن يكون قرار قبول فرض العدم قراراً خاطئا . وإذا حدث وكان قرار القبول قراراً خاطئاً فان هذا يعني " أننا قبلنا فرضا هو في حقيقة الأمر خاطئ" وهذا يسمى بالخطأ من النوع الثاني . ويرمز لاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني بالرمز (β) عادة وهو غير محدد بقيمة ثابتة كما هو الحال في الخطأ من النوع الأول . ولعل هذا يرجع إلى اعتقاد البعض أن الخطأ من النوع الأول أكثر أهمية من الخطأ من النوع الثاني ، الأمر الذي حدا بهم إلى تثبيت احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول عند مستوى منخفض (٥ ٪ ، ١ ٪) ومحاولة تقليل احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني إلى أدنى حد ممكن ، حتى وإن كان هذا الحد الأدنى أعلى من ٥ ٪ . وتسمى النسبة ($1-\beta$) بقوة الاختبار Power of Test ، ولاشك أن تدنية الخطأ من النوع الثاني تعني تعظيم قوة الاختبار ، حيث تشير النسبة ($1-\beta$) إلى احتمال عدم الوقوع في الخطأ من النوع الثاني . ويمكن توضيح الخطأين من النوع الأول والثاني بالجدول (٤-٣).

جدول (٤-٣)

حالات فرض العدم

الفرض / القرار	صحيح	خاطئ
رفض	خطأ من النوع الأول	صح
قبول	صح	خطأ من النوع الثاني

وعموما يوجد هناك علاقة عكسية بين احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول (α) واحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني (β). ويمكن توضيح ذلك من الشكل (٤-١٧) .



شكل (٤-١٧)
العلاقة بين الخطأين الأول والثاني

افترض أن هناك توزيعين حول قيم كل من فرض العدم ف٠ ، والفرض البديل ف١ حيث : ف٠ : ب = صفر، ف١ : ب > صفر. وافترض أننا اخترنا النقطة هـ٢ بحيث تكون المساحة المظللة على يمينها ممثلة لاحتمال رفض فرض العدم ، أي احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول (α) ، والمساحة المظللة على يسارها تمثل احتمال رفض الفرض البديل (قبول فرض العدم وهو خاطئ) أي احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني (β). ومع ثبات حجم العينة، يلاحظ أن تقليل احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول بالتحرك من النقطة هـ١ إلى هـ٢ من خلال تخفيض مستوى المعنوية (α) يزيد من احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني (β) . ولذلك فانه من الصعب تدنية كل من الخطأين معا في نفس الوقت ، حيث أن تدنية أحدهما تتم على حساب زيادة الآخر . ولعل المخرج الوحيد لتقليل حجم الخطأين معاً هو زيادة حجم العينة . فكلما زاد حجم العينة كلما أصبحت المعلمات المقدرة أكثر تمثيلا لمعلمات المجتمع .

(٤-٣-٤) العلاقة بين اختبار "ز" "z" واختبار الخطأ المعياري

لقد اتضح مما سبق أنه إذا زادت ز* عن ١,٩٦ عند مستوى معنوية ٥ ٪ فإننا نرفض فرض العدم. ولو قربنا القيمة ١,٩٦ إلى ٢ فإنه يمكن القول :

إذا كانت $\text{ز}^{*}_{\hat{\text{ب}}} = \dfrac{\hat{\text{ب}}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}} > 2$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل

وإذا كانت $\text{ز}^{*}_{\hat{\text{ب}}} = \dfrac{\hat{\text{ب}}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}} < 2$ نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل

وبضرب طرفي اللامتساويتين في $\dfrac{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}}{2}$ نجد أنهما تصبحان كما يلي :

$\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} < \dfrac{\hat{\text{ب}}}{2}$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل

$\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} > \dfrac{\hat{\text{ب}}}{2}$ نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل

وهذا هو اختبار الخطأ المعياري .نخلص من ذلك بأن اختبار الخطأ المعياري ما هو إلا تقريب لاختبار "ز" ، وبالتالي فإنه يعتبر اختبار أقل دقة بالمقارنة مع اختبار "ز" . وعموما يمكن الربط بين الاختبارين كما يلي :

(أ) نرفض فرض العدم ب = صفر إذا كانت $\text{ز}^{*}_{\hat{\text{ب}}} > 2$ وفقا لاختبار "ز" ، وإذا كانت $\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} < \dfrac{\hat{\text{ب}}}{2}$ وفقا لاختبار الخطأ المعياري ، وهما نفس الشيء.

(ب) نقبل فرض العدم ب = صفر إذا كانت $\text{ز}^{*}_{\hat{\text{ب}}} < 2$ وفقا لاختبار "ز" ، وإذا كان $\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} > \dfrac{\hat{\text{ب}}}{2}$ وفقا لاختبار الخطأ المعياري ، وهما نفس الشيء .

ومن ثم يمكن القول أن اختبار الخطأ المعياري ما هو إلا تقريب لاختبار الطرفين لـ "ز" عند مستوى معنوية ٥ ٪ .

مثال (٤-٤)

استخدام اختبار "ز"Z "

افترض أن باحثاً قام بتقدير دالة الادخار من عينة مكونة من ٧٠٠ أسرة وكانت نتائج التقدير كما يلي :

$$ص = -١٥٠ + ٠,٣ س + ه$$
$$(١٠) \quad (٠,٠٦)$$

حيث ص = الادخار ، س = الدخل . والمطلوب هو اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمة الانحدارية بدالة الادخار المقدرة .

حيث أن العينة كبيرة (ن > ٣٠) فمن الممكن استخدام المعيار "ز" Z في اختبار المعنوية . ونظراً لأن لدينا فكرة مسبقة عن الميل الحدي للادخار (والذي يمثل المعلمة الانحدارية) مفادها أنه من المتوقع أن يكون موجبا ، فمن الممكن استخدام اختبار الطرف الأيمن : ف٠: ب =صفر ، في مواجهة ف١ : ب > صفر .

ولإجراء هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية :

(١) نحدد قيمة ز* المحسوبة للمعلمة المقدرة $\hat{ب}$ حيث :

$$ز^*_{\hat{ب}} = \frac{\hat{ب} - ب}{ع_{\hat{ب}}} = \frac{٠,٣ - صفر}{٠,٠٦} = ٥$$

(٢) نحدد قيمة "ز" الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ فنجدها مساوية ١,٦٤٥ .

(٣) نقارن ز* المحسوبة ، ز الجدولية فنجد أن ز* > ز الجدولية ، ومن ثم فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل . وهذا يعني أن المعلمة المقدرة $\hat{ب}$ لها معنوية إحصائية وتختلف جوهرياً عن الصفر . وبالتالي يمكن أن نثق في تقدير العينة كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع . ويعني هذا أن الدخل يؤثر تأثيراً جوهرياً على الادخار .

المبحث الرابع

اختبارات المعنوية - اختبار "ت"

The Student's "T" Test

يستخدم اختبار "ت" عندما يكون تباين المجتمع مجهولا ، وحجم العينة صغيرا (أقل من ٣٠) ، وذلك بشرط أن يكون مجتمع المعلمات المقدرة موزعا توزيعا معتدلا . ولكي نختبر مدى الثقة في المعلمات المقدرة من عينة باستخدام معيار "ت" يتعين إتباع الخطوات التالية :

(١) تحديد ت* المحسوبة باستخدام الصيغة التالية :

$$ت^*_ر = \frac{\hat{ب}_ر - ب_ر}{ع_{\hat{ب}_ر}} \qquad t_i^* = \frac{\hat{b}_i - b_i}{S_{\hat{b}_i}} \qquad ......(٤-٤٢)$$

(٢) تحديد "ت" الجدولية . ويمكن تحديد قيمة "ت" الجدولية من جدول توزيع ت عند درجات حرية معينة ومستوى معنوية محدد (٠,٠٥ أو ٠,٠٢٥ أو ٠,٠١) ، حيث : درجات الحرية = حجم العينة - عدد المعلمات المقدرة.

ويلاحظ أن توزيع " ت " متماثل ، وسطه الحسابي = صفر، وتباينه = $\frac{ن-١}{ن-٣}$

وهو يقترب من الواحد كلما كبر حجم العينة ، وهذا يعني أن توزيع "ت" يقترب من توزيع "ز" كلما كبر حجم العينة . ويختلف توزيع "ت" عن توزيع "ز" في أن الأول مصمم على أساس درجات حرية ، في حين أن الثاني لا يتحدد على أساس درجات حرية .

(٣) حتى يمكن إجراء اختبار المعنوية للمعلمات المقدرة من عينة لابد من استخدام فرض العدم والفرض البديل الخاصين بمعلمات المجتمع . ويتعين أن نفرق بين اختبار الطرف الواحد واختبار الطرفين :

(أ) اختبار الطرف الواحد One -tailed Test:

يستخدم هذا الاختبار في حالة أن يكون :

فرض العدم (ف٠) : ب ر = ب٠ ← $b_i = b_0$

في مواجهة :

الفرض البديل (ف١) : ب ر > ب٠ ← $b_i > b_0$

أو ب ر < ب٠ ← $b_i < b_0$

حيث أن ب٠ هي قيمة معينة . و لإجراء الاختبار نقوم بحساب ت* من بيانات عينة كما بالصيغة (٤-٤٢). وفي حالة أن يكون فرض العدم ب ر= صفر تصبح :

$$ت^* = \frac{\hat{ب}_ر}{ع_{\hat{ب}_ر}} \longleftarrow t^* = \frac{\hat{b}_i}{S_{\hat{b}_i}} \qquad (٤-٤٣)$$

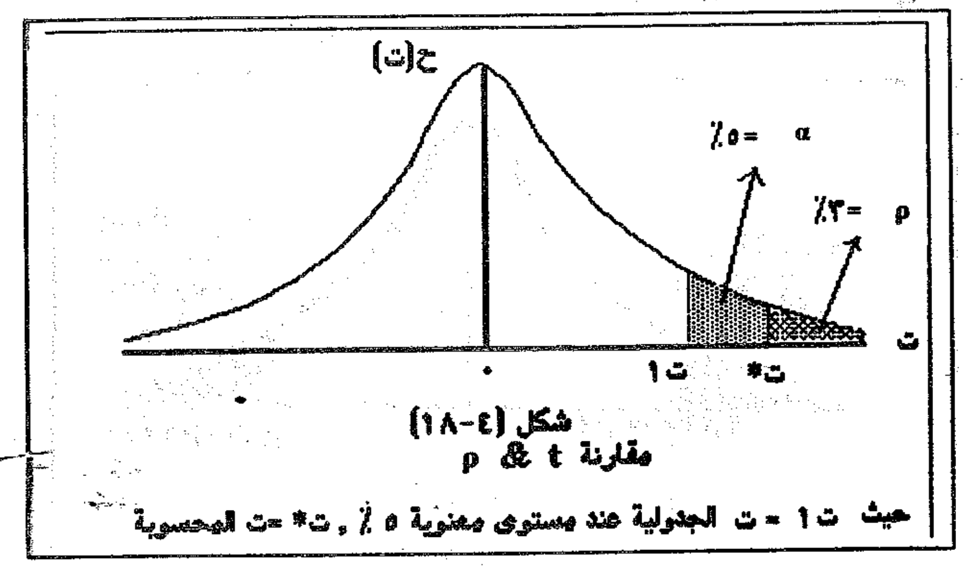
ثم نقوم بالبحث عن "ت " الجدولية في الجداول الإحصائية لتوزيع ت عند مستوى معنوية معين ٥ ٪ أو ١ ٪ ودرجات حرية معينة" ن – ك " (n-k) . وإذا كانت :

| ت* المحسوبة | < ت الجدولية ، نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل وتكون المعلمة المقدرة من العينة ($\hat{ب}_ر$) غير معنوية إحصائيا . أما إذا كانت | ت* المحسوبة | > ت الجدولية نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل وتكون المعلمة المقدرة من العينة ($\hat{ب}_ر$) لها معنوية إحصائية .

ويوجد هناك اختبار آخر يسمى قيمة ρ (باي) وهو يعطي نفس النتيجة ،حيث :

قيمة ρ = احتمال (ت > ت* المحسوبة ....(٤-٤٤)

وتقوم بعض برامج الكمبيوتر الجاهزة بعرضها . وفي حالة أن تكون ρ > مستوى المعنوية المحدد (٥٪ أو ١٪) نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل وتكون المعلمة المقدرة ب̂ ر غير معنوية إحصائيا . وفي حالة أن تكون ρ < مستوى المعنوية المحدد نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ، وتكون المعلمة المقدرة من عينة ب̂ ر معنوية إحصائيا . ويتضح هذا من الشكل (٤-١٨) .



شكل (٤-١٨)
مقارنة p & t

حيث ت ١ = ت الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ , ت* =ت المحسوبة

وحيث أن ρ < α بالشكل (٤-١٨) نرفض فرض العدم وتكون المعلمة المقدرة من عينة لها معنوية إحصائية عند مستوى ٥ ٪ .

(ب) اختبار الطرفين Two-tailed Test:

يستخدم هذا الاختبار في حالة أن يكون :

فرض العدم (ف.) : ب ر = ب. ← $b_i = b_0$

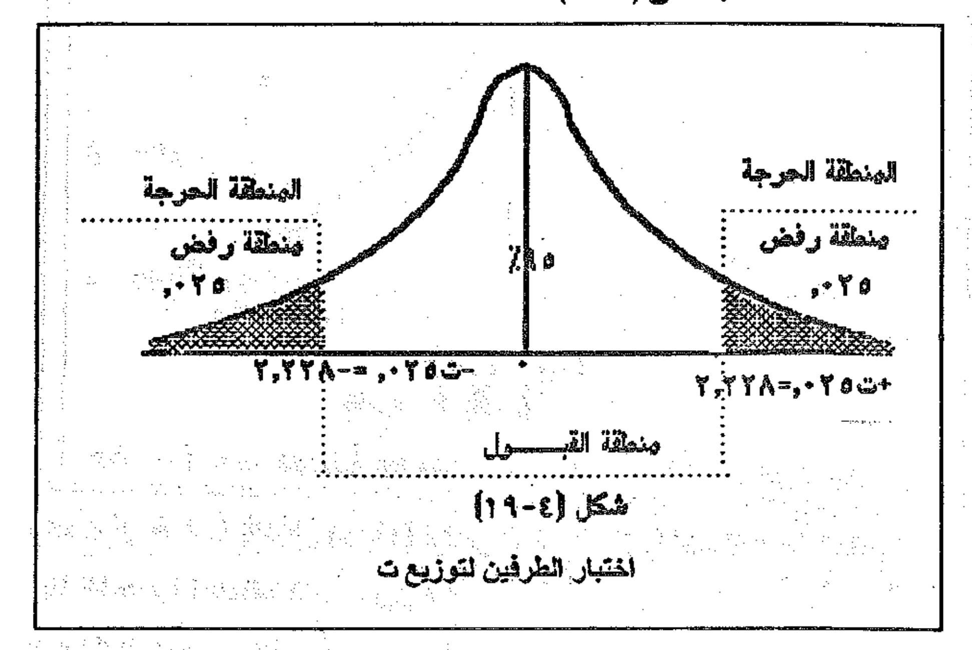
الفرض البديل (ف،) : ب ر ≠ ب. ← $b_i \neq b_0$

ولإجراء الاختبار نقوم بحساب ت * من بيانات العينة بنفس الطريقة السابقة ، ثم نبحث عن ت الجدولية عند مستوى معنوية $\frac{\alpha}{2}$ ، ودرجات حرية (ن– ك) (n-k)، ونكمل الاختبار كما سبق. وللحصول على قيمة ρ في هذه الحالة نجد أن:

قيمة ρ = ٢[احتمال (ت > ت * المحسوبة)] ....(٤–٤٥)

ثم نقارنها بمستوى المعنوية α على النحو الذي سبق .

ويلاحظ أنه عند إجراء اختبار الطرفين يكون لـ ت الجدولية قيمتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة، ويكون مستوى المعنوية لكل منهما ٠,٠٢٥ في حالة α = ٥ ٪ كما بالشكل (٤–١٩) .



شكل (٤-١٩)

اختبار الطرفين لتوزيع ت

(٤) وبمقارنة ت* المحسوبة بقيمة ت الجدولية نجد أن هناك أكثر من احتمال :

(أ) إذا كانت | ت* المحسوبة أو المشاهدة | ≥ | ت الجدولية | نقبل فرض العدم حيث تكون ت* في منطقة القبول ، ونرفض الفرض البديل ، ويكون تقدير العينة غير معنوي إحصائيا .

(ب) إذا كانت | ت* المحسوبة | > | ت الجدولية | نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل حيث تقع ت* في منطقة الرفض ، ويكون تقدير العينة معنوياً إحصائياً، ويمكن أن نثق فيه كأساس جيد للوصول لمعلمة المجتمع .

ويلاحظ في هذا الصدد أن :

$-\text{ت}_{٠,٠٢٥} \leq \text{ت}^* \leq \text{ت}_{٠,٠٢٥}$ ← منطقة القبول

$+\text{ت}_{٠,٠٢٥} < \text{ت}^* < -\text{ت}_{٠,٠٢٥}$ ← منطقة الرفض

(٥) من الممكن تصميم صيغة تقريبية لاختبار "ت" تصلح للاستخدام في حالة أن تكون درجات الحرية أكبر من ٨ ، أي عندما (ن– ك) > ٨ . فإذا نظرنا إلى جدول توزيع "ت" نجد أن قيمة ت تتغير ببطيء شديد بعدما تزداد درجات الحرية عن ٨ . فهي على سبيل المثال = ٢,٣ عندما (ن –ك) =٨ ، وتصبح ١,٩٦ عندما (ن–ك) = ∞ ، وذلك عند مستوى معنوية ٥ ٪ . ولاشك أن التغير من٢,٣ إلى ١,٩٦ يعتبر تغيراً بطيئاً جداً ، وهذا يعني أن درجات الحرية لا تؤثر بدرجة كبيرة على قيمة ت الجدولية بعدما تزيد عن ٨ . ومن ثم يصبح من الممكن إهمال أثر هذا التغير دون خطأ كبير . ومن هذا المنطلق يمكن اعتبار "ت" الجدولية عند جميع درجات الحرية أكبر من ٨ = ٢ تقريبا . وفي هذه الحالة يصبح اختبار الطرفين عند مستوى ٥٪ كما يلي :

(أ) إذا كانت | ت* | > ٢ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل وتكون القيمة المقدرة للمعلمة لها معنوية إحصائية . وحيث أن:

$\text{ت}^* = \frac{\hat{\text{ب}}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}} > ٢$ في هذه الحالة ، فان : $\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} < \frac{\hat{\text{ب}}}{٢}$ أو $\hat{\text{ب}} > ٢\,\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}$

(ب) إذا كانت | ت* | < ٢ نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل ، وتكون القيمة المقدرة للمعلمة غير معنوية إحصائيا ، ولا يمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول لمعلمة المجتمع . وفي هذه الحالة نجد أن :

$\hat{\text{ب}} < ٢\,\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}$ ، أو أن : $\text{ع}_{\hat{\text{ب}}} > \frac{\hat{\text{ب}}}{٢}$

(٦) من الممكن اختبار ما إذا كان الفرق بين متوسطي عينتين مختلفاً جوهرياً عن الصفر أم لا ، وذلك باستخدام معيار "ت" على النحو التالي :

افترض أن $\bar{ص}_1$ ($\bar{Y_1}$) هو متوسط عينة حجمها $ن_1$ (n_1) ، وأن $\bar{ص}_2$ (Y_2) هو متوسط عينة أخرى من مجتمع آخر حجمها $ن_2$ (n_2) ، وأن $ع_1^2$ (S_1^2) هو تباين قيم العينة الأولى ، $ع_2^2$ (S_2^2) هو تباين قيم العينة الثانية ، وأننا نريد اختبار :

فرض العدم : $م_1 - م_2$ = صفر ← $\mu_1 - \mu_2 = 0$

الفرض البديل : $م_1 - م_2 \neq$ صفر ← $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

حيث : $م_1$ (μ_1) = متوسط المجتمع الأول ، $م_2$ (μ_2)= متوسط المجتمع الثاني .

فإذا كان متوسط المجتمع وتباينه في الحالتين معلومين ، أو أن حجم العينة كبير ، فمن الممكن استخدام اختبار "ز" . أما إذا كان حجم العينة صغيراً فإننا نستخدم اختبار "ت". ونفرق في هذا الصدد بين حالتين :

(أ) إذا كانت $ن_1 = ن_2$ ، فان ت* المحسوبة تساوي :

$$ت^* = \frac{(\bar{ص}_1 - \bar{ص}_2) - (م_1 - م_2)}{ع_{ص}\sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}} \quad \text{.........................(٤-٤٦)}$$

حيث : $ع_{ص} = \sqrt{ع_1^2 + ع_2^2}$

$$t^* = \frac{(\bar{Y_1} - \bar{Y_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(S_1^2) + (S_2^2)}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

(ب) وإذا كانت $ن_1 \neq ن_2$ فان ت* تساوي :

$$\text{ت}^* = \frac{(\bar{\text{ص}}_1 - \bar{\text{ص}}_2) - (\text{م}_1 - \text{م}_2)}{\sqrt{\dfrac{\text{ع}_1^2}{\text{ن}_1} + \dfrac{\text{ع}_2^2}{\text{ن}_2}}} \quad \text{(٤-٤٧)}$$

ودرجات الحرية في هذه الحالة = $\text{ن}_1 - \text{ن}_2 - ٢$

$$t^* = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

مثال (٤-٥)

استخدام اختبار t

افترض أننا نريد اختبار معنوية المعلمة الانحدارية بنموذج الاستهلاك المقدر بالمثال (٣-٢) بالفصل الثالث ، حيث :

$$\text{ص} = ٥٣{,}٧ + {,}٧٨\ \text{س} + \text{د}$$
$$(٢٥{,}٦) \quad ({,}٠٣٧)$$

نظرا لأن حجم العينة صغير (ن=١٠) وتباين المجتمع مجهول فإننا نستخدم اختبار "ت" . وحيث أن لدينا معلومات مسبقة عن إشارة المعلمة الانحدارية والتي تمثل الميل الحدي للاستهلاك (موجبة)، فإننا نستخدم اختبار الطرف الأيمن . أي أن :

فرض العدم : ب = صفر ، والفرض البديل : ب > صفر

ولإتمام الاختبار نتبع الخطوات التالية:

(أ) نحدد قيمة ت* للمعلمة المقدرة على النحو التالي :

$$\text{ت}^* = \frac{\hat{\text{ب}} - \text{ب}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}} = \frac{{,}٧٨ - \text{صفر}}{{,}٠٣٧} = ٢١$$

(ب) نقوم بتحديد قيمة ت الجدولية عند مستوى معنوية ١٪ ودرجات حرية = ن–ك =١٠ – ٢ = ٨ ، فنجدها =٢,٨٩٦ .

(جـ) نقارن ت* المحسوبة ، ت الجدولية فنجد أن ت* > ت الجدولية ، ومن ثم نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل . وهذا يعني أن المعلمة المقدرة للميل الحدي للاستهلاك لها معنوية إحصائية وتختلف جوهريا عن الصفر ، وتعبر بذلك عن وجود علاقة طردية حقيقية بين الدخل والاستهلاك .

أهمية الاختبارات الإحصائية

ليس هناك اتفاق بين القياسيين Econometricians حول أي من المعيارين الإحصائيين الممثلين في معامل التحديد واختبارات المعنوية أكثر أهمية . فعلى سبيل المثال أيهما أفضل أن يكون معامل التحديد مرتفعا أم تكون الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة منخفضة ؟ . بالطبع لن تكون عملية الحكم على النموذج المقدر صعبة إذا اتضح أن معامل التحديد مرتفعا والأخطاء المعيارية منخفضة ، أو العكس . ففي مثل هذه الحالات يوجد هناك اتفاق بين المعيارين في الحكم على النموذج . ولكن تنشأ الصعوبة عندما يكون معامل التحديد مرتفعا وفي نفس الوقت الأخطاء المعيارية مرتفعة ، أو العكس . ففي مثل هذه الحالات لا يوجد هناك اتفاق بين المعيارين في الحكم على النموذج. وهنا يظهر تساؤل : هل نقبل المعلمات المقدرة أم نرفضها ؟

يرى البعض أن قبول أو رفض المعلمات المقدرة بناءاً على معيار ما يعتمد أساسا على الهدف من تقدير النموذج . فإذا كان الهدف هو التنبؤ فإن معامل التحديد يكون هو المعيار الأكثر أهمية . أما إذا كان الهدف من القياس هو تفسير بعض الظواهر الاقتصادية فان اختبار المعنوية يعتبر هو الأكثر أهمية .

وعموماً فان الأولوية تعطى للمعايير الاقتصادية ثم تأتي بعدها المعايير الإحصائية والقياسية . فإذا لم يجتاز النموذج المقدر اختبار المعايير الاقتصادية بنجاح فلن يكون هناك أهمية كبرى للاختبارات الأخرى من وجهة نظر الاقتصادي .

المبحث الخامس

تقدير فترات الثقة لمعلمات المجتمع

Confidence Intervals

عندما نقبل فرض العدم ب ر = صفر ، فإن هذا يعني أن معلمة المجتمع الحقيقية تساوي صفر ، وفي هذه الحالة لا تظهر هناك حاجة لتحديد فترة ثقة لمعلمة المجتمع ، حيث أننا قد عرفنا قيمتها وهي الصفر . ولكن عندما نرفض فرض العدم ، فإن هذا يعني أن معلمة المجتمع ≠ صفر ، وإنما تساوي قيمة أخرى غير صفرية . وفي هذه الحالة تظهر مشكلة جديدة وهي ضرورة تقدير حدود للقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع، وهذه هي ما تسمى بمشكلة تحديد فترة الثقة .

ولكن يتعين ملاحظة أننا عندما نرفض فرض العدم ونقبل تقدير العينة لأن معنوية إحصائية ، فإن هذا لا يعني أن تقدير العينة $\hat{ب}_ر$ هو نفسه معلمة المجتمع ب ر ، وإنما يعني فقط أن المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة معلمته الحقيقية لا تساوي صفرا . كما يعني أننا يمكن أن نثق في تقدير العينة كأساس جيد لتقدير فترة ثقة لمعلمة المجتمع .

وفترة الثقة هي الحدود النهائية التي يكون من المتوقع أن تقع معلمة المجتمع في داخلها بدرجة ثقة معينة . فعندما يكون مستوى المعنوية ٥ ٪ فإن هذا يعني أن هناك احتمالا ٩٥ ٪ أن تقع معلمة المجتمع داخل حدود فترة الثقة المقدرة، وهناك احتمالا ٥ ٪ أن تقع خارجها . وهذا يعني أيضا أنه في أثناء عملية المعاينة المتكررة تقع معلمة المجتمع داخل فترة الثقة المقدرة بناءاً على تقدير العينة في ٩٥ ٪ من الحالات ، وتقع خارجها في ٥ ٪ من الحالات . وتسمى النسبة ٩٥٪ مستوى الثقة أو معامل الثقة .

وسوف نوضح فيما يلي كيفية تحديد فترة ثقة لمعلمة المجتمع باستخدام توزيعي " ت " ، " ز " "Z","t".

(٤-٥-١) تحديد فترة ثقة من توزيع "ز" "Z"

دعنا نفترض أن :

ز = (بَ ر - ب ر) / ع بَ ر

$$Z = \frac{\hat{b}_i - b_i}{S_{\hat{b}i}}$$

∴ بَ ر - ب ر = ز ع بَ ر وهذا يشير للفرق بين بَ ر ، ب ر. ومثل هذا الفرق قد يكون موجباً وقد يكون سالباً ، ومن ثم فإن :

ب ر = بَ ر ± ز ع بَ ر

$$b_i = \hat{b}_i \pm Z.S_{\hat{b}i}$$

أي أن فترة الثقة لمعلمة المجتمع ب ر هي :

بَ ر - ز. ع بَ ر < ب ر < بَ ر + ز. ع بَ ر ....(٤-٤٨)

$$(\hat{b}_i + Z.S_{\hat{b}i}) > b_i > (\hat{b}_i - Z.S_{\hat{b}i})$$

مثال (٤-٧)

تحديد فترة ثقة باستخدام Z

إذا تم تقدير دالة الادخار من عينة مكونة من ٧٠٠ أسرة وكانت نتيجة التقدير على النحو التالي :

ص = -٥٠ + ٠,٣ س + ه
(١٠) (٠,٠٦)

حدد فترة ثقة للميل الحدي للادخار في المجتمع عند مستوى معنوية ٥ ٪ .

حيث أن حجم العينة كبير فإننا نستخدم توزيع "ز" في تحديد فترة الثقة .

وحيث أن مستوى المعنوية ٥٪ فانه عندما يتوزع على طرفين يصبح كل طرف ٢,٥ ٪.

وبالبحث في جدول توزيع "Z" عند احتمال ٠,٠٢٥ نجد أن ز =١,٩٦ . وبالتعويض عن قيم ز ، عب̂ ، ب̂ في الصيغة (٤-٤٨) نحصل على فترة الثقة كما يلي :

[٠,٣ –(١,٩٦)(٠,٠٦) > ب > ٠,٣ + (١,٩٦)(٠,٠٦)]

٠,١٨ > ب > ٠,٤٢

أي أن معلمة المجتمع " ب " من المتوقع أن تقع داخل الحدود ٠,١٨ & ٠,٤٢ باحتمال ٩٥٪ .

(٤-٥-٢) تحديد فترة ثقة من توزيع "ت" t

تتماثل عملية تحديد فترة ثقة من توزيع "ت" مع نفس العملية من توزيع "ز" مع فارق واحد هو أن فترة الثقة من توزيع "ت" تتحدد عند درجات حرية معينة. ومن ثم فإن فترة الثقة تتحدد على النحو التالي :

ب̂ر – ت . عب̂ر > بر > ب̂ر + ت . عب̂ر ....(٤-٤٩)

$$(\hat{b}_i + t.S_{\hat{b}i}) > b_i > (\hat{b}_i - t.S_{\hat{b}i})$$

عند درجات حرية = ن – ك .

مثال (٤-٧)
تحديد فترة ثقة باستخدام t

افترض أننا نريد تقدير فترة ثقة للميل الحدي للاستهلاك من بيانات نموذج الاستهلاك بالمثال (٣-٢) بالفصل الثالث حيث :

$$\text{ص} = ٥٣,٧ + ٠,٧٨\ \text{س} + \text{ى}$$
$$(٢٥,٦)\quad(٠,٠٣٧)$$

وباختيار مستوى معنوية ٥ ٪ ، فانه يتوزع على طرفي فترة الثقة بواقع ٠,٠٢٥ لكل طرف . وحيث أن درجات الحرية = ١٠ −٢ = ٨ ، فبالبحث عن $\text{ت}_{٠,٠٢٥،\,٨}$ بالجدول نجدها = ٢,٣٠٦ . ومن ثم فإن فترة الثقة تساوي :

$$\left[\hat{\text{ب}} - (\text{ت}_{٠,٠٢٥،\,٨})(\text{ع}_{\hat{\text{ب}}})\right] < \text{ب} < \left[\hat{\text{ب}} + (\text{ت}_{٠,٠٢٥،\,٨})(\text{ع}_{\hat{\text{ب}}})\right]$$

$$\text{ب} = \hat{\text{ب}} \pm \text{ت}_{٠,٠٢٥،\,٨}\ \text{ع}_{\hat{\text{ب}}} = ٠,٧٨ \pm (٢,٣٠٦)(٠,٠٣٧) = ٠,٧٨ \pm ٠,٠٨٥$$

أي أن الميل الحدي للاستهلاك على مستوى المجتمع يتراوح بين ٠,٦٩٥ ، ٠,٨٦٥ باحتمال ٩٥ ٪ .

ويمكن بالطبع تحديد فترة ثقة لمعلمة المجتمع عند مستوى معنوية ١ ٪ بدلا من ٥ ٪ بنفس الطريقة السابقة .

الفصل الخامس

خصائص المُقَدْر الجيد

Properties of The Good Estimator

يتعين الإشارة أولا إلى بعض التعاريف التي سوف نستخدمها في هذا الفصل :

(١) الُمقَدْر Estimator :

الُمقَدْر هو صيغة رياضية معينة تستخدم في تقدير أو قياس قيمة معلمة ما من خلال بيانات واقعية . ومن الأمثلة على ذلك ُمقَدْر الوسط الحسابي :

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص_ر}{ن} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

ومقدر الانحراف المعياري :

$$ع_{ص} = \frac{\sum (ص_ر - \bar{ص})^2}{ن} \qquad S_y = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n}$$

(٢) القيمة المُقدّرة Estimate :

تشير القيمة الُمقدّرة إلى القيمة الفعلية التي يتم تقديرها للمعلمة باستخدام الُمقَدْر من خلال بيانات واقعية ، مثال ذلك $\bar{ص}$ = ١٠ ، $\hat{ب}$ = ٦ وهكذا .

ويلاحظ عموما أن هناك طرقا عديدة يمكن استخدامها في تقدير المعلمات ومن بينها طريقة المربعات الصغرى العادية . ويوجد لكل طريقة من هذه الطرق مُقَدْر. ولتقييم هذه الطرق أو الُمقَدْرات يتعين علينا استخدام معايير معينة . وسوف نفرق بين نوعين من المعايير أو الخصائص التي نتناولها في مبحثين :

المبحث الأول : الخصائص المرغوبة للُمقَدْرات في حالة العينة الصغيرة .

المبحث الثاني : الخصائص المرغوبة للُمقَدْرات في حالة العينة الكبيرة .

المبحث الأول

الخصائص المرغوبة للمُقَدْرات في حالة العينة الصغيرة

يمكن حصر الخصائص المرغوبة للمقدرات في حالة العينة الصغيرة فيما يلي :

(٥-١-١) عدم التحيز   Unbiasedness

(٥-١-٢) أقل تباين   Least Variance

(٥-١-٣) الكفاءة   Efficiency

(٥-١-٤) الخطية   Linearity

(٥-١-٥) المثلية الخطية   Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)

(٥-١-٦) أدنى متوسط مربعات خطأ Minimum Mean-Square Error (MSE)

(٥-١-٧) الكفاية   Sufficiency

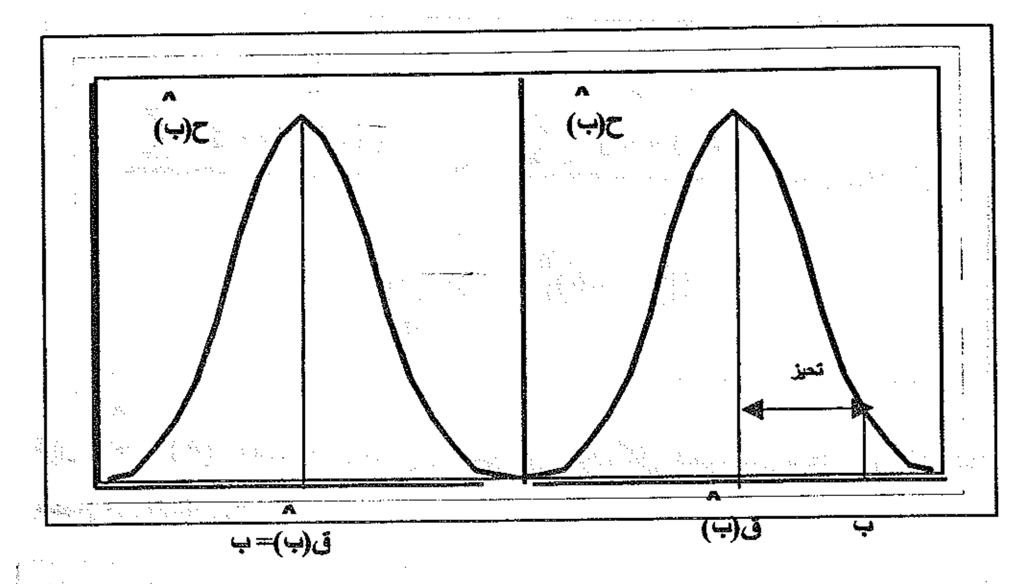
(٥-١-١) عدم التحيز :

يمكن تعريف التحيز بأنه يتمثل في وجود فرق أو انحراف بين القيمة المتوقعة للمُقَدْر ومعلمة المجتمع . فإذا كان لدينا مُقَدْر يتمثل في $\hat{ب}$ ثم قمنا بسحب عدد كبير من العينات الصغيرة من المجتمع وقدرنا $\hat{ب}$ لكل عينة منها ، فإن هذا المُقَدْر سوف يكون متحيزاً إذا كان الفرق بين القيمة المتوسطة أو القيمة المتوقعة لـ $\hat{ب}$ من العينات كلها ومعلمة المجتمع ب لا يساوي صفراً . أي إذا كان :

ق($\hat{ب}$) - ب ≠ صفر ، يكون $\hat{ب}$ متحيزاً $E(\hat{b}) - b \neq 0$

ق($\hat{ب}$) - ب = صفر ، يكون $\hat{ب}$ غير متحيز $E(\hat{b}) - b = 0$

ويوضح الشكل (٥-١) حالة مُقَدْر غير متحيز ، في حين يوضح الشكل (٥-٢) حالة مُقَدْر متحيز . وعموماً فإن صفة عدم التحيز وإن كانت صفة مرغوب فيها إلا أنها لا تعتبر صفة مهمة في حد ذاتها . وإنما هي تعتبر صفة مهمة فقط عندما تقترن بصفات أخرى كما سوف يتضح فيما بعد .



شكل (٥-١)
ب̂ غير متحيز

شكل (٥-٢)
ب̂ متحيز

(٥–١–٢) أقل تباين

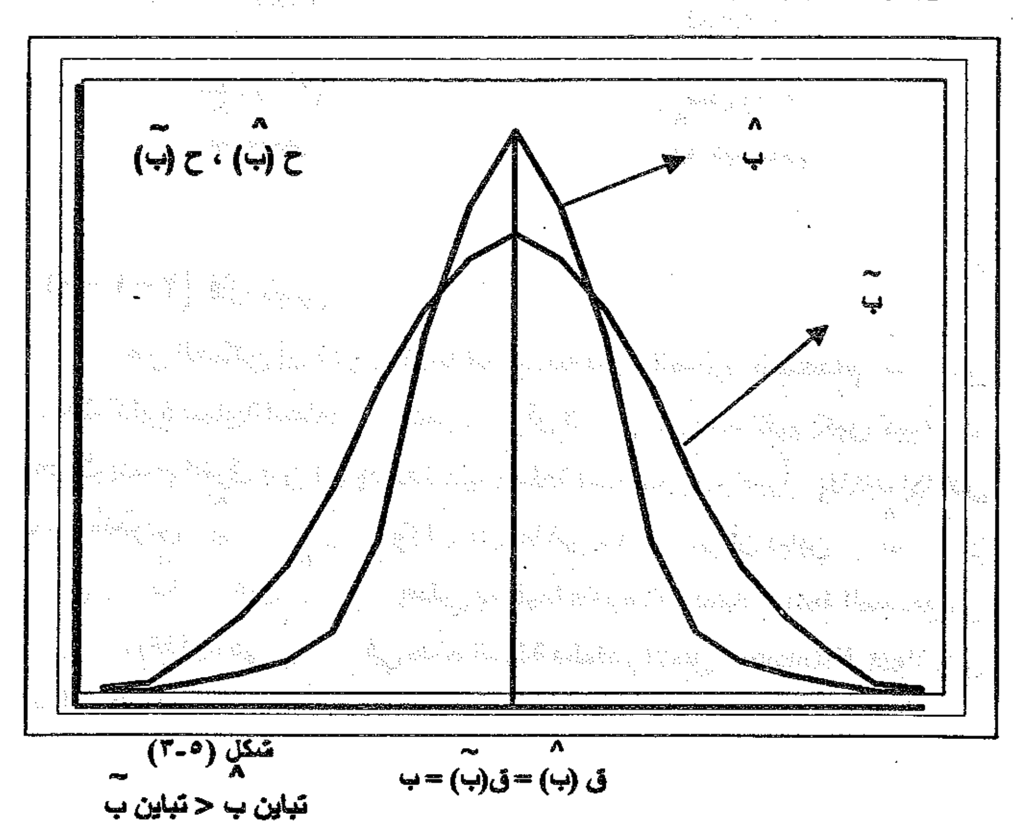
من الممكن أن تكون القيمة المتوسطة للقيم المُقَدّرة باستخدام ب̂ من عينات كثيرة مساوية لمعلمة المجتمع ، غير أن التباين بين هذه القيم يكون كبيراً جداً بحيث يصبح الفرق بين أي واحدة منها ومعلمة المجتمع ب كبيراً. ولذلك إذا كان لدينا مُقَدْرين ب̂ ، ب̃ وكان كليهما غير متحيز ، غير أن تباين ب̂ < تباين ب̃ فإن ب̂ يعطي لنا قيما مقدرة أكثر تمثيلا لمعلمة المجتمع من ب̃ . ولذا يسمى ب̂ في هذه الحالة بالمقدر الأمثل Best Estimator . أي أنه إذا كان :

ع²ب̂ < ع²ب̃

مجـ [ب̂ − ق (ب̂)]² / ن < مجـ [ب̃ − ق (ب̃)]² / ن ......(٥-١)

$$\frac{\sum\left[\tilde{b} - E(\tilde{b})\right]^2}{n} > \frac{\sum\left[\hat{b} - E(\hat{b})\right]^2}{n}$$

فإن ب̂ ($\hat{b}$) يعتبر مقدر أمثل بالرغم من كون كل كنهما غير متحيز ، وذلك كما يتضح من الشكل (٥-٣) .

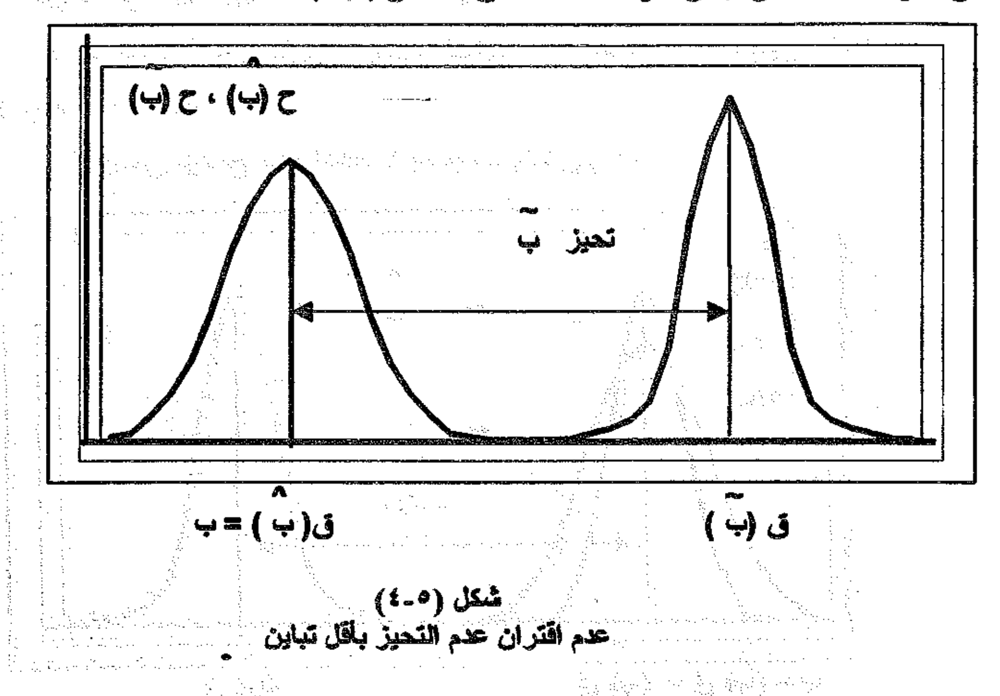


شكل (٥-٣)

ق (ب̂) = ق(ب̃) = ب

تباين ب̂ < تباين ب̃

وبالرغم من أن صفة أقل تباين مرغوبة ، إلا أنها في حد ذاتها ليست هامة . فهي تستمد أهميتها من اقترانها بصفة عدم التحيز ، كما تستمد صفة عدم التحيز أهميتها من اقترانها بصفة أقل تباين ، وذلك كما يتضح بالشكل (٥-٤) .



شكل (٥-٤)
عدم اقتران عدم التحيز بأقل تباين

فيلاحظ من الشكل (٥-٤) أن بَ تتصف بصفة أقل تباين وبالرغم من ذلك فهي متحيزة بدرجة كبيرة جداً عن المعلمة الحقيقية للمجتمع ب . ولذلك فإن صفة أقل تباين ليست هامة في هذه الحالة طالما أن بَ لا يمكن أن تعطي قيماً تمثل معلمة المجتمع . أما بَ وإن كانت غير متحيزة ، حيث ق (بَ) = ب ، إلا أن التباين بين القيم المقدرة لـ بَ كبير جداً بحيث يقلل من إمكانية تمثيل أي قيمة مقدرة من عينة لمعلمة المجتمع . ولذلك فإن عدم التحيز في هذه الحالة غير هام لعدم إقترانه بصفة أقل تباين . ولعل الاختيار بين بَ ، بَ في هذه الحالة يتوقف على معيار آخر سوف يتم شرحه فيما بعد يسمى أدنى مربع لمتوسط الخطأ .

(٥-١-٣) الكفاءة :

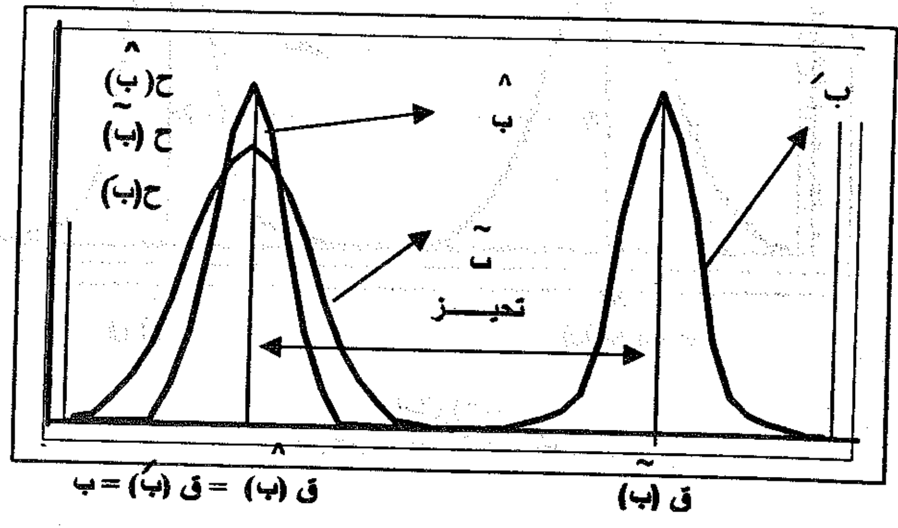
يعتبر الُمقَدْر كفؤاً إذا توفرت فيه الخاصتين السابقتين معاً . أي إذا كان :

١- غير متحيز : ق (بَ̂) = ب ⟵ $E(\hat{b}) = b$

٢- يتمتع بصفة أقل تباين ، حيث : تباين (بَ̂) < تباين (بَ̃)

$\text{var}(\hat{b}) < \text{var}(\tilde{b})$

ويمكن توضيح هذه الخاصية باستخدام شكل (٥-٥) .



شكل (٥-٥)
المقدر الكفؤ

فمن الشكل (٥-٥) يتضح أن ب̂ هو الُمقَدْر الكفؤ من بين الُمقَدْرات الثلاث ، حيث :

(١) ب̂ ، ب´ غير متحيزين ، في حين أن ب̃ متحيز .

(٢) تباين ب̂ < تباين ب̃ < تباين ب´ .

إذن ب̂ غير متحيز وصاحب أدنى تباين ، ومن ثم فهو كفؤ دون غيره .

(٥-١-٤) الخطية :

يعتبر المُقَدِّر خطياً إذا كان على علاقة خطية مع القيم المشاهدة للمتغير التابع . فإذا كان لدينا قيماً مشاهدة ص١ ، ص٢ ، ....، ص ن ، فإن " $\hat{ب}$ " يعتبر مقدراً خطياً إذا كان :

$\hat{ب}$ = أ١ ص١ + أ٢ص٢ + ...+ أن ص ن ، حيث أن " أر " معلمات ثابتة .

ويلاحظ أن خطية العلاقة على هذا النحو تسهل من العمليات الحسابية لـ $\hat{ب}$ وتجعلها بسيطة بالمقارنة مع العلاقة غير الخطية . ومن الأمثلة على العلاقة الخطية الوسط الحسابي ، حيث :

$$\bar{ص} = \frac{١}{ن} \sum ص_ر = \frac{١}{ن} ص_١ + \frac{١}{ن} ص_٢ + ... + \frac{١}{ن} ص_ن$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i = \frac{1}{n}Y_1 + \frac{1}{n}Y_2 + ... + \frac{1}{n}Y_n$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن "$\bar{ص}$" على علاقة خطية مع القيم المشاهدة للمتغير "ص" تتحدد بدلالة الثابت " ١/ن" . ولقد سهل هذا من العمليات الحسابية حيث : أ١=أ٢= ....= أن = ١/ن .

(٥-١-٥) المثلية الخطية (BLUE) :

يعتبر المُقَدِّر خطيا وغير متحيز وأمثل إذا جمع بين صفات ثلاثة هي : عدم التحيز ، وأقل تباين ، والخطية .

(٥-١-٦) أدنى متوسط لمربعات الخطأ (MSE) :

يعتبر هذا المعيار توليفة من صفتي عدم التحيز وأقل تباين . ويمكن اعتبار مُقَدِّر ما يتمتع بهذه الصفة إذا كانت القيمة المتوقعة لمربع انحرافات القيم المقدرة بواسطته عن معلمة المجتمع أدنى ما يمكن . ففي الواقع العملي نجد أن القيمة المتوقعة لأي مقدر ق ($\hat{ب}$) لابد أن تنحرف عن معلمة المجتمع " ب " ، كما أن تباين القيم

لابد أن يكون أكبر من الصفر . ومن ثم فإن المفاضلة بين الُمقدْرات المختلفة يتعين أن تتم على أساس مقارنة متوسط توليفة التحيز والتباين . ويلاحظ في هذا الصدد أن الُمقدْر الذي يعطي أدنى متوسط لتوليفة التحيز والتباين يعتبر هو الأفضل . ويحقق معيار أدنى متوسط لمربعات الخطأ (أم خ) (MSE) هذا المطلب ، حيث :

$$\text{أم خ} = \frac{\sum (\hat{\text{ب}} - \text{ب})^{2}}{\text{ن}} = \text{ق} (\hat{\text{ب}} - \text{ب})^{2} \quad ....(٥-٢)$$

$$MSE = E(\hat{b} - b)$$

ويمكن إثبات أن هذه الخاصية تعتبر توليفة من صفتي عدم التحيز و أدنى تباين كما يلي :

بإضافة ق ($\hat{\text{ب}}$) وطرحها بداخل القوس بالمعادلة (٥-٢) نحصل على :

$$\text{أم خ} = \text{ق} [\{ \hat{\text{ب}} - \text{ق} (\hat{\text{ب}}) + \text{ق} (\hat{\text{ب}}) - \text{ب} \}]^{2}$$

وبفك القوس عن طريق ضربه في نفسه مرتين ، نحصل على :

$$\text{أم خ} = \text{ق} [\hat{\text{ب}} - \text{ق} (\hat{\text{ب}})]^{2} + [\text{ق} (\hat{\text{ب}}) - \text{ب}]^{2} + ٢ \,\text{ق} \,\, \{ \hat{\text{ب}} - \text{ق} (\hat{\text{ب}}) \} \{ \text{ق}(\hat{\text{ب}}) - \text{ب} \} \,]$$

ويمكن إثبات أن الحد الثالث بالمعادلة السابقة = صفر ، حيث :

$$\text{ق} [\{ \hat{\text{ب}} - \text{ق} (\hat{\text{ب}}) \} \{ \text{ق}(\hat{\text{ب}}) - \text{ب} \}] = \text{ق} [\hat{\text{ب}} \,\text{ق} (\hat{\text{ب}}) - \hat{\text{ب}} \,\text{ب} - \{ \text{ق} (\hat{\text{ب}}) \}^{2} + \text{ب} \,\text{ق} (\hat{\text{ب}})]$$

$$[\text{ق} (\hat{\text{ب}})]^{2} - \text{ق} [(\hat{\text{ب}})]^{2} - \text{ب} \,\text{ق} (\hat{\text{ب}}) + \text{ب} \,\text{ق} (\hat{\text{ب}}) = \text{صفر}$$

إذن :

$$\text{أم خ} = \text{ق} [\hat{\text{ب}} - \text{ق} (\hat{\text{ب}})]^{2} + [\text{ق} (\hat{\text{ب}}) - \text{ب}]^{2} = \text{تباين } \hat{\text{ب}} + \text{مربع تحيز } \hat{\text{ب}} \text{ عن ب} \quad ...(٥-٣)$$

$$MSE = E\left[\hat{b} - E(\hat{b})\right]^{2} + \left[E(\hat{b}) - b\right]^{2}$$

أي أن هذه الخاصية تتكون من خاصتي عدم التحيز وأقل تباين .

(٥-١-٧) الكفاية :

يمكن تعريف الُمقَدْر الكافي بأنه ذلك الُمقَدْر الذي يستخدم كل معلومات العينة ، ومن ثم فإن أي ُمقَدْر آخر لا يمكنه أن يضيف جديداً باستخدام نفس العينة . فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا عدد من القيم المرتبة ترتيبا تنازليا $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$، $ص_{٤}$ ، $ص_{٥}$ وكانت تمثل مشاهدات عينة ما ، فإن مقياس المتوسط الحسابي يعتبر مقدراً كافياً للنزعة المركزية لأنه يستخدم كل المشاهدات حيث :

$$\bar{ص} = (ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣} + ص_{٤} + ص_{٥}) / ٥ .$$

أما الوسيط فهو يعتبر مقدر غير كافي لأنه يركز على قيمة واحدة وهي $ص_{٣}$ ، أي القيمة التي في الوسط . ويلاحظ أن الكفاية لا تعتبر صفة هامة في حد ذاتها ولكنها تعتبر شرطاً ضرورياً لخاصية الكفاءة .

وبوجه عام لا يوجد هناك اتفاق حول أي الخصائص يعتبر أهم من الآخر ، فهذا أمر يختلف من باحث لآخر وفقا للهدف من الدراسة . وعموما يمكن تقرير الحقائق التالية :

(١) يعتبر ُمقَدْر ما أفضل من غيره إذا كان يتصف بعدد من الخصأئص المرغوبة أكثر من غيره .

(٢) لا تعتبر صفة أدنى تباين في حد ذاتها هامة ، حيث قد يوجد تباين صغير جداً ولكن هناك تحيز كبير ، ومن ثم فإن التباين الصغير يكون حول المتوسط الخطأ. كما أن صفة عدم التحيز لا تعتبر هامة إلا إذا اقترنت بخاصية أقل تباين.

(٣) يلاحظ أن معياري المثلية الخطية وأدنى متوسط لمربعات الخطأ يحتويان على عنصري التحيز والتباين وهما يفضلان بوجه عام أي معيار فردي آخر .

وفيما يتعلق بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) كإحدى المقدرات لمعلمات النماذج فإنها تتصف بعدم التحيز والخطية والمثلية الخطية وذلك في ظل افتراضات معينة .

المبحث الثاني

الخصائص المرغوبة للمَقدْرات في حالة العينات الكبيرة

تسمى الخصائص المرغوبة في حالة العينات الكبيرة بالخصائص النهائية Asymptotic Properties ، وهي الخصائص التي تتوفر في المقدرات عندما يكبر حجم العينة كبراً يقرب من ما لانهاية (حجم المجتمع) . ومن أهمها :

(٥-٢-١) عدم التحيز النهائي Asymptotic Unbiasedness

(٥-٢-٢) الاتساق Consistency

(٥-٢-٣) الكفاءة النهائية Asymptotic Efficiency

وسوف يتم توضيح هذه الخصائص بنوع من التفصيل فيما يلي :

(٥-٢-١) عدم التحيز النهائي :

يتصف مُقدْر ما بعدم التحيز النهائي إذا كانت القيمة المتوقعة له ق ($\hat{ب}$) (أي وسطه الحسابي) تساوي معلمة المجتمع عندما يكبر حجم العينة كبراً لانهائياً .

ولتوضيح هذه الفكرة افترض أننا قمنا بسحب عدد من العينات من المجتمع ، وكان حجم كل عينة منها = $ن_١$ ، ثم استخدمنا المُقدْر محل الاختبار في تقدير قيمة $\hat{ب}$ من هذه العينات وحصلنا على متوسط القيم المقدرة من كل العينات وأطلقنا عليه $\hat{ب}_١$. ثم قمنا بدورة أخرى وسحبنا نفس العدد من العينات ولكن عند حجم أكبر $ن_٢ > ن_١$ ، و استخدمنا المقدر محل الاختبار في تقدير $\hat{ب}$ من هذه العينات وحصلنا على متوسط القيم المقدرة من كل العينات وأطلقنا عليه $\hat{ب}_٢$ ، وكررنا نفس الإجراء عدداً كبيراً من المرات لأحجام متزايدة من العينات حتى حصلنا على متوسطات مختلفة للقيم المقدرة عند أحجام مختلفة للعينات كما يتضح من الجدول (٥-١) ، ثم حصلنا على الفرق ($أ_ر$) بين معلمة المجتمع "ب" ومتوسط القيمة المقدرة للمعلمة عند كل حجم عينة ، حيث : $أ_ر = ب - \hat{ب}_ر$. عندئذ إذا كان الفرق "$أ_ر$"

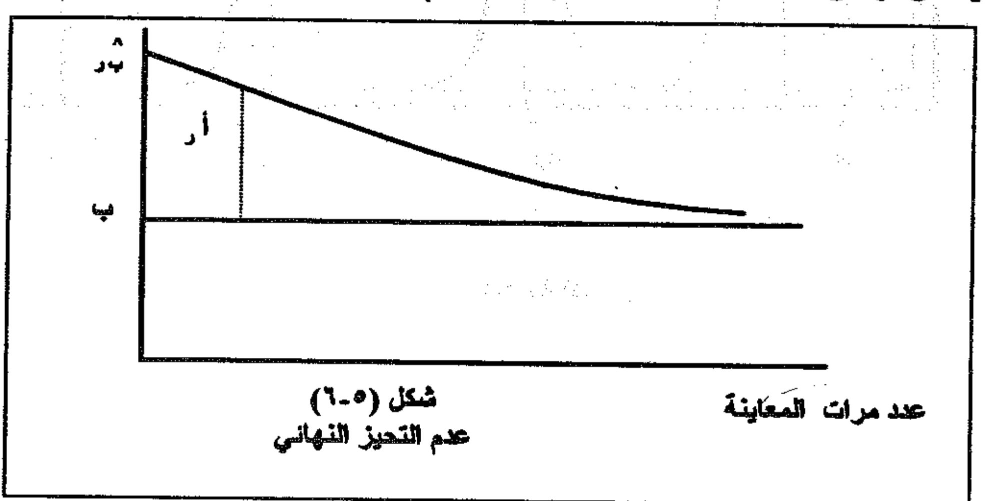
يتناقص كلما زاد حجم العينة "ن" حتى يصل إلى الصفر "$أ_ر$ = صفر" عندما يصبح حجم العينة "ن = ∞" فإن المُقدِّر يتصف بخاصية عدم التحيز النهائي . وفي هذه الحالة نجد أن : $ن_1 < ن_2 < ن_3 < .... < ن_ر$ ، $أ_1 > أ_2 > أ_3 .... > أ_ر$.

جدول (٥-١)

عدم التحيز النهائي

عدد مرات المعاينة	حجم العينة	متوسط القيم المقدرة	التحيز عن معلمة المجتمع ($أ_ر$)
١	$ن_1$	$\hat{ب}_1$	$أ_1$
٢	$ن_2$	$\hat{ب}_2$	$أ_2$
٣	$ن_3$	$\hat{ب}_3$	$أ_3$
•	•	•	•
•	•	•	•
ل	$ن_ر$	$\hat{ب}_ل$	$أ_ر$= صفر

ويمكن توضيح هذه الخاصية باستخدام الشكل (٥-٦) :



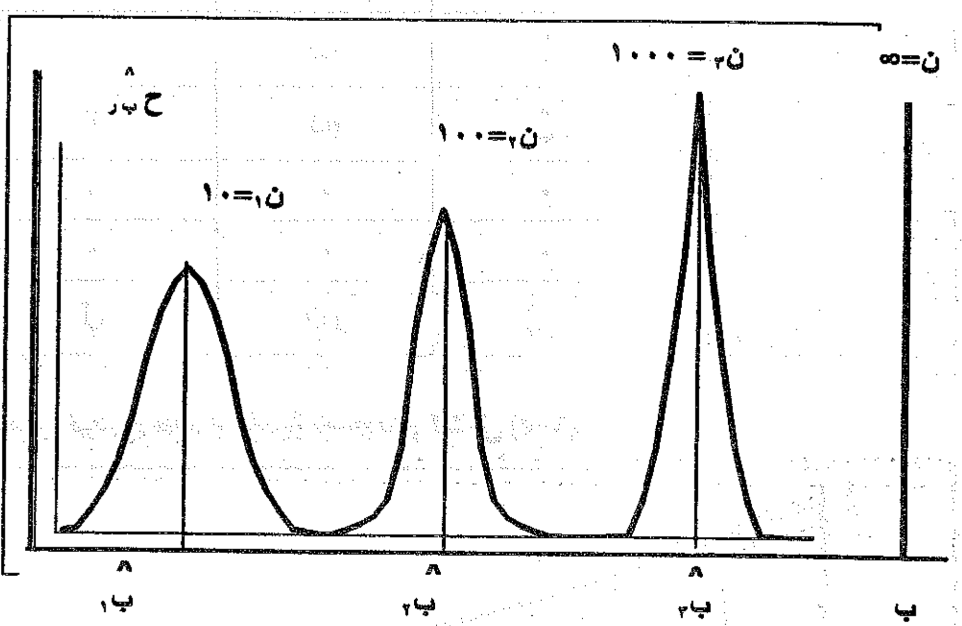
شكل (٥-٦)
عدم التحيز النهائي

(٥-٢-٢) الاتساق :

تتطلب خاصية الاتساق شرطين :

(أ) أن يتصف المقدر بصفة عدم التحيز النهائي .

(ب) أن يتناقص التباين بين المعلمات المقدرة $\hat{ب}_ر$ كلما زاد حجم العينة " ن" حتى يصل للصفر عندما يصل حجم العينة إلى ∞ ، وعندئذ تصبح القيمة المقدرة من عينة مساوية لمعلمة المجتمع " ب " . أي أن : نهـا $(ع^{٢}_{\hat{ب}_ر})$ = صفر . ويمكن توضيح ذلك من شكل (٥-٧) .



شكل (٥-٧)
خاصية الاتساق

حيث يتضح من الشكل (٥-٧) أنه كلما زاد حجم العينة كلما قل التحيز عن معلمة المجتمع ، وكلما قل التباين بين المعلمات المقدرة من عينات مختلفة باستخدام نفس المُقَدْر .

(٥-٢-٣) الكفاءة النهائية :

يتصف المقدر $\hat{ب}$ بالكفاءة النهائية إذا توفر شرطان :

(أ) الاتساق .

(ب) أن يكون تباين $\hat{ب}$ أقل ما يمكن عندما " ن ← ∞ " بالمقارنة مع كل المُقَدْرات الأخرى مثل $\tilde{ب}$ مثلا .

ويلاحظ في هذا الصدد أن طريقة المربعات الصغرى العادية تتصف بعدم التحيز النهائي والاتساق والكفاءة وذلك في ظل توفر افتراضات معينة .

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

الفصل السادس

الانحدار غير الخطي البسيط

Nonlinear Simple Regression

يُستخدم الانحدار غير الخطي البسيط في قياس علاقة غير خطية بين متغيرين أحدهما تابع ص (Y) والآخر مستقل س (X) . ومن الممكن استخدام ما يسمى محولا بوكس-كوكس Box-Cox Transformations لتحديد الصيغ المختلفة التي يمكن أن تأخذها العلاقة غير الخطية البسيطة بين ص ، س . ولتوضيح ذلك افترض أن الصيغة العامة للعلاقة بين ص (Y)، س (X) كما يلي :

$$\text{ص}^{\text{م}_1} = \text{أ}_\circ + \text{ب}\ \text{س}^{\text{م}_2} + \text{ع} \qquad \text{.................(٦-١)}$$

$$Y^{\lambda 1} = a_o + b\ X^{\lambda 2} + u$$

بحيث :

$$\text{ص}^{\text{م}_1} = \begin{cases} \dfrac{\text{ص}^{\text{م}_1} - 1}{\text{م}_1} & \text{بالنسبة لـ م}_1 \neq \text{صفر} \\ \text{لو ص} & \text{بالنسبة لـ م}_1 = \text{صفر} \end{cases} \qquad \text{...............(٦-٢)}$$

$$\text{س}^{\text{م}_2} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{م}_2} - 1}{\text{م}_2} & \text{بالنسبة لـ م}_2 \neq \text{صفر} \\ \text{لو س} & \text{بالنسبة لـ م}_2 = \text{صفر} \end{cases} \qquad \text{................(٦-٣)}$$

$$Y^{\lambda 1} = \begin{cases} \frac{Y^{\lambda 1}-1}{\lambda 1} & for\ \lambda 1 \neq 0 \\ \text{Ln } Y & \text{for } \lambda 1 = 0 \end{cases} \qquad X^{\lambda 2} = \begin{cases} \frac{X^{\lambda 2}-1}{\lambda 2} & for\ \lambda 2 \neq 0 \\ \text{Ln } X & \text{for } \lambda 2 = 0 \end{cases}$$

ومن ثم فإن هناك حالات كثيرة تصف العلاقة بين ص (Y) ، س (X) وفقا للمحولين السابقين. وبالنسبة للعلاقة الخطية التي تعرضنا لها سابقا نجد أنها تحدث عندما م١=م٢=١ $(\lambda_1=\lambda_2=1)$. فبالتعويض عن م١ (λ_1) ، م٢ (λ_2) في محولي بوكس-كوكس (٦-٢) ، (٦-١) بالقيمة ١ ، نجد أن العلاقة بين ص ، س تأخذ الصيغة التالية :

ص -١ = أ. + ب (س -١) +ع

ص = (١ +أ.-ب) + ب س +ع

ص = أ + ب + س + ع ....(٦-٤)

$$Y = a + b\,X + u$$

حيث : أ = (١ + أ. - ب).

وتمثل (٦-٤) الصيغة الخطية التي تعرضنا لها في الفصل الثالث . وسوف نشتق صيغا أخرى غير خطية من محولي بوكس-كوكس نتعرض لكل واحد منها في مبحث مستقل على النحو التالي :

المبحث الأول : العلاقة اللوغاريتمية المزدوجة	Double -Log
المبحث الثاني : العلاقة شبه اللوغاريتمية	Semi-log
المبحث الثالث : علاقة التحويل لمقلوب	Reciprocal Transformation
المبحث الرابع : علاقة لوغاريتم - مقلوب	Log-inverse

المبحث الأول

العلاقة اللوغاريتمية المزدوجة

Double - Log Relationship

إذا كانت م١ (λ_1) = م٢ (λ_2) = صفر ، فبالتعويض في محولي بوكس-كوكس نحصل على العلاقة التالية :

لو ص = أ. + ب لو س + ء ....(٦-٥)
$\text{Ln } Y = a_0 + b \text{ Ln } X + u$

وتسمى الصيغة (٦-٥) بالصيغة اللوغاريتمية المزدوجة . ويلاحظ هنا أن "لو" Ln تشير إلى اللوغاريتم الطبيعي . وتتمثل الصيغة الأصلية للصيغة (٦-٥) وهي الصيغة المقابلة للوغاريتم Antilog في :

ص = أ س^ب هـ^ء ....(٦-٦)
$Y = AX^b e^u$

حيث :

ص = المتغير التابع $Y =$

س = المتغير المستقل $X =$

أ = المعلمة الناقلة $A =$

ب = مرونة المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل $b =$

هـ = أساس اللوغاريتم الطبيعي وقيمته ثابتة = ٢,٧١٨ $e =$

ء = الحد العشوائي $u =$

وبافتراض أن القيمة المتوسطة للحد العشوائي ء = صفر ، فان العلاقة (٦-٦) تصبح :

ص = أ س ^ب ⟵ $Y = AX^b$ ....(٦-٧)

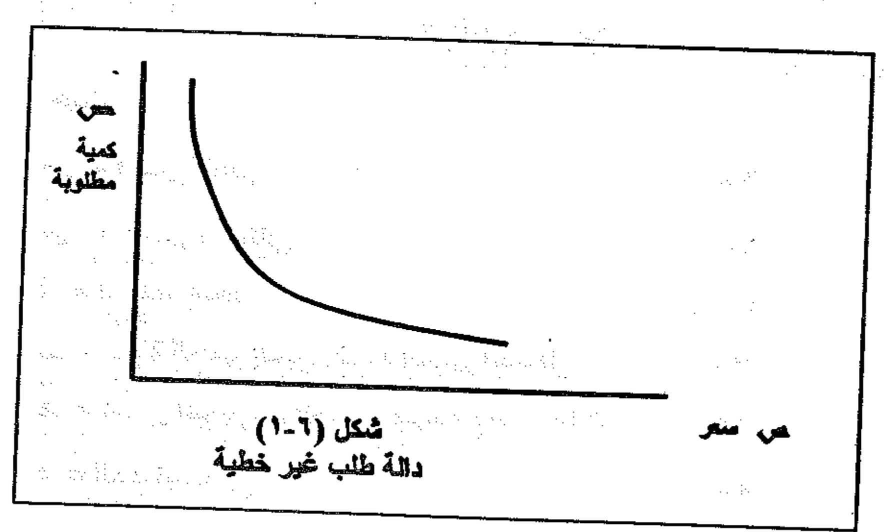
ويتم الحصول على (٦-٥) عن طريق أخذ لوغاريتم طرفي (٦-٦) حيث أ.= لوأ .

ويلاحظ أن ميل العلاقة (٦-٧) متغير وليس ثابتاً ، حيث :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ب أ س}^{\text{ب}-1} = \frac{\text{ب أ س}^{\text{ب}}}{\text{س}} = \text{ب}\ \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

أي أنه يتغير بتغير س ، ص ولذا فهي علاقة غير خطية . وبالرغم من أن الميل متغير إلا أن المرونة "ب" ثابتة عند جميع مستويات س ، ص .

وإذا كانت العلاقة (٦-٧) تمثل دالة طلب ، حيث ص = الكمية المطلوبة ، س = سعر السلعة ، فإنه من المتوقع أن تكون : ب < صفر ، وهي تمثل في هذه الحالة مرونة الطلب السعرية . وتأخذ العلاقة بين ص ، س في هذه الحالة الشكل (٦-١) بشرط أن تكون أ > صفر.[1]



شكل (٦-١)
دالة طلب غير خطية

---

[1] بمفاضلة (٦-٧) بالنسبة لـ س نحصل على : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ب أ س}^{\text{ب}-1} = \frac{\text{ب أ س}^{\text{ب}}}{\text{س}} = \text{ب}\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

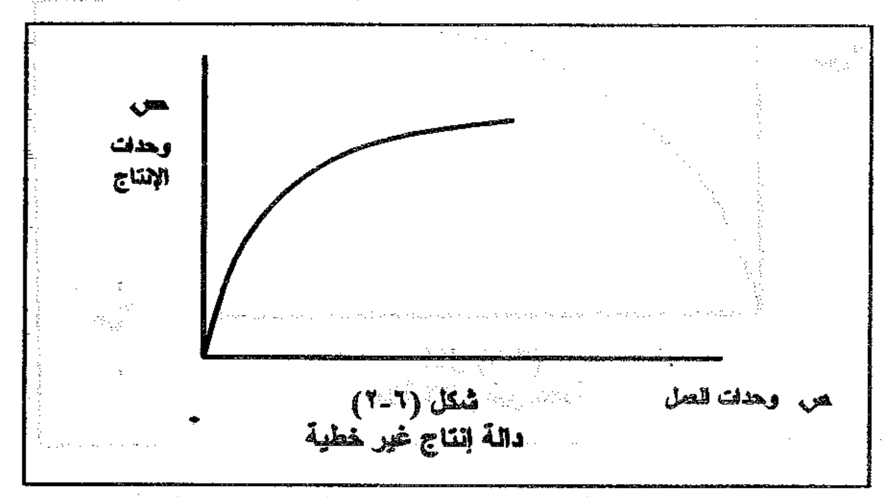
$\therefore \text{ب} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

وإذا كانت مرونة الطلب السعرية ب = -١ ، فإن : ص = (أ / س)

وبالتالي فان الإنفاق الكلي = ص. س = أ = ثابت ويمثل المساحة تحت منحنى الطلب.

وفي حالة الطلب عديم المرونة ب = صفر ، ص= أ = ثابت .

أما إذا كانت المعادلة (٦-٧) تمثل دالة إنتاج في ظل تناقص الغلة ، حيث ص = الكمية المنتجة ، س = وحدات العمل ، فانه من المتوقع أن تكون صفر < ب < ١ وهي تمثل في هذه الحالة مرونة الإنتاج للعمل . وتأخذ الشكل (٦-٢) .



شكل (٦-٢)
دالة إنتاج غير خطية

ويمكن أن تصاغ دالة الإنتاج في صورة أخرى كما يلي :

ص = د (س ، ع) ← $Y = f(K, L)$

حيث ص = الكمية المنتجة ، س = الكمية المستخدمة من رأس المال ، ع = الكمية المستخدمة من العمل . وبقسمة طرفي المعادلة على "ع" نحصل على :

$$\frac{ص}{ع} = د\left(\frac{س}{ع} ، \frac{ع}{ع}\right) = د\left(\frac{س}{ع}\right) \longrightarrow \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}\right)$$

ويمكن كتابة هذه الدالة كما يلي : ص* = د (س*) ← $Y^* = f(X^*)$ حيث :

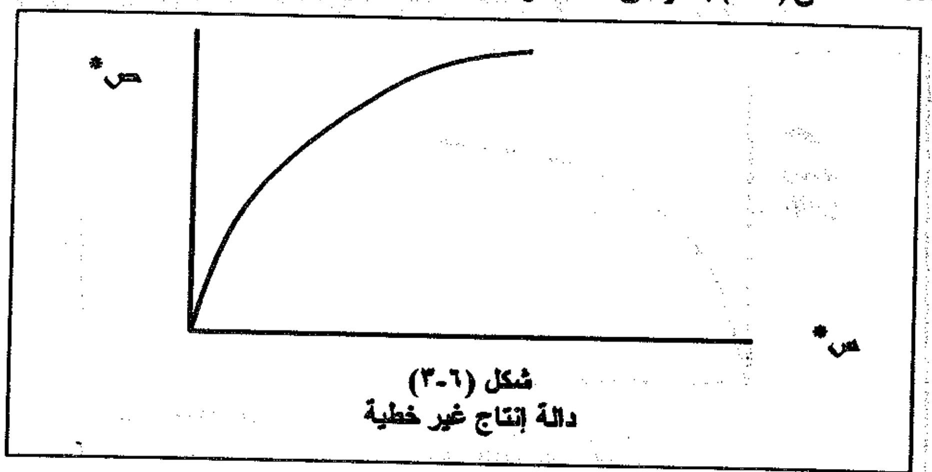
$ص^* = \frac{ص}{ع}$ = متوسط نصيب العامل من الناتج أو ما يسمى الانتاجية المتوسطة = $Y^* = \frac{Y}{L}$

$س^* = \frac{س}{ع}$ = كثافة رأس المال ، أي متوسط نصيب العامل من رأس المال = $K^* = \frac{K}{L}$

ويمكن تقدير دالة الإنتاج كعلاقة بين ص* ، س* باستخدام الصيغة (٦-٨) من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية :

$$ص^* = أ\ س^{*ب} \qquad Y^* = A\, K^{*b} \quad ....(٦-٨)$$

وتمثل المعلمة "ب" في هذه الحالة مرونة الناتج بالنسبة لرأس المال . وتأخذ هذه الدالة الشكل (٦-٣) بافتراض أن صفر < ب < ١ .



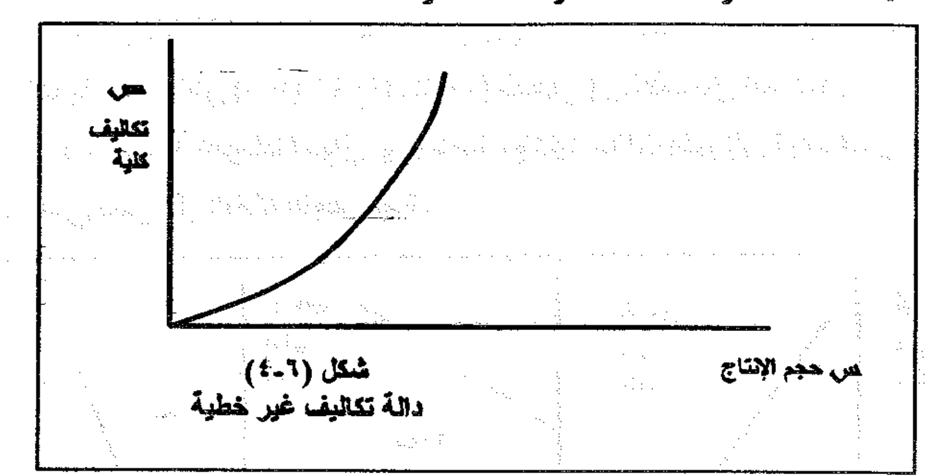
شكل (٦-٣)
دالة إنتاج غير خطية

أما إذا كانت الدالة (٧-٢) تمثل دالة تكاليف في ظل ظروف تزايـد النفقة بالفترة الطويلة، حيث : ص = التكاليف الكلية (متغيرة) ، س = حجم الإنتاج ، فإنه من المتوقع أن تكون ب > صفر . وتمثل "ب" في هذه الحالة مرونة التكاليف للإنتاج . وتأخذ دالة التكاليف الشكل (٦-٤) .

ويمكن تقدير الدالة غير الخطية (٦-٦) من خلال بيانات عن ص ، س باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية بعد تحويلها لصورة لوغاريتمية خطية كما في الصيغة (٦-٩) .

$$ص^* = أ^* + ب\ س^* + ع \leftarrow Y^* = a^* + b\, X^* + u \quad ....(٦-٩)$$

حيث: ص* = لو ص ، س* = لو س ، أ* = لو أ .



شكل (٦-٤)
دالة تكاليف غير خطية

فإذا توفرت لدينا بيانات عن ص ، س نقوم بالحصول على لوغاريتم قيمتيها ثم نستخدم الصيغتين (٣-١٧) ، (٣-١٩) في تقدير قيم $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، ولكن من خلال القيم اللوغاريتمية، حيث :

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص^* س^*}{\sum س^{*2}} \quad \text{.........(٦-١٠)}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x^* y^*}{\sum x^{*2}}$$

حيث :

$$س^* = س^* - \overline{س^*} = لو\ س - \frac{\sum لو\ س}{ن}$$

$$ص^* = ص^* - \overline{ص^*} = لو\ ص - \frac{\sum لو\ ص}{ن}$$

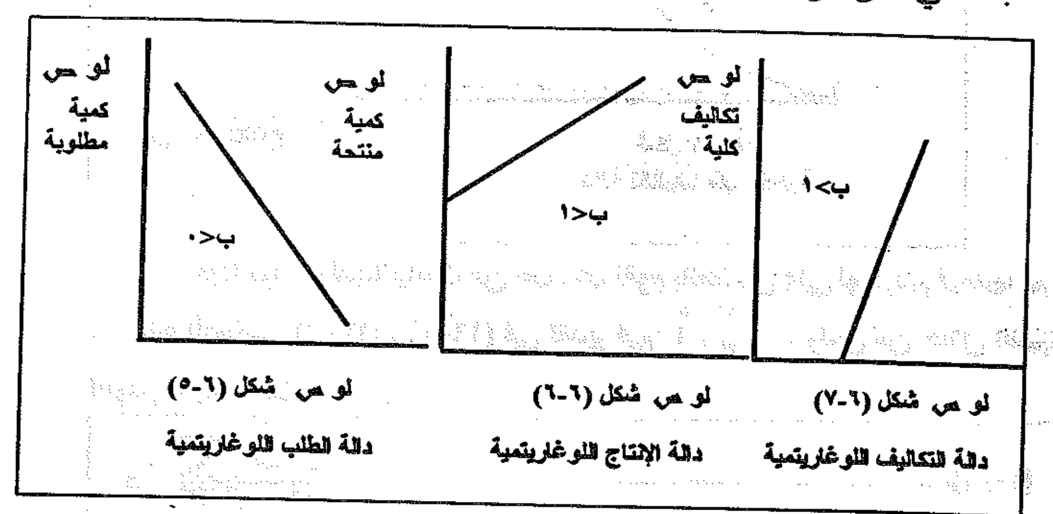
$$أ^* = \overline{ص^*} - ب\ \overline{س^*} = \frac{\sum لو\ ص}{ن} - \hat{ب}\ \frac{\sum لو\ س}{ن} \quad \text{...(٦-١١)}$$

وحيث أن : $أ^* = لو_{هـ}\ \hat{أ}$

$$\therefore\ \hat{أ} = هـ^{أ^*} = (٢,٧١٨)^{أ^*} = \text{مقابل لوغاريتم } أ^* \quad \text{..................(٦-١٢)}$$

وبهذه الطريقة نستطيع تقدير قيمتي أ̂ ، ب̂ .

ويلاحظ أن العلاقات غير الخطية تتحول إلى علاقات خطية عند تحويلها لعلاقات لوغاريتمية . فالأشكال (٦-١) ، (٦-٢) ، (٦- ٤) تتحول إلى الأشكال الخطية (٦-٥) ، (٦-٦) ، (٦-٧) عند تحويلها لدوال لوغاريتمية ، وكلها حالات تشير إلى ثبات المرونة "ب" التي تمثل ميل العلاقة اللوغاريتمية .



دالة الطلب اللوغاريتمية   دالة الإنتاج اللوغاريتمية   دالة التكاليف اللوغاريتمية

مثال (٦-١)

تقدير دالة إنتاج غير خطية

قام باحث بجمع بيانات عن الكميات المنتجة وعدد العمال في أحد القطاعات الصناعية عبر ٦ سنوات متتالية ، فكانت البيانات التي جمعها كما بالجدول (٦-١) .

والمطلوب هو :

(١) تقدير دالة الإنتاج التي تصف العلاقة بين الكمية المنتجة وعدد العمال كما توضحها البيانات السابقة.

(٢) اختبار المقدرة التفسيرية للنموذج .

(١) تقدير دالة الإنتاج

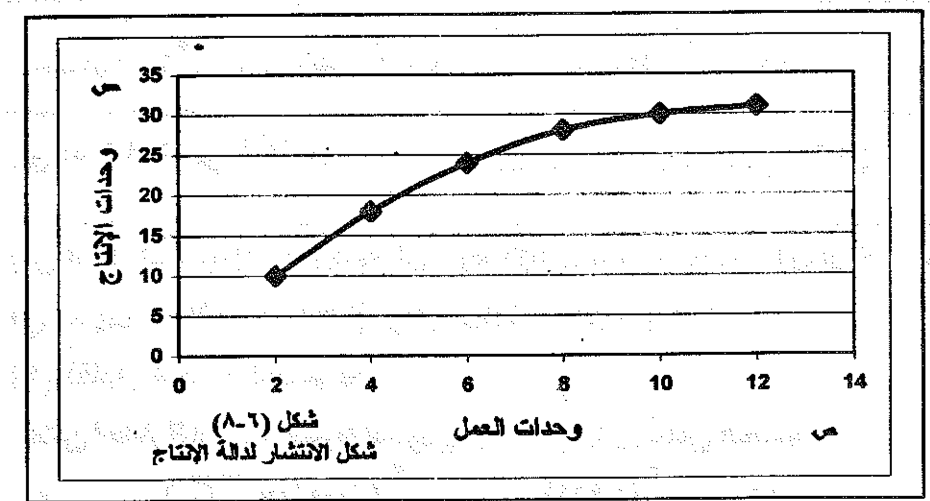
برسم شكل الانتشار من البيانات المعطاة نجد أن دالة الإنتاج غير خطية كما هو موضح بالشكل (٦–٨) . ولذا نستخدم الصيغة التالية في التقدير :

لو ص = لو أ + ب لو س + ع ← أو : ص* = أ* + ب س* + ع

جدول (٦–١)

بيانات الإنتاج والعمالة

السنة	الكميات المنتجة (ص) Y (ألف طن)	عدد العمال (س) X (ألف)
١٩٨٥	١٠	٢
١٩٨٦	١٨	٤
١٩٨٧	٢٤	٦
١٩٨٨	٢٨	٨
١٩٨٩	٣٠	١٠
١٩٩٠	٣١	١٢



شكل (٦–٨)
شكل الانتشار لدالة الإنتاج

وبالحصول على لوغاريتم قيم ص ، س للأساس "هـ" من البيانات السابقة يمكن تقدير دالة الإنتاج باستخدام الحسابات الموضحة بجدول (٦–٢) ، حيث :

$\overline{ص^*}$ = ١٨,٥٣٣ ÷ ٦ = ٣,٠٩ ، $\overline{س^*}$ = ١٠,٧٣ ÷ ٦ = ١,٧٩

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\sum \text{ص}^* \text{س}^*}{\sum \text{س}^{*2}} = \frac{\text{١,٤١٢}}{\text{٢,١٩٦}} = \text{,٦٤}$$

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\sum \text{ص}^*}{\text{ن}} - \hat{\text{ب}} \frac{\sum \text{س}^*}{\text{ن}} = \text{٣,٠٩} - \text{,٦٤} \times \text{١,٧٩} = \text{١,٩٤}$$

جدول (٦-٢)

الحسابات اللازمة لتقدير دالة الإنتاج غير الخطية

السنة	ص* = لوص	س* = لوس	ص*	س*	ص* س*	س*٢	ص*٢
١٩٨٥	٢,٣٠٣	٠,٦٩	٠,٧٩-	١,٠٩٧-	٠,٨٦٤	١,٢٠٣	٠,٦٢
١٩٨٦	٢,٨٩	١,٣٩	٠,٢٠-	٠,٤٠٤-	٠,٠٨٠	٠,١٦٣	٠,٠٤
١٩٨٧	٣,١٨	١,٧٩	٠,٠٩	٠	٠	٠	٠,٠٠٨
١٩٨٨	٣,٣٣	٢,٠٨	٠,٢٤	٠,٢٨٩	٠,٠٧٠	٠,٠٨٤	٠,٠٥٩
١٩٨٩	٣,٤٠	٢,٣	٠,٣١	٠,٥١٣	٠,١٥٩	٠,٢٦٣	٠,٠٩٧
١٩٩٠	٣,٤٣	٢,٤٨	٠,٣٤	٠,٦٩٥	٠,٢٣٩	٠,٤٨٣	٠,١١٨
مجموع	١٨,٥٣٣	١٠,٧٣			١,٤١٢	٢,١٩٦	٠,٩٤٢

وحيث أن : $\hat{\text{أ}}^* = \text{١,٩٤}$ ، لأن $\hat{\text{أ}} = \text{هـ}^{\hat{\text{أ}}^*} = (\text{٢,٧١٨})^{\text{١,٩٤}} = \text{٦,٩٦}$

$$\text{ص} = \text{٦,٩٦}\ \text{س}^{\text{٠,٦٤}}\ \text{هـ}^{\text{د}} \qquad \text{.......................(٦-١٣)}$$

ومن الدالة المقدرة (٦-١٣) يتضح أن مرونة الإنتاج للعمل = ٠,٦٤ . أي أن كل زيادة في مستوى العمالة بنسبة ١٠ ٪ تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة ٦,٤ ٪ .

(٢) اختبار المقدرة التفسيرية

يمكن اختبار المقدرة التفسيرية للنموذج من خلال قياس معامل التحديد .

$$\text{ر}^2 = \frac{(\sum \text{س}^* \text{ص}^*)^2}{\sum \text{س}^{*2}\ \text{ص}^{*2}} = \frac{(\text{١,٤١٢})^2}{(\text{٢,١٩٦})(\text{,٩٤٢})} = \frac{\text{١,٩٩٤}}{\text{٢,٠٦٩}} = \text{,٩٦}$$

وهذا يعني أن ٩٦ ٪ من التغير في لوغاريتم ص يرجع للتغير في لوغاريتم س مما يشير إلى مقدرة تفسيرية عالية للنموذج .

المبحث الثاني

العلاقة شبه اللوغاريتمية

Semi-log Relationship

يُعبرْ عن العلاقة شبه اللوغاريتمية بلوغاريتم أحد المتغيرين في طرف ، والقيمة المشاهدة للمتغير الآخر في الطرف الثاني . ونفرق هنا بين حالتين :

الحالة الأولى : عندما م١ (λ_1) = صفر ، م٢ (λ_2) =١ .

عندئذ بالتعويض في محولي بوكس- كوكس (٦-٢) ، (٦-٣) نحصل على :

لو ص = أ٠ + ب (س - ١) + ء

لو ص = (أ٠ -ب) + ب س + ء

لو ص = أ + ب س + ء ← Ln Y = a + b X + u ...(٦-١٤)

حيث : أ = (أ. - ب) .

ويلاحظ أن الصيغة الأصلية للمعادلة (٦-١٤) والتي تمثل مقابل اللوغاريتم هي:

ص = هـ^(أ + ب س + ء) ← $Y = e^{(a + bX + u)}$ ....(٦-١٥)

وتسمى بالصيغة اللوغاريتمية – الخطية Log-Linear . ومن الواضح أنه من الممكن الحصول على (٦-١٤) من (٦-١٥) عن طريق أخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين . وبمفاضلة الصيغة (٦-١٤) بالنسبة لـ س نحصل على :

$$\frac{\text{ء لو ص}}{\text{ء س}} = \text{ب}$$

ومن المعروف أن تفاضل اللوغاريتم الطبيعي (ء لو ص) = التغير النسبي = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ص}}$

$$\therefore \quad \text{ب} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ص}} \div \text{ء س} = \frac{\text{التغير النسبي في ص}}{\text{التغير المطلق في س}} = \text{ثابت}$$

وتستخدم المعادلة (٦-١٤) في تقدير العلاقة بين متغيرين عندما يكون التغير المطلق في المتغير المستقل بمقدار معين مصحوب بتغير نسبي ثابت في المتغير التابع . مثال ذلك نمو الدخل أو الصادرات أو العمالة بمعدل ثابت عبر الزمن . وفي مثل هذه الحالات يمكن استخدام الزمن كمتغير مستقل وأحد هذه المتغيرات كمتغير تابع ، ثم نقوم بتقدير معادلة الاتجاه العام باستخدام الصيغة (٦-١٤) . وتمثل "ب" في هذه الحالة معدل النمو في المتغير التابع عبر الزمن .

مثال (٦-٢)
المسار الزمني للصادرات

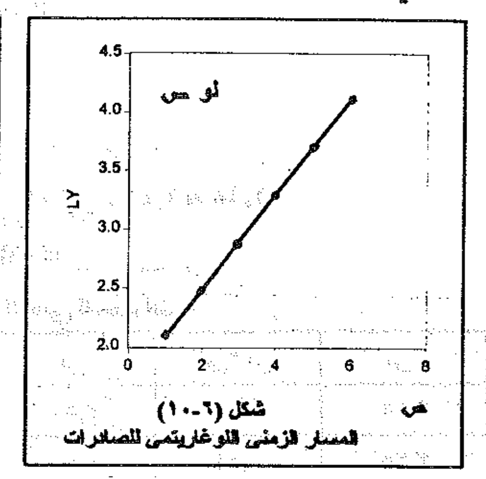
افترض أن البيانات الخاصة بالصادرات خلال فترة طولها خمس سنوات كانت كما بالجدول (٦-٣) :

جدول (٦-٣)
نمو الصادرات عبر الزمن

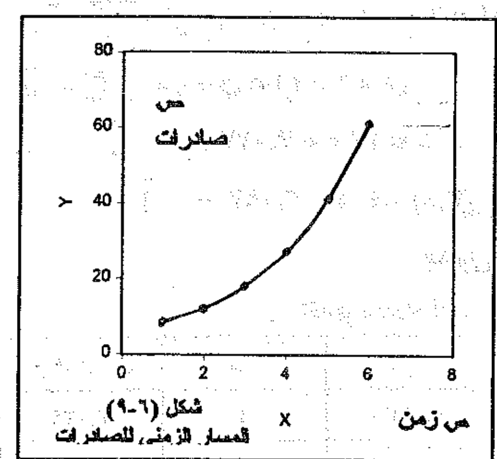
الزمن (س)	الصادرات (ص)	معدل النمو البسيط للصادرات ٪
١	٨	-
٢	١٢	٥٠
٣	١٨	٥٠
٤	٢٧	٥٠
٥	٤٠,٥	٥٠
٦	٦٠,٧٥	٥٠

والمطلوب هو تقدير معادلة الاتجاه العام للصادرات عبر الزمن .

من الملاحظ أن الصيغة (٦-١٤) تصلح لتقدير معادلة الاتجاه العام للصادرات عبر الزمن ، حيث أن معدل نمو الصادرات ثابت عبر الزمن . ومن الممكن تمثيل المسار الزمني للصادرات من خلال الشكلين (٦-٩) ، (٦-١٠).



شكل (٦-١٠)
المسار الزمني اللوغاريتمي للصادرات



شكل (٦-٩)
المسار الزمني للصادرات

كما يمكن الحصول على مرونة المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل في هذه الحالة باستخدام الصيغة التالية :

$$م_{ص س} = ب\ س_ر \qquad E_{yx} = b X_i \qquad (٦-١٦)$$

ولتقدير العلاقة (٦-١٤) نقوم بالحصول على لوغاريتم قيم ص ثم نستخدم الصيغ التالية في التقدير :

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص^* س}{\sum س^2} \qquad (٦-١٧)$$

حيث : $ص^* = لو\ ص - \frac{\sum لو\ ص}{ن}$ ، $س = س - \bar{س}$

$$\hat{أ} = \frac{\sum لو\ ص}{ن} - ب\ \bar{س} \qquad (٦-١٨)$$

وباستخدام البيانات المعطاة بالجدول (٦-٣) والصيغة (٦-١٤) يمكن تقدير معادلة الاتجاه العام للصادرات كما بالجدول (٦-٤) ، حيث :

ص̄* = Σ لو ص ÷ ن = ١٨,٥٥ ÷ ٦ = ٣,٠٩٢

س̄ = Σ س ÷ ن = ٢١ ÷ ٦ = ٣,٥

∴ بَ̂ = ٧,٠٧٢ ÷ ١٧,٥ = ٠,٤٠٤

أ̂ = ٣,٠٩٢ - ٠,٤٠٤ (٣,٥) = ٣,٠٩٢ - ١,٤١٤ = ١,٦٨

جدول (٦-٤)

تقدير معادلة المسار الزمني للصادرات

ص*=لو ص	ص	ص*	س	ص* س	س²
٢,٠٧٩	١	١,٠١٣-	٢,٥-	٢,٥٣	٦,٢٥
٢,٤٨٥	٢	٠,٦٠٧-	١,٥-	٠,٩١	٢,٢٥
٢,٨٩٠	٣	٠,٢٠٢-	٠,٥-	٠,١	٠,٢٥
٣,٢٩٦	٤	٠,٢٠٤	٠,٥	٠,١٠٢	٠,٢٥
٣,٧٠١	٥	٠,٦٠٩	١,٥	٠,٩١٤	٢,٢٥
٤,١٠٠	٦	١,٠٠٧	٢,٥	٢,٥١٦	٦,٢٥
Σ ص* = ١٨,٥٥	Σ س = ٢١			Σ ص*س = ٧,٠٧٢	Σ س² = ١٧,٥

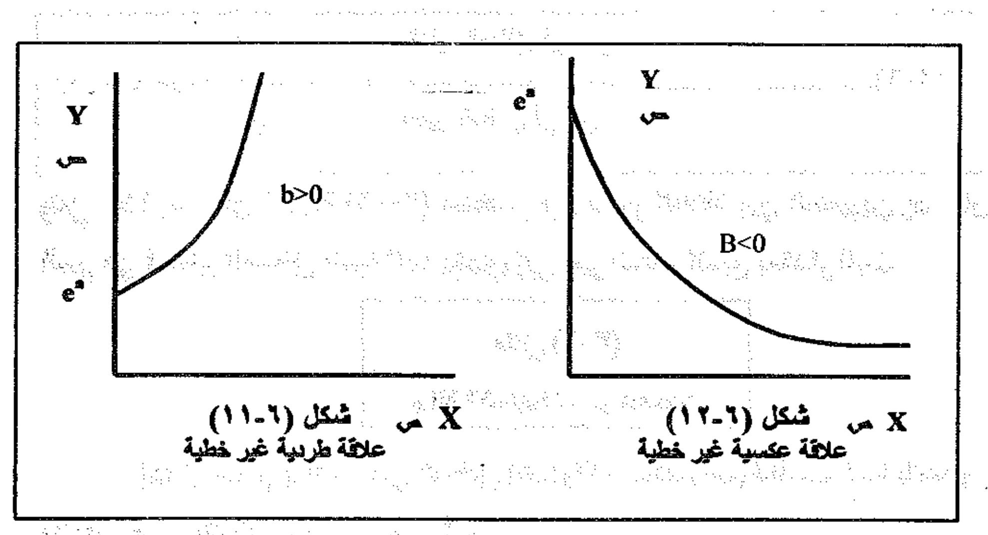
ومن ثم فإن دالة المسار الزمني للصادرات تأخذ الصيغة التالية :

لو ص = ١,٦٨ + ٠,٤٠٤ س + د ....(٦-١٩)

ويتضح من المعادلة (٦-١٩) أن الصادرات تزداد بمعدل سنوي مركب ثابت عبر الزمن = ٤٠,٤ ٪ في المتوسط . ويلاحظ أن هذا المعدل يختلف عن المعدل الموضح في الجدول (٦-٣) لأنه محسوب على أساس متوسط لكل سنوات الفترة كمعدل مركب وليس بسيطاً .

كما أن قيمة الصادرات في سنة الأساس (س=٠)=هـ^{أ} =(٢,٧١٨)^{١,٦٨}=٥,٣٦ .

ويلاحظ أن الصيغة (٦-١٥) إما أن تمثل علاقة عكسية أو علاقة طردية كما يتضح من الشكلين (٦-١١) ، (٦-١٢) .



شكل (٦-١١) علاقة طردية غير خطية

شكل (٦-١٢) علاقة عكسية غير خطية

الحالة الثانية : عندما : م$_{١}$ (λ_1) = ١ ، م$_{٢}$ (λ_2) = صفر . وبالتعويض في محولي بوكس-كوكس نحصل على : ص- ١= أ. + ب لو س+ى

ص = أ + ب لو س + ى ⟵ $Y = a + b\ Ln\ X + u$ ...(٦-٢٠)

حيث : أ =(أ.+١) . ويلاحظ أن الصيغة الأصلية للمعادلة (٦-٢٠) قبل تحويلها إلى صيغة شبه لوغاريتمية تتمثل في (٦-٢١) ، حيث: هـ (e) هي أساس اللوغاريتم الطبيعي.

هـ^{ص} = أ$_{١}$ س^{ب} هـ^{ى} $e^{Y} = a_1 X^{b} e^{u}$ ....(٦-٢١)

حيث : أ = لو أ$_{١}$. وبمفاضلة الصيغة (٦-٢٠) نحصل على :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء لو س}} = \text{ب}$$

وحيث أن تفاضل لوغاريتم متغير ما (ء لو س) = التغير النسبي في هذا المتغير = $\frac{\text{ء س}}{\text{س}}$

$$\text{ب} = \text{ء ص} \div \frac{\text{ء س}}{\text{س}} = \frac{\text{التغير المطلق في ص}}{\text{التغير المطلق في س}} \quad \text{.............................(٦-٢٢)}$$

ولعل هذا يعني أن الصيغة (٦-٢٠) تستخدم في تقدير العلاقة بين المتغيرين إذا كان التغير في المتغير المستقل بنسبة ثابتة يؤدي إلى تغير المتغير التابع بمقدار ثابت .

مثال (٦-٣)

دالة الاستهلاك غير الخطية

إذا تم جمع بيانات عن الدخل (س) والاستهلاك (ص) فكانت كما بالجدول (٦-٥) ، قدر دالة الاستهلاك من هذه البيانات .

حيث أن التغير النسبي الثابت في الدخل يؤدي إلى تغير مطلق ثابت في الاستهلاك ، فإن العلاقة (٦-٢٠) تصلح لتقدير دالة الاستهلاك التي تعبر عنها بيانات الجدول (٦-٥) . ويصف الشكلين (٦-١٣) ، (٦-١٤) هذه الدالة .

جدول (٦-٥)

بيانات دالة الاستهلاك

السنة	الاستهلاك (ص)	الدخل (س)	(ء س / س) ٪	ء ص
١	٨٥	٨٠	–	–
٢	٩٥	٩٦	٢٠	١٠
٣	١٠٥	١١٥	٢٠	١٠
٤	١١٥	١٣٨	٢٠	١٠
٥	١٢٥	١٦٦	٢٠	١٠
٦	١٣٥	١٩٩	٢٠	١٠
	$\sum$ ص=٦٦٠	$\sum$ س=٧٩٤		

وللحصول على مرونة المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل في هذه الحالة نستخدم الصيغة التالية :

م ص س = ب $\frac{1}{ص_ر}$ ⟵ $E_{yx} = b\frac{1}{Y_i}$ ....(٦-٢٣)

ولتقدير العلاقة (٦-٢٠) نقوم بالحصول على لوغاريتم قيم المتغير المستقل ثم نستخدم الصيغ التالية في التقدير :

ب̂ = $\frac{\sum ص س^*}{\sum س^{*2}}$ ....(٦-٢٤)

$$\hat{b} = \frac{\sum yx^*}{\sum x^{*2}}$$

حيث : ص = ص - ص̄ ، س* = لو س - $\frac{\sum لو س}{ن}$

أ̂ = ص̄ - ب̂ $\frac{\sum لو س}{ن}$ ....(٦-٢٥)

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\frac{\sum LnX}{n}$$

ومن المعادلة (٦-٢٢) يتضح أن :

ب = ء ص . $\frac{س}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$. س

∴ الميل الحدي للاستهلاك = $\frac{ب}{س}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$

ومن الواضح أن الميل الحدي للاستهلاك متغير وليس ثابتا . أي أن كل مستوى دخل (س) له ميل حدي للاستهلاك يختلف عن المستويات الأخرى .

وباستخدام بيانات المثال (٦-٣) المعطاة بالجدول (٦-٥) يمكن تقدير دالة الاستهلاك وفقا للصيغة (٦-٢٠) كما هو موضح بالجدول (٦-٦).

جدول (٦-٦)

حسابات دالة الاستهلاك غير الخطية

س	س* =لو س	ص	س*	ص س*	س*٢
٨٥	٤,٣٨٢	٢٥-	٠,٤٥٥-	١١,٣٧٤	٠,٢٠٧
٩٥	٤,٥٦٤	١٥-	٠,٢٧٣-	٤,٠٩	٠,٠٧٤
١٠٥	٤,٧٤٥	٥-	٠,٠٩٢-	٠,٤٦٠	٠,٠٠٨٥
١١٥	٤,٩٢٧	٥	٠,٠٩	٠,٤٥١	٠,٠٠٨١
١٢٥	٥,١١٢	١٥	٠,٢٧٥	٤,١٢٥	٠,٠٧٦
١٣٥	٥,٢٩٣	٢٥	٠,٤٥٦	١١,٤٠٨	٠,٢٠٨
Σس = ٦٦٠	Σس* = ٢٩,٠٢٣			Σص س* ١٣,٩٠٨	Σس*٢ =٠,٥٨١٦

س̄ = Σ س ÷ ن = ٦٦٠ ÷ ٦ = ١١٠

س̄* = Σ س* ÷ ن = ٢٩,٠٢٣ ÷ ٦ = ٤,٨٣٧

∴ ب̂ = Σ ص س* / Σ س*٢ = ٣١,٩٠٨ / ٠,٥٨١٦ = ٥٤,٨

أ̂ = ص̄ − ب̂ س̄* = ١١٠ − ٥٤,٨ (٤,٨٣٧) = −١٥٥,١

ومن ثم يمكن كتابة دالة الاستهلاك في الصيغة التالية :

ص = −١٥٥,١ + ٥٤,٨ لو س + د ....(٦-٢٦)

ومن العلاقة (٦-٢٦) يتضح أن :

(١) الميل الحدي للاستهلاك عند القيمة المتوسطة للدخل (١٣٢,٣) يساوي :

∆ص / ∆س = ب̂ / س̄ = ٥٤,٨ / ١٣٢,٣ = ٠,٤١

(٢) مرونة الاستهلاك للدخل عند القيمة المتوسطة للاستهلاك ص̄ (١١٠) تساوي:

ب̂ ÷ ص̄ = ٥٤,٨ ÷ ١١٠ = ٠,٥٠ تقريبا . أي أن الزيادة في الدخل بنسبة ١٠ ٪ تؤدي إلى زيادة الاستهلاك بنسبة ٥ ٪ في المتوسط .

المبحث الثالث

علاقة التحويل لمقلوب

Reciprocal Transformation Relationship

إذا كانت م١ $(\lambda_1) = 1$ ، م٢ $(\lambda_2) = -1$ ، فبالتعويض في محولي بوكس – كوكس نحصل على :

$$ص - ١ = أ. + ب [\frac{س^{-١} - ١}{-١}]$$

$$ص = (أ. + ١) - ب\ س^{-١} + ب + ع$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة في صورة أعم كما يلي :

$$ص = أ + ب \left(\frac{١}{س}\right) + ع \longleftarrow Y = a + b\left(\frac{1}{X}\right) + u \quad ......(٦-٢٧)$$

حيث : أ = (أ. + ب + ١)

وبمعاينة الصيغة (٦–٢٧) والمسماة التحويل لمقلوب يتضح ما يلي:

(١) مع إهمال الحد العشوائي ع (u) يتضح أن مَيل هذه العلاقة متغير وليس ثابتا ، ومن ثم فهي تعبر عن علاقة غير خطية ، حيث :

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{ب}{س^٢} \longleftarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{b}{X^2} \quad ...(٦-٢٨)$$

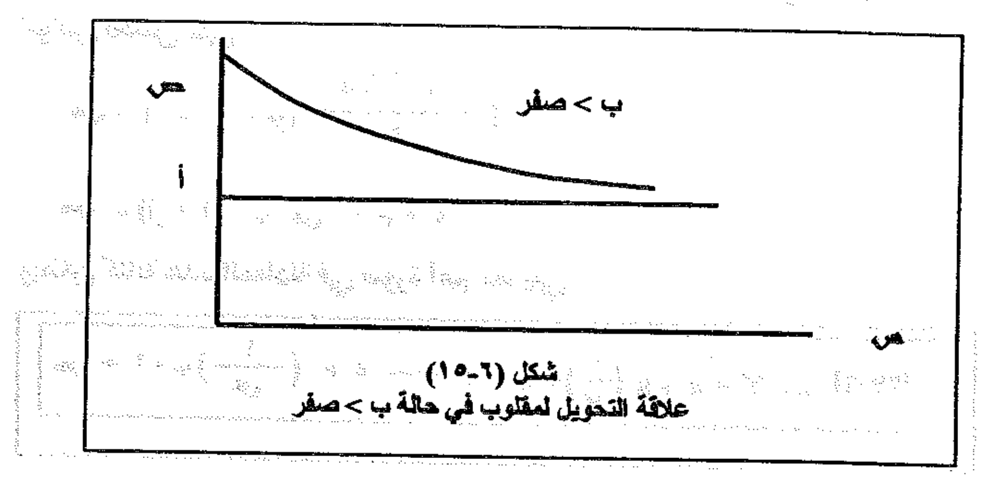
(٢) يتضح من العلاقة (٦–٢٨) أن :

$\frac{ء ص}{ء س} \cdot \frac{س}{ص} = - \frac{ب}{س^٢} \cdot \frac{س}{ص}$ ، ومن ثم فان المرونة م ص س =

$$م_{ص س} = \frac{- ب}{س ص} \longleftarrow E_{yx} = \frac{-b}{YX} \quad ....(٦-٢٩)$$

ومن الواضح أن المرونة متغيرة وليست ثابتة .

(٣) إذا كانت أ > صفر ، ب > صفر فإن العلاقة بين س ، ص تكون علاقة عكسية وفقا للصيغة (٦-٢٧) . وعندما تصل س إلى ما لانهاية ، تصل ص إلى "أ" حيث تمثل " أ" الحد الأدنى لقيمة ص . ويعبر الشكل (٦-١٥) عن العلاقة بين س ، ص في هذه الحالة .

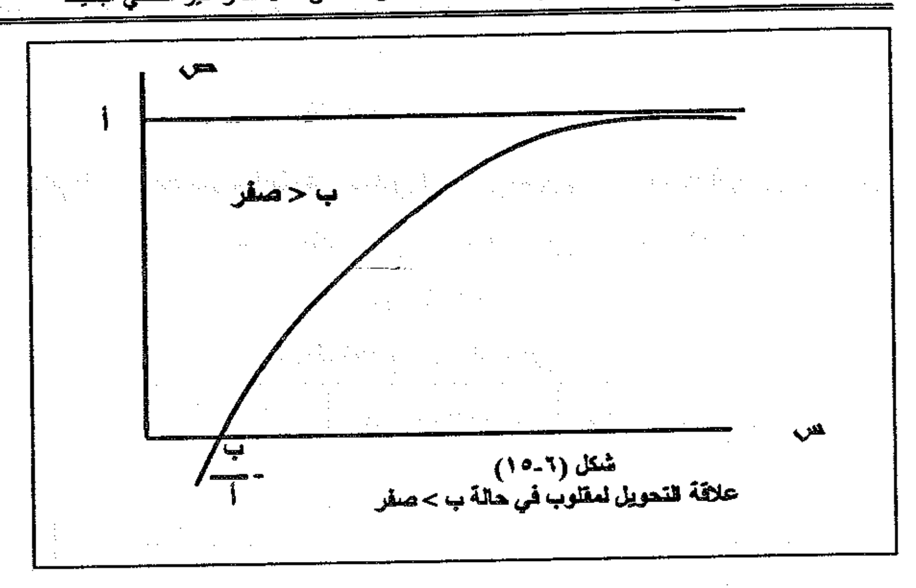


شكل (٦-١٥)
علاقة التحويل لمقلوب في حالة ب > صفر

ومن الأمثلة الاقتصادية التي تعبر صيغة التحويل لمقلوب عنها في هذه الحالة منحنى فيليبس الذي يعكس العلاقة بين معدل التضخم ومعدل البطالة ، ومتوسط التكلفة الثابتة.

(٤) إذا كانت أ > صفر ، ب < صفر فان العلاقة بين ص ،س تكون طردية . فمع زيادة س بمقدار معين تزداد ص بمعدل متناقص حتى تصل لحد أقصى = أ ، وذلك عندما تصل س إلى ما لانهاية . ومن ناحية أخرى عندما ص = صفر، فإن س= -(ب / أ) ويعبر الشكل (٦-١٦) عن العلاقة بين ص، س في هذه الحالة.

ومن الأمثلة الاقتصادية لهذه الصيغة العلاقة بين استهلاك بعض أنواع الغذاء (كالفواكه) والدخل . ففي هذه الحالة لا يأخذ المتغير التابع ص قيما موجبة قبل أن يصل المتغير المستقل س لحد أدنى معين = -(ب / أ) .



شكل (٦-١٥)
علاقة التحويل لمقلوب في حالة ب > صفر

ويمكن تقدير الصيغة (٦-٢٧) عن طريق القيام أولا بالحصول على مقلوب قيم المتغير المستقل: س* = $\frac{1}{\text{س}}$، ثم استخدام الصيغة التالية في التقدير :

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\sum \text{س}^* \text{ص}}{\sum \text{س}^{*2}} \qquad \hat{b} = \frac{\sum yx^*}{\sum x^{*2}} \qquad \text{(٦-٣٠)}$$

حيث :

$$\text{س}^* = \text{س}^* - \bar{\text{س}}^* \quad , \quad \text{س}^* = \frac{1}{\text{س}} \quad , \quad \bar{\text{س}}^* = \frac{\sum \text{س}^*}{\text{ن}}$$

$$\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\,\bar{\text{س}}^* \qquad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}^* \qquad \text{(٦-٣١)...}$$

مثال (٦-٤)

تقدير منحنى فيليبس

قام باحث بجمع بيانات عن معدل التضخم (س) ومعدل البطالة (ص) لمجتمع ما خلال فترة طولها سبع سنوات فكانت على النحو الموضح بالجدول (٦-٧) .

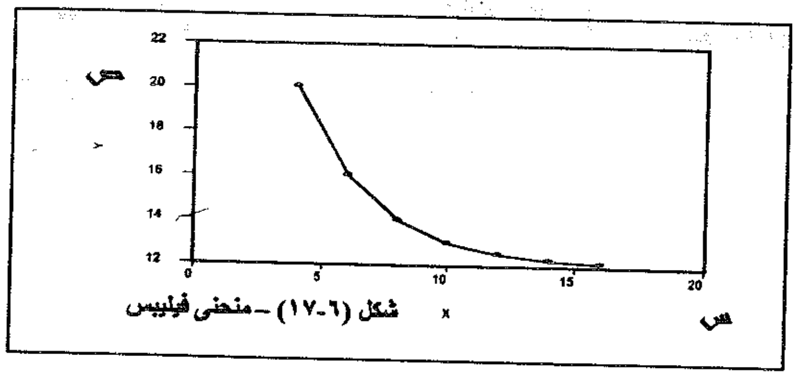
جدول (٦-٧)

معدل البطالة ومعدل التضخم ٪

السنة	معدل البطالة (ص)	معدل التضخم (س)
١٩٩٠	٢٠	٤
١٩٩١	١٦	٦
١٩٩٢	١٤	٨
١٩٩٣	١٣	١٠
١٩٩٤	١٢,٥	١٢
١٩٩٥	١٢,٢٥	١٤
١٩٩٦	١٢,١٢٥	١٦

والمطلوب هو تقدير معادلة منحنى فيليبس التي تمثل العلاقة بين معدل التضخم ومعدل البطالة باستخدام هذه البيانات .

نبدأ أولاً برسم شكل الانتشار (٦-١٧) الممثل لهذه البيانات . ومن الواضح أن الصيغة (٦-٢٧) هي الملائمة لتقدير هذه العلاقة نظراً لأن شكل الانتشار يشير إلى أن العلاقة بينهما عكسية وغير خطية . ويحتوي الجدول (٦-٨) على الحسابات اللازمة للتقدير .



شكل (٦-١٧) – منحنى فيليبس

جدول (٦-٨)

حسابات محنى فيليبس

السنة	ص	س	س*= ١/س	ص	س*	ص س*	س*٢
١	٢٠	٤	٠,٢٥	٥,٧٣٢-	٠,١٢٧	٠,٧٢٩٧	٠,٠١٦٢
٢	١٦	٦	٠,١٦٧	١,٧٣٢	٠,٠٤٤	٠,٠٧٦١٥	٠,٠٠١٩
٣	١٤	٨	٠,١٢٥	٠,٢٦٨-	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٠٦٢-	٠
٤	١٣	١٠	٠,١٠٠	١,٢٦٨-	٠,٠٢٢٧-	٠,٠٢٨٧٨	٠,٠٠٠٥
٥	١٢,٥	١٢	٠,٠٨٣	١,٧٦٨-	٠,٠٣٩٤-	٠,٠٦٩٦	٠,٠٠١٥٥
٦	١٢,٢٥	١٤	٠,٠٧١	٢,٠١٨-	٠,٠٥١٣-	٠,١٠٣٥	٠,٠٠٢٣٦
٧	١٢,١٢٥	١٦	٠,٠٦٢٥	٢,١٤٣-	٠,٠٦٠٢-	٠,١٢٩	٠,٠٠٣٦
مجموع	Σص = ٩٩,٨٧٥	Σس = ٧٠	Σس* = ٠,٨٥٩			Σص س* = ١,١٣٦١١	Σس*٢ = ٠,٠٢٦٣٨

$\bar{ص} = \sum ص \div ن = ٩٩,٨٧٥ \div ٧ = ١٤,٢٦٨$

$\bar{س} = \sum س \div ن = ٧٠ \div ٧ = ١٠$

$\bar{س}^* = \sum س^* \div ن = ٠,٨٥٩ \div ٧ = ٠,١٢٢٧$

$$\hat{ب} = \frac{\sum س^* ص}{\sum س^{*2}} = \frac{١,١٣٦١١}{٠,٠٢٦٣٨} = ٤٣$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\,\bar{س}^* = ١٤,٢٦٨ - ٤٣\,(,١٢٢٧) = ٨,٩٩$$

∴ الدالة المقدرة هي :

$$ص = ٨,٩٩ + ٤٣\left(\frac{١}{س}\right) + د \quad \text{.................................} (٦-٣٢)$$

ولعل هذا يعني أن الحد الأدنى الذي لا ينخفض معدل البطالة دونه في المتوسط مهما ارتفع معدل التضخم هو ٩ ٪ تقريبا . كما أن :

$$\frac{\partial ص}{\partial س} = \frac{-٤٣}{س^٢} = \frac{-٤٣}{\bar{س}^٢} = \frac{-٤٣}{١٠٠} = -,٤٣$$

أي أن الزيادة في معدل التضخم بنقطة واحدة يصاحبها انخفاض في معدل البطالة بمقدار ٠,٤٣ من النقطة في المتوسط. ويمكن حساب المرونة كما يلي :

$$م_{ص س} = \frac{-\hat{ب}}{\bar{س}\ \bar{ص}} = \frac{-٤٣}{(١٠)(١٤,٣)} = -٠,٣$$

ومن ثم فإن مرونة البطالة للتضخم = − ٠,٣ وهو ما يعني أن الارتفاع في معدل التضخم بنسبة ١٠٪ يصاحبه انخفاض في معدل البطالة بنسبة ٣ ٪ في المتوسط .

المبحث الرابع

علاقة لوغاريتم- مقلوب

Log - Reciprocal Relationship

إذا كانت م، (λ_1) = صفر ، م٢ (λ_2) = −١ ، فبالتعويض في محولي بوكس– كوكس نحصل على :

$$\text{لو ص} = \text{أ.} + \text{ب} \left[\frac{\text{ص}^{-1} - 1}{-1} \right] + \text{ء} \quad \text{ومنها:} \quad \text{لو ص} = \text{أ.} - \text{ب ص}^{-1} + \text{ب} + \text{ء}$$

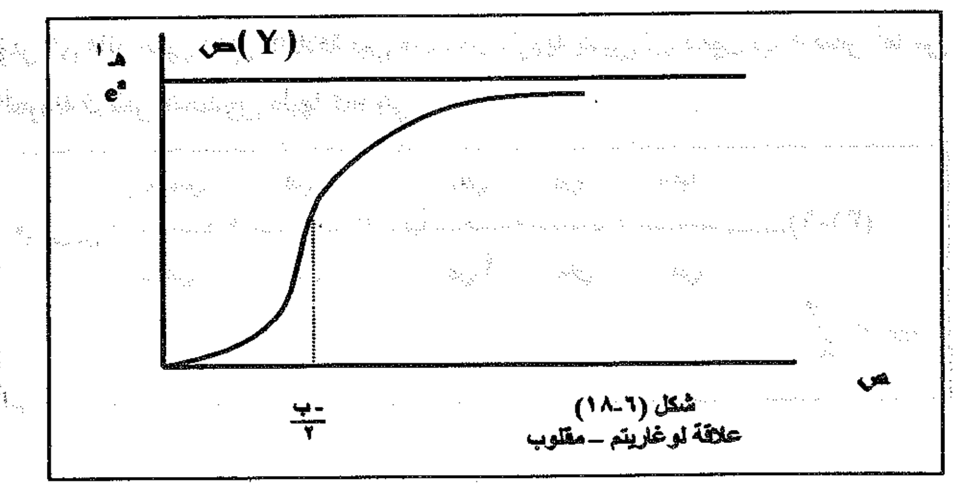
ومن ثم يمكن كتابتها في الصيغة التالية

$$\text{لو ص} = \text{أ} + \text{ب} \left(\frac{1}{\text{س}} \right) + \text{ء} \qquad LnY = a + b\left(\frac{1}{X}\right) + u \qquad ..(٦\text{–}٣٣)$$

حيث : أ = (أ. + ب) . ويلاحظ أن الصيغة الأصلية للصيغة المحولة (٦–٣٣) هي :

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\left(\text{أ} + \text{ب} \frac{1}{\text{س}} + \text{ء}\right)} \qquad Y = e^{\left(a + b\frac{1}{X} + u\right)} \qquad ..(٦\text{-}٣٤)$$

ويعبر الشكل (٦–١٨) عن هذه العلاقة وهو يشبه حرف (S) .



شكل (٦-١٨)
علاقة لوغاريتم – مقلوب

وتستخدم هذه الصيغة عادة في تقدير العلاقة بين المبيعات ص (Y) والإعلان س (X) . ومن الواضح أن تأثير الإنفاق الإعلاني على المبيعات يكون متزايداً في البداية بمعدل متزايد، ثم ينقلب بعد فترة ليتزايد بمعدل متناقص . ويتضح من الصيغة (٦-٣٤) أنه عندما تؤول س إلى ما لانهاية تصبح ص مساوية $\text{هـ}^{\text{أ}}$. أي أن $\text{هـ}^{\text{أ}}$ (e^a) يمثل الحد الأقصى للمبيعات . كما يتضح أن الحد الأدنى اللازم الوصول إليه من الإنفاق الإعلاني لاستنفاذ أثره المتزايد على المبيعات = $\frac{\text{ب}}{٢}$ وهي نقطة الانقلاب . وبمفاضلة الصيغة (٦-٣٣) نحصل على :

$$\frac{\text{د لو ص}}{\text{د س}} = -\text{ب س}^{-٢} \quad \text{وحيث أن :} \quad \frac{\text{د لو ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \cdot \frac{١}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \cdot \frac{١}{\text{ص}} = -\text{ب س}^{-٢} \quad \text{ومنها :}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{ب} \frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}} \qquad \frac{\partial Y}{\partial X} = -b\frac{Y}{X^2} \quad ....(٦-٣٥)$$

ومن ثم فانه حتى تكون العلاقة بين ص ، س طردية يتعين أن تكون ب < صفر. أما عن المرونة فيمكن الحصول عليها كما يلي :

$$\text{م}_{\text{ص س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} = -\text{ب} \frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{-\text{ب}}{\text{س}} \quad ....(٦-٣٦)$$

$$\varepsilon_{YX} = \frac{-b}{X}$$

مثال (٦-٥)

تقدير العلاقة بين المبيعات والإنفاق الإعلاني

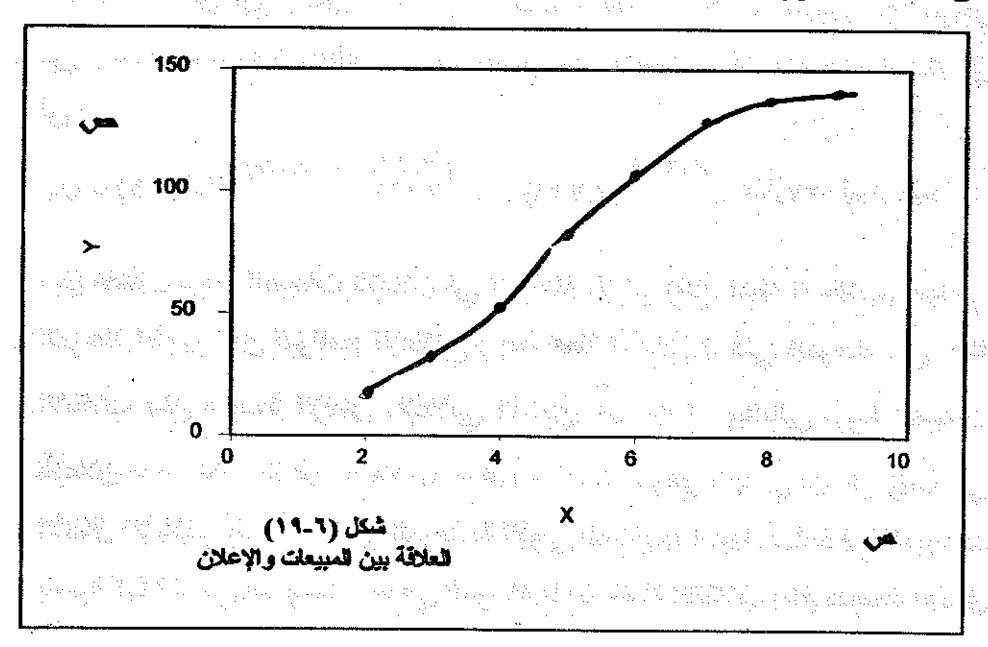
افترض أن البيانات بالجدول (٦-٧) تشير إلى مبيعات (ص) شركة ما وإنفاقها الإعلاني (س) خلال الفترة ٨٥-١٩٩٢. والمطلوب هو تقدير العلاقة بين المبيعات والإنفاق الإعلاني بهذه الشركة ، وتفسير معناها الاقتصادي .

جدول (٦-٧)

المبيعات والإنفاق الإعلاني

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢
المبيعات (ص)	١٥	٣٢	٥٢	٨٢	١٠٧	١٢٧	١٣٧	١٤٠
الإنفاق الإعلاني (س)	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

حتى نحدد الصيغة الملائمة لتقدير هذه العلاقة يتعين أن نقوم برسم شكل الانتشار من بيانات الجدول (٦-٧) ، فنحصل على الشكل (٦-١٩).



شكل (٦-١٩)
العلاقة بين المبيعات والإعلان

وبمعاينة شكل الانتشار (٦-١٩) يتضح أن الصيغة (٦-٣٢) صالحة لتقدير هذه العلاقة . ولإتمام عملية التقدير يتعين الحصول على مقلوب س = ($\frac{1}{س}$) ثم لوغاريتم ص = (لو ص) ، ثم تقدير العلاقة بينهما باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . وبعمل ذلك نحصل على النتيجة التالية :

لو ص = ٥,٦٢٨ − ٦,٠٧٨ $\frac{١}{س}$ + ع ....(٦-٣٧) (٠,٠٨)　(٠,٣١١)　　　　ر٢ = ٠,٩٨٤

وبفحص الصيغة (٦-٣٧) يتضح ما يلي :

(أ) من المتوقع أن تصل المبيعات إلى حد أقصى = هـ$^{\hat{أ}}$=(٢,٧١٨)^{٥,٦٢٨} =٢٧٨ مليون عندما يتم استنفاذ أثر الإعلان تماما على المبيعات .

(ب) يمكن تحديد قيمة المبيعات عند نقطة الانقلاب كما يلي : س = $\frac{-ب}{٢}$ = ٦,٠٧٨ ÷ ٢ = ٣,٠٣٩ . أي أن الإنفاق الإعلاني عند نقطة الانقلاب = ٣,٠٣٩ مليون . وبالتعويض عن قيمته في الصيغة المماثلة لـ (٦-٣٤) نحصل على قيمة المبيعات عند هذه النقطة.أي أن :

ص = (٢,٧١٨)$^{(٥,٦٢٨ - \frac{٦,٠٧٨}{٣,٠٣٩})}$ = (٢,٧١٨)^{٣,٦٢٨} = ٣٧,٦٢ مليون جنيه

(جـ) تختلف مرونة المبيعات للإعلان في المرحلة الأولى (قبل نقطة الانقلاب) عنها في المرحلة الأخيرة من البرنامج الإعلاني (بعد نقطة الانقلاب). ففي المرحلة قبل نقطة الانقلاب يبلغ متوسط الإنفاق الإعلاني السنوي $\bar{س}$ =٢,٥ وبالتالي مرونة المبيعات للإعلان = − $\hat{ب}$ ÷ $\bar{س}$ = ٦,٠٧٨ ÷ ٢,٥ = ٢,٤٣ ، وهو ما يعني أن كل زيادة في الإنفاق الإعلاني بنسبة ١٠٪ في المرحلة الأولى للمنتج يصاحبها زيادة في المبيعات بنسبة ٢٤,٣ ٪ في المتوسط . أما في المرحلة ما بعد نقطة الانقلاب يبلغ متوسط الإنفاق

الإعلاني السنوي $\bar{س}$ = ٦,٥ . وبالتالي فان مرونة المبيعات للإعلان = ٦,٠٧٨ ÷ ٦,٥ = ٠,٩٣٥ . وهو ما يعني أن كل زيادة في الإنفاق الإعلاني بنسبة ١٠٪ في المراحل الأخيرة للمنتج يصاحبها زيادة في المبيعات بنسبة ٩,٣٥ ٪ في المتوسط . وهو ما يشير إلى ضعف أثر الإعلان على المبيعات مع تقدم دورة الحياة للمنتج .

الفصل السابع

الانحدار المتعدد

Multiple Regression

يوضح الانحدار المتعدد العلاقة الدالية بين متغير تابع واحد وعدد من المتغيرات التفسيرية (أكثر من واحد) . وتقدم لنا النظرية الاقتصادية عديد من الأمثلة للانحدار المتعدد مثال ذلك دالة الطلب التي توضح أن الكمية المطلوبة من السلعة كمتغير تابع تتأثر بسعر السلعة وأسعار السلع الأخرى والدخل كمتغيرات تفسيرية . وكذلك دالة الإنتاج التي توضح أن حجم الناتج كمتغير تابع يتحدد بكميات عناصر الإنتاج من العمل ورأس المال والتكنولوجيا وغيرها كمتغيرات تفسيرية . وتشير العلاقة الدالية إلى علاقة سببية بين المتغيرات التفسيرية و المتغير التابع ، حيث تعني أن التغير في المتغيرات المستقلة يصحبها تغير ما في المتغير التابع .

ويحتوي هذا الفصل على ثلاثة مباحث تتمثل في :

المبحث الأول : الانحدار الخطي المتعدد .

المبحث الثاني : الانحدار غير الخطي المتعدد .

المبحث الثالث : معايير التقييم العام لنماذج الانحدار المتعدد.

المبحث الأول

الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

تشير خطية العلاقة بين المتغيرات المستقلة من ناحية ، والمتغير التابع من ناحية أخرى إلى حقيقة هامة مؤداها أن أثر المتغير المستقل على المتغير التابع لا يختلف من مفردة لأخرى بالعينة . فإذا افترضنا مثلا أن هناك متغيرين تفسيريين Explanatory variables هما س١ (X_1) ، س٢ (X_2) ، ومتغير تابع ص (Y) فان العلاقة الخطية بينهم يمكن صياغتها كما يلي :

ص ر = أ + ب١ س ١ر + ب٢ س٢ر　　$Y_i = a + b_1X_{1i} + b_2X_{2i}$ .... (٧-١)

فإذا كانت صر تشير مثلا إلى الادخار ، س١ر تشير إلى الدخل ، س٢ر تشير إلى السن، فان خطية العلاقة بين صر من ناحية وكل من س١ر ، س٢ر من ناحية أخرى تعني أن التغير في الدخل من مفردة لأخرى بمقدار وحدة واحدة يصحبه تغير ثابت في الادخار يساوي ب١ ، وأن التغير في السن من مفردة لأخرى بمقدار سنة واحدة يؤدي لتغير الادخار بمقدار ثابت يساوي ب٢ . أي أن تأثير التغير في المتغيرات التفسيرية على المتغير التابع لا يختلف من مفردة لأخرى . ولذلك فان استخدام نموذج الانحدار الخطي في تقدير العلاقات الاقتصادية ينطوي على درجة كبيرة من التبسيط ، حيث يفترض أن جميع الأفراد يتصرفون بنفس الطريقة أو أن تفضيلات الأفراد متماثلة . ونظراً لأن هذا الافتراض لا يمثل الحقيقة فان استخدام الانحدار الخطي المتعدد ينطوي على وجود نوع من الخطأ في التقدير . ولذا فإننا ندخل عادة في علاقة الانحدار حداً يسمى بالحد العشوائي ءر(u_i) وهو يتضمن أخطاء التقدير . وعندئذ تتمثل علاقة الانحدار المتعدد في الصيغة التالية :

صر = أ + ب١ س١ر + ب٢ س٢ر + عر　$Y_i = a + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + u_i$ (٧-٢)

وبالرغم من ذلك فان خطأ الحذف في حالة الانحدار المتعدد قد يكون أقل منه في حالة الانحدار البسيط ، نظراً لأن الأول ينطوي على عدد أكبر من المتغيرات التفسيرية. وتشير المعلمة التقاطعية "أ " في معادلة الانحدار الخطي المتعدد إلى أثر العوامل الأخرى المؤثرة في صر والمستبعدة من علاقة الانحدار . ويلاحظ في هذا الصدد أن هذا الأثر يقاس كمتوسط عند تقدير العلاقة ، حيث أن :

أ = صر - ب١ س١ر - ب٢ س٢ر - عر ....(٧-٣)

$a = Y_i - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i} - u_i$

وعند تقدير العلاقة من عينة نجد أن :

أ̂ = ص̄ - ب̂١ س̄١ - ب̂٢ س̄٢ ←　$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$

حيث متوسط الحد العشوائي يساوي صفر .

ولعل هذا يعني أن المعلمة التقاطعية تشير إلى قيمة المتغير التابع في المتوسط عندما نعزل أثر المتغيرات المستقلة المدرجة بنموذج الانحدار المتعدد بما فيها الحد العشوائي . أما عن معاملات الانحدار فإنها تسمى بمعاملات الانحدار الجزئية Partial Regression Coefficients وهي تقيس التغير في المتغير التابع ص نتيجة للتغير في أحد المتغيرات التفسيرية بوحدة واحدة مع ثبات المتغيرات الأخرى . ففي العلاقة المقدرة من عينة نجد أن :

صر = أ̂ + ب̂١ س١ر + ب̂٢ س٢ر + ةر ....(٧-٤)

$Y_i = \hat{a} + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} + e_i$

ومن ثم فان : $\hat{ب}_1 = \frac{\sigma_{ص ر}}{\sigma_{س1ر}}$ ، $\hat{ب}_2 = \frac{\sigma_{ص ر}}{\sigma_{س2ر}}$

أي أن $\hat{ب}_1$ تشير إلى التغير في قيمة المتغير التابع ص نتيجة لتغير س، بوحدة واحدة مع ثبات س٢ . كما أن $\hat{ب}_2$ تشير إلى التغير في قيمة المتغير ص نتيجة لتغير س٢ بوحدة واحدة مع ثبات س١ .

وسوف نتعرض في هذا المبحث إلى ثلاث نقاط أساسية تتمثل في :

(٧-١-١) تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

(٧-١-٢) تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

(٧-١-٣) تحديد العلاقة بين الانحدار المتعدد و الانحدار البسيط .

ونتناول هذه النقاط بالتفصيل فيما يلي :

(٧-١-١) تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد

من الطرق شائعة الاستخدام في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد طريقة المربعات الصغرى العادية . ومن خصائص هذه الطريقة أنها تدني مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة عن القيم المشاهدة للمتغير التابع ص . فإذا افترضنا وجود متغيرين تفسيريين س١ ، س٢ فان علاقة الانحدار المقدرة من عينة تأخذ الصيغة التالية :

$$ص_ر = \hat{أ} + \hat{ب}_1 س_{1ر} + \hat{ب}_2 س_{2ر} + هـ_ر \qquad Y_i = \hat{a} + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} + e_i$$

وتهدف طريقة المربعات الصغرى العادية إلى الحصول على مقدرات $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ بحيث تدني :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i}\right]^2 \quad ...(٧-٥)$$

والشرط اللازم لتدنية (٧-٥) هو أن تكون مشتقاتها الجزئية بالنسبة لـ $\hat{a}$ ، $\hat{b}_1$ ، $\hat{b}_2$ مساوية للصفر . أي أن :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = 0 \quad ...(٧-٦)$$

وبالإبقاء على نفس الافتراضات المتعلقة بطريقة المربعات الصغرى العادية في حالة الانحدار السيط . وإجراء عملية المفاضلة الجزئية كما سبق ، يمكن الحصول على المعادلات الطبيعية التي نشتق منها مقدرات المربعات الصغرى العادية .

وعموما فان المعادلات الطبيعية يمكن الحصول عليها بطريقة مبسطة ومباشرة من معادلة الانحدار (٧-٤) كما يلي :

(١) نقوم بتحميع المعادلة (٧-٤) بالنسبة لكل المشاهدات من ١ إلى ن فنحصل على المعادلة الطبيعية الأولى وذلك بافتراض أن $\sum$ د ر = صفر ، حيث :

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}_1 \sum X_{1i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i} \quad ...(٧-٧)$$

(٢) نقوم بضرب المعادلة (٧-٤) في المتغير التفسيري الأول س١ (X_1) ثم نجمع بالنسبة لكل المشاهدات من ١ إلى ن فنحصل على المعادلة الطبيعية الثانية

∑ س١ر صر = أ ∑ س١ر + ب١ ∑ س١ر^٢ + ب٢ ∑ س١ر س٢ر ...... (٧-٨)

$$\sum X_{1i}Y = \hat{a}\sum X_{1i} + \hat{b}_1\sum X_{1i}^2 + \hat{b}_2\sum X_{1i}X_{2i}$$

(٣) نقوم بضرب المعادلة الأصلية في المتغير التفسيري الثاني س٢ (X_2) ثم نجمع بالنسبة لكل المشاهدات من ١ إلى ن فنحصل على المعادلة الطبيعية الثالثة :

∑ س٢ر صر = أ ∑ س٢ر + ب١ ∑ س١ر س٢ر + ب٢ ∑ س٢ر^٢ ...... (٧-٩)

$$\sum X_{2i}Y = \hat{a}\sum X_{2i} + \hat{b}_1\sum X_{1i}X_{2i} + \hat{b}_2\sum X_{2i}^2$$

(٤) إذا احتوى النموذج على عدد " ن " من المتغيرات التفسيرية فمن الممكن أن نحصل على (ن+١) من المعادلات الطبيعية بضرب معادلة الانحدار الخطي المتعدد الأصلية في كل متغير تفسيري على حده ثم التجميع

(٥) نقوم بوضع المعادلات الطبيعية في نسق واحد فنجد أن

أ ن + ب١ ∑ س١ر + ب٢ ∑ س٢ر = ∑ صر

أ ∑ س١ر + ب١ ∑ س١ر^٢ + ب٢ ∑ س١ر س٢ر = ∑ صر س١ر

أ ∑ س٢ر + ب١ ∑ س١ر س٢ر + ب٢ ∑ س٢ر^٢ = ∑ صر س٢ر

ويمكن كتابتها في صورة مصفوفات كما يلي

$$\begin{bmatrix} \text{ن} & \sum \text{س}_{1ر} & \sum \text{س}_{2ر} \\ \sum \text{س}_{1ر} & \sum \text{س}_{1ر}^{2} & \sum \text{س}_{1ر}\text{س}_{2ر} \\ \sum \text{س}_{2ر} & \sum \text{س}_{1ر}\text{س}_{2ر} & \sum \text{س}_{2ر}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}}_{1} \\ \hat{\text{ب}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \text{ص}_{ر} \\ \sum \text{ص}_{ر}\text{س}_{1ر} \\ \sum \text{ص}_{ر}\text{س}_{2ر} \end{bmatrix}$$

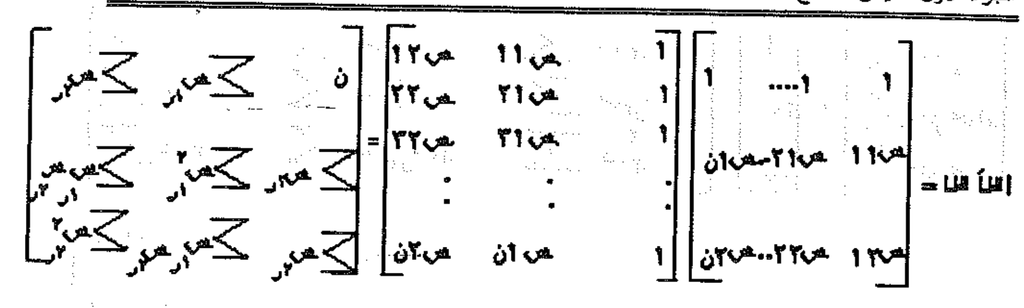
أي أن :

$$[\text{س}'\text{س}]\,\hat{\text{ب}} = \text{س}'\text{ص} \quad \text{.......................} (٧-١٠)$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \text{س}_{10} & \text{س}_{11} & \text{س}_{12} \\ \text{س}_{20} & \text{س}_{21} & \text{س}_{22} \\ \text{س}_{30} & \text{س}_{31} & \text{س}_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{س}_{0ن} & \text{س}_{1ن} & \text{س}_{2ن} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{س}_{11} & \text{س}_{12} \\ 1 & \text{س}_{21} & \text{س}_{22} \\ 1 & \text{س}_{31} & \text{س}_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{س}_{1ن} & \text{س}_{2ن} \end{bmatrix} (٧-١١)$$

ويلاحظ أن العمود الأول في (٧-١١) يشير إلى قيمة المتغير س_{0} عند كل المشاهدات من ١ إلى ن . وحيث أن س_{0} هو المتغير الذي يلازم المعلمة الناقلة فانه يفترض أن قيمته =١ . والعمود الثاني من المصفوفة " س " يشير إلى قيم المتغير س_{1} عند كل المشاهدات من ١ إلى ن ، والعمود الثالث يشير إلى قيم المتغير س_{2} عند كل المشاهدات من ١ إلى ن ، وهكذا إذا كان هناك أكثر من متغيرين تفسيريين .

أما "سَ " فهي المصفوفة المبدلة للمصفوفة "س " ويمكن الحصول عليها بوضع أعمدة "س " في صفوف ووضع صفوفها في أعمدة . ومن ثم فإن :



ب̂ = [أ̂ ، ب̂١ ، ب̂٢] ، ص = [ص١ ، ص٢ ، . ، . ، صن] ، ومن المعادلة (٧-١٠) نجد :

ب̂ = [سَ س]$^{-1}$ [سَ ص] .... (١٢-٨)

حيث : [سَ س]$^{-1}$ هو مقلــوب [سَ س]

وبالاسترسال في الحل يمكن الحصول على القيم المقدرة أ̂ ، ب̂١ ، ب̂٢ وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية بدلالة القيم المشاهدة .

(٦) ولتوفير الجهد المبذول في الحل نقوم باستخدام انحرافات القيم بدلاً من القيم المشاهدة في التقدير . فإذا بدأنا بمعادلة الانحدار التالية :

ص ر = أ̂ + ب̂١ س١ر + ب̂٢ س٢ر + د ر .... (٧-١٣)

$$Y_i = \hat{a} + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} + e_i$$

نحصل على انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية ، حيث :

ص = ص - ص̄ ، س. = س. - س̄. = ١-١ = صفر ، س١ = س١ - س̄١ ،

س٢ = س٢ - س̄٢ ، د ر = د ر - صفر = د ر .

ثم نعوض عن هذه الانحرافات في المعادلة (٧-١٣) فنحصل على :

ص ر = ب̂١ س١ر + ب̂٢ س٢ر + د ر ....(٧-١٤)

$$y_i = \hat{b}_1 x_{1i} + \hat{b}_2 x_{2i} + e_i$$

وبالحصول على المعادلات الطبيعية من المعادلة (٧-١٤) بضرب هذه المعادلة مرة في س١ (x_1) مع التجميع ، ثم مرة أخرى في س٢ (x_2) مع التجميع بالنسبة لكل المشاهدات، هذا مع الأخذ في الاعتبار أن ∑س ر د ر = صفر ، حيث أن الارتباط بين س ر ، د ر = صفر وفقا لافتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية . ويمثل النسق (٧-١٥) المعادلات الطبيعية في صورة انحرافات :

ب̂١ (∑س١٢) + ب̂٢ (∑س١ س٢) = ∑س١ ص
.......(٧-١٥)
ب̂١ (∑س١ س٢)+ ب̂٢ (∑س٢٢) = ∑س٢ ص

ومن الممكن في هذه الحالة تقدير قيم ب̂١ ، ب̂٢ بأستخدام واحد من أسلوبين ، إما أسلوب المصفوفات أو أسلوب المحددات .

أولا : تقدير المعلمات باستخدام أسلوب المصفوفات :

نقوم بوضع معادلات النموذج (٧-١٥) في صورة مصفوفات وذلك على النحو التالي :

[∑س١٢ ∑س١ س٢ ؛ ∑س١ س٢ ∑س٢٢] [ب̂١ ؛ ب̂٢] = [∑س١ ص ؛ ∑س٢ ص]

[سَ س] ب̂ = سَ ص ....(٧-١٦)

ومن الصيغة (٧-١٦) نجد أن :

$$\hat{ب} = [س' س]^{-1} س' ص \quad \text{.......................} (٧-١٧)$$

حيث $[س' س]^{-1}$ هي مقلوب [س' س] . ويمكن تقدير ب كما يلي :

$$س' س = \begin{bmatrix} \sum س_{1}^{2} & \sum س_{1} س_{2} \\ \sum س_{1} س_{2} & \sum س_{2}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ق_{11} & ق_{21} \\ ق_{12} & ق_{22} \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بالحصول على مصفوفة المرافقات Cofactor Matrix للمصفوفة [س' س]

حيث :

$$\text{مرافق العنصر } ق_{11} = (-1)^{1+1} \left| \sum س_{2ر}^{2} \right| = \sum س_{2ر}^{2}$$

$$\text{مرافق العنصر } ق_{21} = (-1)^{2+1} \left| \sum س_{1ر} س_{2ر} \right| = -\sum س_{1ر} س_{2ر}$$

$$\text{مرافق العنصر } ق_{12} = (-1)^{1+2} \left| \sum س_{1ر} س_{2ر} \right| = -\sum س_{1ر} س_{2ر}$$

$$\text{مرافق العنصر } ق_{22} = (-1)^{2+2} \left| \sum س_{1ر}^{2} \right| = \sum س_{1ر}^{2}$$

$$\therefore \text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} \sum س_{2ر}^{2} & -\sum س_{1} س_{2} \\ -\sum س_{1} س_{2} & \sum س_{1ر}^{2} \end{bmatrix}$$

وبالحصول على المصفوفة المرتبطة Adjoint Matrix وهي مبدلة المرافقات نجد أن :

$$\text{المصفوفة المرتبطة} = \begin{bmatrix} \sum س_{2ر}^{2} & -\sum س_{1ر} س_{2ر} \\ -\sum س_{1ر} س_{2ر} & \sum س_{1ر}^{2} \end{bmatrix}$$

ولم تختلف المصفوفة المرتبطة عن مصفوفة المرافقات نظرا لتماثل عناصر أحد القطرين ، وبالطبع يظهر الاختلاف في حالة المصفوفات الكبيرة التي تحتوي على أكثر من أربعة عناصر. ثم نحصل بعد ذلك على المحدد (ح) Determinant وهو يحتوي على عناصر المصفوفة الأصلية [سَ س] أي أن :

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} \sum \text{س}^{2}_{\text{١ر}} & \sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}} \\ \sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}} & \sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}} \end{vmatrix}$$

$$\text{ح} = \sum \text{س}^{2}_{\text{١ر}} \sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}} - \left(\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}} \right)^{2} \quad ....(\text{٧-١٨})$$

$$[\text{سَ س}]^{-1} = \frac{1}{\text{ح}} \begin{bmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{المرتبطة} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} & \frac{-\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} \\ \frac{-\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} & \frac{\sum \text{س}^{2}_{\text{١ر}}}{\text{ح}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ \text{ث} = \begin{bmatrix} \frac{\sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} & \frac{-\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} \\ \frac{-\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}}}{\text{ح}} & \frac{\sum \text{س}^{2}_{\text{١ر}}}{\text{ح}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{ص}_{\text{ر}} \\ \sum \text{س}_{\text{٢ر}}\text{ص}_{\text{ر}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\text{ث}}_{1} = \frac{\sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}} \sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{ص}_{\text{ر}} - \sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}} \sum \text{س}_{\text{٢ر}}\text{ص}_{\text{ر}}}{\sum \text{س}^{2}_{\text{١ر}} \sum \text{س}^{2}_{\text{٢ر}} - \left(\sum \text{س}_{\text{١ر}}\text{س}_{\text{٢ر}} \right)^{2}} \quad (\text{٧-١٩})$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_{2i}^2 \sum x_{1i} y_i - \sum x_{1i}\, x_{2i} \sum x_{2i} y_i}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$\hat{ب}_2 = \frac{\sum س_{1ر}^2 \sum س_{2ر} ص_ر - \sum س_{1ر} س_{2ر} \sum س_{1ر} ص_ر}{\sum س_{1ر}^2 \sum س_{2ر}^2 - (\sum س_{1ر} س_{2ر})^2} \quad (٧-٢٠)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i} y_i - \sum x_{1i} x_{2i} \sum x_{1i} y_i}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} \sum x_{2i})^2}$$

ويمكن الحصول على $\hat{أ}$ باستخدام كل من $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ كما يلي :

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}_1 \bar{س}_1 - \hat{ب}_2 \bar{س}_2 \quad (٧-٢١)$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

وباتباع نفس الخطوات يمكن الحصول على مقدرات أي عدد من المعلمات لأي عدد من المتغيرات التفسيرية .

ثانيا : تقدير المعلمات باستخدام أسلوب المحددات

باستخدام معادلات النموذج (٧-١٥) نحصل على :

$$\text{المحدد الأساسي } \Delta = \begin{vmatrix} \sum س_1^2 & \sum س_1 س_2 \\ \sum س_1 س_2 & \sum س_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum س_1^2 \sum س_2^2 - (\sum س_1 س_2)^2 \quad (٧-٢٢)$$

$$\Delta = \sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2$$

محدد المعلمة $\hat{\text{ب}}_1 = \Delta \hat{\text{ب}}_1 = \begin{vmatrix} \sum \text{س}_1\text{ص} & \sum \text{س}_1\text{س}_2 \\ \sum \text{س}_2\text{ص} & \sum \text{س}_2^2 \end{vmatrix}$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_1 = \sum \text{س}_1\text{ص} \sum \text{س}_2^2 - \sum \text{س}_1\text{س}_2 \sum \text{س}_2\text{ص} \quad \text{....}(\text{٧-٢٣})$$

محدد المعلمة $\hat{\text{ب}}_2 = \Delta \hat{\text{ب}}_2 = \begin{vmatrix} \sum \text{س}_1^2 & \sum \text{س}_1\text{ص} \\ \sum \text{س}_1\text{س}_2 & \sum \text{س}_2\text{ص} \end{vmatrix}$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_2 = \sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2\text{ص} - \sum \text{س}_1\text{س}_2 \sum \text{س}_1\text{ص} \quad (\text{٧-٢٤})$$

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_1}{\Delta} = \frac{\sum \text{س}_2^2 \sum \text{س}_1\text{ص} - \sum \text{س}_1\text{س}_2 \sum \text{س}_2\text{ص}}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - \left(\sum \text{س}_1\text{س}_2\right)^2} \quad (\text{٧-٢٥})$$

$$\hat{\text{ب}}_2 = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_2}{\Delta} = \frac{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2\text{ص} - \sum \text{س}_1\text{س}_2 \sum \text{س}_1\text{ص}}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - \left(\sum \text{س}_1\text{س}_2\right)^2} \quad \text{....}(\text{٧-٢٦})$$

(٧-١-٢) تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد

يمكن تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستخدام نوعين من المعايير الإحصائية هما : (١) معامل التحديد المتعدد ، (٢) اختبارات المعنوية

١- معامل التحديد المتعدد Multiple Determination Coefficient

يشير معامل التحديد المتعدد إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع بدلالة المتغيرات المستقلة المدرجة في دالة الانحدار المتعدد . فإذا

كان لدينا متغيرين تفسيريين س١ (X_1) ، س٢ (X_2) ، ومتغير تابع ص (Y) فإن معامل التحديد المتعدد ر٢ ص.س١س٢ ($R^2_{y.x1x2}$) يشير إلى النسبة من التغير الكلي في ص التي يمكن تفسيرها بدلالة المتغيرين س١ ، س٢ معاً .

ولقد أثبتنا في حالة الانحدار البسيط أن :

$$ر^٢_{ص.س١} = \frac{\hat{ب}_١ \sum ص س_١}{\sum ص^٢}$$

وبنفس الطريقة يمكن اعتبار أن :

$$ر^٢_{ص.س١س٢} = \frac{\hat{ب}_١ \sum ص س_١ + \hat{ب}_٢ \sum ص س_٢}{\sum ص^٢} \quad ....(٧-٢٧)$$

$$R^2_{y.x1x2} = \frac{\hat{b}_1 \sum yx_1 + \hat{b}_2 yx_2}{\sum y^2}$$

وإذا كان لدينا ثلاث متغيرات تفسيرية س١ ، س٢ ، س٣ يمكن كتابة معدل التحديد المتعدد كما يلي :

$$ر^٢_{ص.س١س٢س٣} = \frac{\hat{ب}_١ \sum ص س_١ + \hat{ب}_٢ \sum ص س_٢ + \hat{ب}_٣ \sum ص س_٣}{\sum ص^٢} \quad .....(٧-٢٨)$$

$$R^2_{y.x1x2x3} = \frac{\hat{b}_1 \sum yx_1 + \hat{b}_2 \sum yx_2 + \hat{b}_3 \sum yx_3}{\sum y^2}$$

ويلاحظ أنه مع كل إضافة لمتغير تفسيري جديد نضيف حداً في البسط يمثل أثر هذا المتغير على العلاقة الكلية، و هو يمثل حاصل ضرب المعامل الانحداري لهذا المتغير في مجموع حاصل ضرب انحرافات المتغير التابع مع انحرافات المتغير

التفسيري. كما يلاحظ أن قيمة معامل التحديد المتعدد تزداد كلما أضفنا متغيراً تفسيرياً جديداً ، ويندر أن تنقص ، وذلك لأن البسط يزداد في حين يظل المقام ثابتا . وهذا يعني أن مقياس معامل التحديد المتعدد يتأثر بعدد المتغيرات التفسيرية .

ولتلاشي هذا القصور يتعين أن نصحح قيمة معامل التحديد بحيث لا تتأثر بعدد المتغيرات التفسيرية . ويمكن عمل ذلك عن طريق أخذ عدد درجات الحرية في الحسبان عند حساب معامل التحديد ، حيث أن درجات الحرية (ن – ك) (n-k) تقل مع زيادة عدد المتغيرات التفسيرية وثبات حجم العينة (ذلك لأن زيادة عدد المتغيرات التفسيرية يصاحبها زيادة في عدد المعلمات المقدرة (ك)).

و تصبح صيغة معامل التحديد المعدل Adjusted R^2 $\overline{ر}^2$ كما يلي:

$$\overline{ر}^{2}_{ص.س_1س_2} = 1 - \frac{\sum د_ر^2}{\sum ص_ر^2} \cdot \frac{ن - 1}{ن - ك} \quad \text{.................................} (٧-٢٩)$$

$$\overline{R}^2_{y.X1X2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \cdot \frac{n-1}{n-k}$$

ويلاحظ أن زيادة عدد المتغيرات التفسيرية ومن ثم عدد المعلمات المقدرة (ك) يؤثر سلبياً على قيمة معامل التحديد المعدل .

ومن المعادلة (٧–٢٩) يمكن صياغة معامل التحديد المعدل على النحو التالي:

$$\overline{ر}^{2}_{ص.س_1س_2} = 1 - (1 - ر^2) \cdot \frac{ن - 1}{ن - ك} \quad \text{.................................} (٧-٣٠)$$

$$\overline{R}^2_{Y.X1X2} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

ويلاحظ أن $\bar{ر}^2$ < $ر^2$ لأي ك > ١ ، وكلما زاد عدد المتغيرات التفسيرية كلما زاد الفرق بين $\bar{ر}^2$ ، $ر^2$. ومن ناحية أخرى طالما أن (ن-١) / (ن-ك) تزداد مع زيادة عدد المتغيرات التفسيرية فان $\bar{ر}^2$ ربما تصبح قيمته سالبة عند عدد معين من المتغيرات التفسيرية ، وفي هذه الحالة نعتبر قيمته صفر اً. أما $ر^2$ فإن قيمته لابد أن تكون موجبة .

ويلاحظ أن معامل الارتباط المتعدد . Multiple Correlation Co يتمثل في الجذر التربيعي لمعامل التحديد المتعدد ، وهو يشير إلى درجة اقتران التغير في المتغير التابع مع التغير في المتغيرات الأخرى $س_1$ ، $س_2$ معا ، وهو في هذه الحالة يكون دائما موجبا ولا توجد طريقة توضح ما إذا كان سالبا .

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد . فإذا كان يساوي واحدا فان هذا يعني أن المقدرة التفسيرية للنموذج كاملة وأن جودة التوفيق عند حدها الأقصى . أما إذا كان يساو ي صفراً فإن هذا يعني أن المقدرة التفسيرية للنموذج منعدمة وأن جودة التوفيق عند الحد الأدنى .

(٢) اختبارات المعنوية للمعلمات المقدرة

يمكن استخدام اختبار الخطأ المعياري ، واختبار "ز" Z ، واختبار "ت" t لإجراء اختبارات المعنوية للمعلمات المقدرة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد بنفس الطريقة وتحت نفس الشروط التي تم افتراضها في نموذج الانحدار الخطي البسيط. ولذلك لا يوجد هناك ما يبرر التكرار وحتى يمكن إجراء هذه الاختبارات يتعين علينا معرفة الوسط الحسابي والتباين الخاصين بالمعلمات المقد $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ وعموما يمكن القول أن :

ق($\hat{أ}$) = أ = الوسط الحسابي للمعلمة المقدرة $\hat{أ}$ ← $E(\hat{a}) = a$

ق ($\hat{ب}_1$) = $ب_1$ = الوسط الحسابي للمعلمة المقدرة $\hat{ب}_1$ ← $E(\hat{b}_1) = b_1$

ق($\hat{ب}_2$) = $ب_2$ = الوسط الحسابي للمعلمة المقدرة $\hat{ب}_2$ ← $E(\hat{b}_2) = b_2$

حيث تشير ق (E) إلى القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي كما سبق الشرح . أما عن التباين فنجده كما يلي :

$$\text{ع}^2_{\text{أ}} = \text{ع}^2_{\text{ه}} \left[\frac{1}{\text{ن}} + \frac{\bar{\text{س}}_1^2 \sum \text{س}_2^2 + \bar{\text{س}}_2^2 \sum \text{س}_1^2 - 2\bar{\text{س}}_1 \bar{\text{س}}_2 \sum \text{س}_1\text{س}_2}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - (\sum \text{س}_1\text{س}_2)^2} \right] \quad (٧-٣١)$$

$$\text{ع}^2_{\text{ب}1} = \text{ع}^2_{\text{ه}} \left[\frac{\sum \text{س}_2^2}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - (\sum \text{س}_1\text{س}_2)^2} \right] \quad (٧-٣٢)........$$

$$\text{ع}^2_{\text{ب}2} = \text{ع}^2_{\text{ه}} \left[\frac{\sum \text{س}_1^2}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - (\sum \text{س}_1\text{س}_2)^2} \right] \quad (٧-٣٣)....$$

$$\text{ع}^2_{\text{ه}} = \frac{\sum \text{ه}^2}{\text{ن} - \text{ك}}$$

$$S_a^2 = S_e^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1^2 \sum x_2^2 + \bar{X}_2 \sum x_1^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right]$$

$$S_{b1}^2 = S_e^2\left[\frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right]$$

$$S_{b2}^2 = S_e^2\left[\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right]$$

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

ومن الممكن توضيح كيفية اشتقاق تباينات المعلمات الانحدارية المقدرة باستخدام أسلوب المحددات من المعادلات الطبيعية المتعلقة بهم بعد صياغتهم في صورة انحرافات . فإذا افترضنا أن هناك متغيرين تفسيريين فقط هما س_1 ، س_2 يمكن اشتقاق $\text{ع}^2_{\text{أ}}$ ، $\text{ع}^2_{\text{ب}}$ الخاصتين بمعلماتهما المقدرة باتباع الخطوات التالية :

(أ) نقوم بكتابة المعادلات الطبيعية المتعلقة بهما في صورة انحرافات كما يلي :

$$\sum س_1 ص = ب_1 (\sum س_1^2) + ب_2 (\sum س_1 س_2)$$

$$\sum س_2 ص = ب_1 (\sum س_1 س_2) + ب_2 (\sum س_2^2)$$

ويلاحظ أن الحدود بين الأقواس هي المعلومة حيث يمكن حسابها من القيم المشاهدة ($س_1$ ، $س_2$) أما المعلمات $\hat{ب}_ر$ فهي المجاهيل .

(ب) نقوم بحساب محدد الحدود المعلومة وهو المحدد "ح" .

$$ح = \begin{vmatrix} \sum س_1^2 & \sum س_1 س_2 \\ \sum س_1 س_2 & \sum س_2^2 \end{vmatrix} = \sum س_{1ر}^2 \sum س_{2ر}^2 - [\sum س_{1ر} س_{2ر}]^2$$

(جـ) نقوم بتحديد المحيدد المقترن بالمعلمة المراد تقدير تباينها من المحدد "ح" وذلك عن طريق استبعاد الصف والعمود اللذان يوجد فيهما تربيع انحراف المتغير التفسيري الذي تتعلق به المعلمة المقدرة محل الاعتبار . فإذا أردنا تحديد تباين $\hat{ب}_1$ فإن المتغير التفسيري الذي تخصه المعلمة يكون هو $س_1$ و المحيدد المقترن بالمعلمة المقدرة $\hat{ب}_1$ يكون هو :

$$ح_{\hat{ب}_1} = \begin{vmatrix} \sum س_1^2 & \sum س_1 س_2 \\ \sum س_1 س_2 & \sum س_2^2 \end{vmatrix} = \sum س_2^2$$

وإذا أردنا تحديد تباين $\hat{ب}_2$ فإن المحيدد المقترن بالمعلمة $\hat{ب}_2$ يكون :

$$ح_{\hat{ب}_2} = \begin{vmatrix} \sum س_1^2 & \sum س_1 س_2 \\ \sum س_1 س_2 & \sum س_2^2 \end{vmatrix} = \sum س_1^2$$

(د) ثم نقوم بقياس تباينات المعلمات المقدره باستخدام الصيغ التالية :

$$ع^2_{ب_1} = ع^2_{و} \frac{\sum س_2^2}{\sum س_1^2 \sum س_2^2 - (\sum س_1 س_2)^2}$$

$$ع^2_{ب_2} = ع^2_{و} \frac{\sum س_1^2}{\sum س_1^2 \sum س_2^2 - (\sum س_1 س_2)^2}$$

(هـ) أما اذا كان النموذج يحتوي على [illegible] متغيرات تفسيريه فمن الممكن اشتقاق تباينات المعلمات المقدرة [illegible] بنفس الطريقة السابقة فالمعادلات الطبيعية المتعلقة بها نضعها في صورة محددات كما يلي :

$$\sum ص س_1 = [illegible] \sum [illegible] + [illegible] \sum [illegible] + ب_3 \sum س_1 س_3$$

$$\sum ص س_2 = [illegible] \sum [illegible] + [illegible] \sum [illegible] + ب_3 \sum س_2 س_3$$

$$\sum ص س_3 = [illegible] \sum [illegible] + [illegible] \sum [illegible] + ب_3 \sum س_3^2$$

ثم نقوم بحساب محدد القيم المعلومة "ح" حيث :

$$ح = \begin{vmatrix} \sum س_1^2 & \sum س_1 س_2 & \sum س_1 س_3 \\ \sum س_1 س_2 & \sum س_2^2 & \sum س_2 س_3 \\ \sum س_1 س_3 & \sum س_2 س_3 & \sum س_3^2 \end{vmatrix}$$

وبعد ذلك نحسب محدد كل معلمة مقدرة حيث

$$ح_{11} = \begin{vmatrix} \sum س_2^2 & \sum س_2 س_3 \\ \sum س_2 س_3 & \sum س_3^2 \end{vmatrix}$$ = بحذف العمود الأول والصف الأول من "ح"

$$\text{ح}_{\hat{ب}_٢} = \begin{vmatrix} \sum س_١^٢ & \sum س_١ س_٣ \\ \sum س_١ س_٣ & \sum س_٣^٢ \end{vmatrix}$$ بحذف الصف الثاني والعمود الثاني من "ح"

$$\text{ح}_{\hat{ب}_٣} = \begin{vmatrix} \sum س_١^٢ & \sum س_١ س_٢ \\ \sum س_١ س_٢ & \sum س_٢^٢ \end{vmatrix}$$ بحذف الصف الثالث والعمود الثالث من "ح"

$$ع^٢_{\hat{ب}_١} = ع^٢_د \frac{\text{ح}_{\hat{ب}_١}}{\text{ح}} \quad , \quad ع^٢_{\hat{ب}_٢} = ع^٢_د \frac{\text{ح}_{\hat{ب}_٢}}{\text{ح}}$$

$$ع^٢_{\hat{ب}_٣} = ع^٢_د \frac{\text{ح}_{\hat{ب}_٣}}{\text{ح}}$$

(٣) معامل التحديد واختبارات المعنوية

لقد ثبت أنه إذا كانت القيمة المطلقة لإحصائية "ت" المحسوبة أقل من واحد بالنسبة لمعامل انحدار معين فإن إسقاط المتغير الذي يخصه هذا المعامل يزيد من قيمة معامل التحديد المعدل. ولو أن القيمة المطلقة لإحصائية "ت" المحسوبة كانت أكبر من واحد بالنسبة لمتغير تفسيري ما فإن إسقاط هذا المتغير يقلل من قيمة معامل التحديد المعدل . ولذا فمن الممكن أن نستخدم قيمة "ت" المحسوبة كأداة نحدد من خلالها المتغيرات التفسيرية المرشحة للحذف من النموذج .

(٧-١-٣) الانحدار المتعدد و الانحدار البسيط

لعل السؤال الجدير بالاهتمام في هذا الصدد هو هل توجد هناك علاقة بين معاملات الانحدار المتعدد ومعاملات الانحدار البسيط ؟

لكي نجيب على هذا السؤال دعنا نأخذ علاقات الانحدار التالية

$ص = ب_. + ب_{١.٢} س_١ + ب_{٢.١} س_٢$ ← $Y=b_0 + b_{1.2}X_1 + b_{2.1}X_2$

ص = أ. + ب١ س١ ← $Y = a_0 + b_1 x_1$

ص = جـ. + ب٢س٢ ← $Y = c_0+b_2X_2$

س٢ = ك. +ب١٢ س١ ← $X_2 =k_0 + b_{21}X_1$

س١ = ف . + ب٢١ س ٢ ← $X_1=F_0 +b_{12}X_2$

ب١.٢ = $(b_{1.2})$ = $\frac{\delta ص}{\delta س١}$ = معامل الانحدار الجزئي للمتغير س١ وهو يشير إلى مقدار التغير في ص نتيجة للتغير في س١ بوحدة واحدة بعد عزل أو استبعاد أثر س٢.

ب٢.١ = $(b_{2.1})$ = $\frac{\delta ص}{\delta س٢}$ = معامل الانحدار الجزئي للمتغير س٢ ، وهو يشير إلى مقدار التغير في ص نتيجة لتغير س٢ بوحدة واحدة بعد عزل أو استبعاد أثر س١ .

ب١ =(b_1) = $\frac{dص}{dس١}$ = معامل الانحدار البسيط للمتغير س١ ، وهو يشير إلى مقدار التغير في ص نتيجة لتغير س١ بوحدة واحدة وذلك باعتبار أن س١ هو المتغير الوحيد المؤثر في ص ، أو مع إهمال أثر المتغيرات الأخرى .

ب٢ (b_2) = $\frac{dص}{dس٢}$ = معامل الانحدار البسيط للمتغير س٢ ، وهو يشير إلى مقدار التغير في ص نتيجة لتغير س٢ بوحدة واحدة باعتبار أن س٢ هو المتغير الوحيد المؤثر في ص، أو مع إهمال أثر المتغيرات الأخرى .

ب١٢ (b_{21}) = $\frac{d س٢}{d س١}$ = معامل الانحدار البسيط للمتغير س١ على س٢

ب٢١(b_{12})= $\frac{d س١}{d س٢}$ = معامل الانحدار البسيط للمتغير س٢ على س١

ومن الممكن إثبات أن :

$$\text{ب}_{١.٢} = \frac{\text{ب}_١ - (\text{ب}_٢)(\text{ب}_{١٢})}{(١ - \text{ر}^٢_{١٢})} \quad \text{.......................................(٧-٣٤)}$$

$$b_{1.2} = \frac{b_1 - (b_2)(b_{21})}{1 - R_{21}^2}$$

$$\text{ب}_{٢.١} = \frac{\text{ب}_٢ - (\text{ب}_١)(\text{ب}_{٢١})}{(١ - \text{ر}^٢_{٢١})} \quad \text{.......................................(٧-٣٥)}$$

$$b_{2.1} = \frac{b_2 - (b_1)(b_{12})}{1 - R_{12}^2}$$

وبمعاينة المعادلات السابقة يتضح أنه إذا كان الارتباط بين المتغيرات التفسيرية س١ ، س٢ منعدماً فإن ب١٢ = صفر ، ر٢٢١ = صفر ، ب٢١ = صفر ، ولذا فإن ب١.٢ = ب١ ، ب٢.١ = ب٢. أي أن معاملات الانحدار الجزئية في الانحدار المتعدد = معاملات الانحدار المقابلة لها في الانحدار البسيط إذا كان الارتباط بين المتغيرات التفسيرية منعدماً . ومن الممكن الحصول على معاملات الارتباط الجزئي من إحصائية "t"ت " المحسوبة على النحو التالي :

رص١.٢ = معامل الارتباط الجزئي بين ص ، س١ ، بعد استبعاد أثر س٢ .

رص٢.١ = معامل الارتباط الجزئي بين ص ، س٢ ، بعد استبعاد أثر س١ .

$$\text{ر}^٢_{\text{ص}١.٢} = \frac{\text{ت}^٢_١}{\text{ت}^٢_١ + (\text{ن} - \text{ك})} \quad \text{.......................................(٧-٣٦)}$$

$$R_{Y1.2}^2 = \frac{t_1^2}{t_1^2 + (n-k)}$$

$$ر^{٢}_{ص١٠٢} = \frac{ت^{٢}_{٢}}{ت^{٢}_{٢} + (ن - ك)} \quad ....(٧-٣٧)$$

$$R^2_{Y21} = \frac{t_2^2}{t_2^2 + (n-k)}$$

ويلاحظ أن إشارات معاملات الارتباط البسيط والجزئي هي نفسها إشارات معاملات الانحدار البسيط والجزئي .

مثال (٧-١)

تقدير دالة المبيعات

أرادت شركة أن تختبر مدى فاعلية كل من السياسة السعرية والسياسة الإعلانية على مبيعاتها الكلية . ولعمل ذلك قام أحد الباحثين بجمع بيانات ربع سنوية عن الإيراد الكلي ومتوسط السعر والإنفاق الإعلاني للشركة في عينة حجمها ٥٢ مشاهدة . فإذا علمت أن :

ص (Y) = الإيراد الكلي بالألف جنيه ، س١ (X_1) = متوسط مرجح لأسعار منتجات الشركة بالجنيه ، س٢ (X_2) = الإنفاق الإعلاني بالألف جنيه ، ن (n) = ٥٢ .

$\sum$ ص = ٦٢٥٦,٧٩٦ ، $\sum$ س١ = ١٠٤ ، $\sum$ س٢ = ٥٠٢,٣٩٨

$\sum$ ص٢ = ١٣٥٨١,٣٥ ، $\sum$ س$^{٢}_{١}$ = ٣,٧٠٦٦ ، $\sum$ س$^{٢}_{٢}$ = ١٣٣٥,٧٠٣

$\sum$ ص س١ = – ٢,٤٢٨ ، $\sum$ ص س٢ = ٣٩٣٩,٠٧٦ ، $\sum$ س١ س٢ = ٧,٥٥

$\sum$ د^{٢} = ١٧٩٨,٣٣٣

والمطلوب :

(١) تعيين النموذج الرياضي المطلوب باستخدام الصيغة الخطية وتحديد التوقعات القبلية لمعلماته .

(٢) تقدير النموذج القياسي لدالة المبيعات وتفسير المعلمات المقدرة اقتصادياً.

(٣) اختبار معنوية كل من السياسة السعرية والسياسة الإعلانية في تأثيرهما على المبيعات .

(٤) اختبار المقدرة التفسيرية للنموذج .

(٥) تحديد معاملات الانحدار الجزئي من معاملات الانحدار البسيط .

(٦) تحديد معاملات الارتباط الجزئي .

ونتولى الإجابة على هذه المطاليب فيما يلي :

(١) تعيين النموذج الرياضي لدالة المبيعات :

إذا استخدمنا الصيغة الخطية في التعبير عن دالة المبيعات نحصل على :

ص = أ + ب٢.١ س١ + ب١.٢ س٢ ← $Y = a + b_{1.2} X_1 + b_{2.1} X_2$

وبمعاينة الصيغة الرياضية السابقة يتضح ما يلي :

(أ) تشير المعلمة التقاطعية "أ"a" إلى الإيراد الكلي المتوقع تحقيقه عندما يكون السعر (س١) والإنفاق الإعلاني (س٢) مساويين للصفر . وبمعنى آخر فهي تشير إلى المتحصلات النقدية التي يمكن تحقيقها من مصادر أخرى غير البيع والإعلان مثال ذلك الإعانات الحكومية أو العوائد المحققة من وراء الودائع في البنوك والأسهم والسندات في الشركات الأخرى .

(ب) أما المعلمة الانحدارية ب٢.١ ($b_{1.2}$) فهي تشير إلى التغير في الإيراد الكلي للشركة نتيجة لتغير متوسط السعر بوحدة واحدة مع ثبات العوامل الأخرى . ومن المتوقع أن تكون ب٢.١ موجبة في حالة الطلب غير المرن على منتجات الشركة بوجه عام . ففي حالة الطلب غير المرن إذا ارتفع السعر بنسبة معينة تنخفض الكمية المطلوبة بنسبة أقل ، الأمر الذي يترتب عليه زيادة الإيراد الكلي . ويعني هذا أن العلاقة بين السعر والإيراد الكلي تكون موجبة في حالة الطلب غير المرن . ومن المتوقع أن تكون ب ٢.١ سالبة في حالة الطلب المرن. ففي هذه الحالة إذا ارتفع السعر بنسبة معينة تنخفض الكمية المطلوبة بنسبة

أكبر ، مما يترتب عليه انخفاض الإيراد الكلي . ويعني هذا أن العلاقة بين السعر والإيراد الكلي تكون عكسية في حالة الطلب المرن .

(جـ) وبالنسبة للمعلمة الانحدارية ب ١.٢ ($b_{1.2}$) فهي تشير إلى مقدار التغير في الإيراد الكلي نتيجة لتغير الإنفاق الإعلاني بمقدار وحدة واحدة (ألف جنيه) . وإذا كانت ب١.٢ > ١ فإن هذا يعني أن زيادة الإنفاق الإعلاني بمقدار وحدة واحدة يترتب عليه زيادة الإيراد الكلي بمقدار أكبر من الوحدة . ولكن ليس من الضروري أن تكون السياسة الإعلانية مربحة في هذه الحالة . فمن المعروف أن زيادة الإنفاق الإعلاني يصاحبها زيادة في التكاليف الكلية بسبب زيادة تكاليف الإنتاج التي تصاحب زيادة الإنتاج ، علاوة على زيادة تكاليف الإعلان. ولذلك فإن زيادة الإنفاق الإعلاني سوف تؤدي إلى زيادة الأرباح فقط إذا كانت الزيادة في الإيراد الكلي الناجمة عنها أكبر من الزيادة في التكاليف الكلية .

ولو أن ب١.٢ < ١ فإن هذا يعني أن زيادة الإنفاق الإعلاني بمقدار وحدة واحدة يصاحبها زيادة في الإيراد الكلي بمقدار أقل من الوحدة . ولذا فإن السياسة الإعلانية في هذه الحالة يؤدي التوسع فيها إلى تحقق خسائر للشركة .

(٢) تقدير النموذج القياسي لدالة المبيعات :

يختلف النموذج القياسي عن النموذج الرياضي في احتواء الأول على حد للخطأ العشوائي ع (u) على النحو التالي :

ص = أ + ب٢.١ س١ + ب١.٢ س٢ + ع ⟵ $Y = a + b_{1.2} X_1 + b_{2.1} X_2 + u$

ولتقدير النموذج القياسي نبدأ بالمعادلات الطبيعية في صورة انحرافات كما يلي :

٣,٧٠٧٦٦ بَ٢.١ + ٧,٥٥ بَ١.٢ = – ٢,٤٢٨

٧,٥٥ بَ٢.١ + ١٣٣٥,٧٠٣ بَ١.٢ = ٣٩٣٩,٠٧٦

وبحل هذا النموذج باستخدام أسلوب المحددات نحصل على :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣,٧٠٦٦ & ٧,٥٥ \\ ٧,٥٥ & ١٣٣٥,٧٠٥ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (٣,٧٠٦٦)(١٣٣٥,٧٠٣) - (٧,٥٥)^{٢} = ٤٩٥٠,٩١٧ - ٥٧,٠٠٢٥ = ٤٨٩٣,٩١٥$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{٢٠١} = \begin{vmatrix} -٢,٤٢٨ & ٧,٥٥ \\ ٣٩٣٩,٠٧٦ & ١٣٣٥,٧٠٥ \end{vmatrix}$$

$$= (-٢,٤٢٨)(١٣٣٥,٧٠٣) - (٣٩٣٩,٠٧٦)(٧,٥٥)$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{٢٠١} = -٣٢٤٣,٠٩ - ٢٩٧٤٠,٠٢٤ = -٣٢٩٨٣,١١٤$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{١٠٢} = \begin{vmatrix} ٣,٧٠٦٦ & -٢,٤٢٨ \\ ٧,٥٥ & ٣٩٣٩,٠٧٦ \end{vmatrix}$$

$$= (٣,٧٠٦٦)(٣٩٣٩,٠٧٦) + (٧,٥٥)(٢,٤٢٨)$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{١٠٢} = ١٤٦٠٠,٥٧٩ + ١٨,٣٣١٤ = ١٤٦١٨,٩١$$

$$\hat{\text{ب}}_{٢٠١} = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_{٢٠١}}{\Delta} = \frac{-٣٢٩٨٣,١١٤}{٤٨٩٣,٩١٥} = ٦,٧٣٩$$

$$\hat{\text{ب}}_{١٠٢} = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_{١٠٢}}{\Delta} = \frac{١٤٦١٨,٩١}{٤٨٩٣,٩١٥} = ٢,٩٨٧$$

$$\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}_{٢٠١}\,\bar{\text{س}}_{١} - \hat{\text{ب}}_{١٠٢}\,\bar{\text{س}}_{٢} = ١٢٠,٣٢٣ + ٦,٧٣٩(٢) - ٢,٩٨٧(٩,٦٦١٥)$$

$$\hat{أ} = ١٢٠,٣٢٣ + ١٣,٤٧٨ - ٢٨,٨٦ = ١٠٤,٩٤$$

ومن ثم فإن دالة المبيعات المقدرة تصبح :

$$\hat{ص} = ١٠٤,٩٤ - ٦,٧٣٩\ س_١ + ٢,٩٨٧\ س_٢$$

وتعني هذه الصيغة المقدرة ما يلي :

(أ) أن الإيرادات المحصلة من قبل الشركة من مصادر غير البيع والإعلان تبلغ ١٠٤٩٤٠ جنيه كل ربع سنة في المتوسط .

(ب) أن كل انخفاض في متوسط السعر بمقدار جنيه واحد يترتب عليه زيادة في الإيراد الكلي بمقدار ٦٧٣٩ جنيه . وهذا يعني أن الطلب على منتجات الشركة مرناً في المتوسط .

(جـ) أن كل زيادة في الإنفاق الإعلاني بمقدار ألف جنيه يترتب عليه زيادة في الإيراد الكلي بمقدار ٢٩٨٧ جنيه . وبالطبع سوف تكون السياسة الإعلانية مربحة فقط إذا ترتب على هذه الزيادة في الإعلان زيادة في التكاليف الكلية بمقدار أقل من ٢٩٨٧ جنيه .

(٣) اختبارات المعنوية للسياستين السعرية والإعلانية :

نبدأ بحساب الخطأ المعياري للمعلمتين $\hat{ب}_{٠١}$ ، $\hat{ب}_{٠٢}$ وفقا للصيغتين (٧-٣٢) ، (٧-٣٣) :

$$ع^٢_{\hat{ب}٠١} = \frac{١٧٩٨,٣٣٣}{(٥٢-٣)} \left[\frac{١٣٣٥,٧٠٣}{(٣,٧٠٦٦)(١٣٣٥,٧٠٣)-(٧,٥٥)^٢}\right]$$

$$= ٣٦,٧ \frac{١٣٣٥,٧٠٣}{٤٨٩٣,٨٩٨} = ١٠,٠١٧$$

$$ع_{\hat{ب}٠١} = \sqrt{١٠,٠١٧} = ٣,١٦٤٩$$

$$ع^2_{\hat{ب}_{١٠٢}} = ٣٦,٧ \left(\frac{٣,٧٠٦٦}{٤٨٩٣,٨٩٨} \right) = ٠,٠٢٧٨$$

$$ع_{\hat{ب}_{١٠٢}} = \sqrt{٠,٠٢٧٨} = ٠,١٦٦٧$$

ويمكن حساب ت* لكل معلمة مقدرة كما يلي :

$$ت^*_١ = \frac{\hat{ب}_{٢٠١}}{ع_{ب٢٠١}} = \frac{-٦,٧٣٩}{٣,١٦٤٩} = -٢,١٢٩٣ \text{ ، } ت^*_٢ = \frac{\hat{ب}_{١٠٢}}{ع_{ب١٠٢}} = \frac{٢,٩٨٧}{٠,١٦٦٧} = ١٧,٩١٨$$

وبمقارنة الخطأ المعياري بنصف قيمة المعلمة المقدرة نجد أنه أقل منها في الحالتين ، مما يشير إلى أن كل من السياسة السعرية والسياسة الإعلانية لها تأثير جوهري على المبيعات على الأقل عند مستوى معنوية ٥ ٪ . كما أن " ت *, " المحسوبة في الحالتين أكبر من "ت" الجدولية عند مستوى معنوية ١ ٪ وهو ما يؤكد نفس المعنى السابق .

(٤) اختبار المقدرة التفسيرية للنموذج :

حتى نختبر المقدرة التفسيرية للنموذج نقوم بحساب معامل التحديد ، وذلك على النحو التالي :

$$\text{معامل التحديد} = ر^2_{ص \cdot س_١ ، س_٢} = ١ - \frac{\sum د^2}{\sum ص^2} = ١ - \frac{٣١٧٩٨,٣٣}{١٣٥٨١,٣٥} = ١ - ٠,١٣٢٤ = ٠,٨٦٦٧$$

$$\text{معامل التحديد المعدل} = ١ - \left(٠,١٣٢٤ \right) \left(\frac{٥٢ - ١}{٥٢ - ٣} \right) = ١ - ٠,١٣٧٨ = ٠,٨٦٢٢$$

ويتضح من ذلك أن كل من السعر والإنفاق الإعلاني يفسران ٨٦ ٪ تقريبا من التغير في المبيعات مما ينم عن مقدرة تفسيرية عالية للنموذج محل الاعتبار . أما النسبة الباقية وهي ١٤ ٪ تقريبا فهي ترجع لعوامل أخرى .

(٥) تحديد معاملات الانحدار الجزئي من معاملات الانحدار البسيط :

باستخدام بيانات الإيراد الكلي المعطاة سابقا يمكن التوصل إلى :

$$\hat{ص} = ١٠٤,٩٤٢ - ٦,٧٣٩ س_١ + ٢,٩٨٧ س_٢ \quad ......(١)$$

$$\hat{ص} = ١٢١,٦٣٣ - ٠,٦٥٥ س_١ \quad ......(٢)$$

$$\hat{ص} = ٩١,٨٣ + ٢,٩٤٩ س_٢ \quad ......(٣)$$

$$\hat{س}_٢ = ٥,٥٥٨ + ٢,٠٣٦٩ س_١ \quad ......(٤)$$

$$\hat{س}_١ = ١,٩٤٥ + ٠,٠٠٥٦٥ س_٢ \quad ......(٥)$$

$$ر^٢_{٢١} = ٠,٠١١٥$$

$$\hat{ب}_{١.٢} = \frac{-٠,٦٥٥ - (٢,٩٤٩)(٢,٠٣٦٩)}{(١ - ٠,٠١١٥)} = \frac{-٦,٦٦١٨}{٠,٩٨٨٥} = - ٦,٧٣٩$$

$$\hat{ب}_{٢.١} = \frac{٢,٩٤٩ - (-٠,٦٥٥)(٠,٠٠٥٦٥)}{٠,٩٨٨٥} = \frac{٢,٩٤٩ + ٠,٠٠٣٧}{٠,٩٨٨٥} = ٢,٩٨٧$$

ومن الملاحظ أن القيم التي تم الحصول عليها لمعاملات الانحدار الجزئي باستخدام معاملات الانحدار البسيط هي نفسها القيم التي حصلنا عليها سابقا بالأسلوب المباشر .

(٦) تحديد معاملات الارتباط الجزئي :

باستخدام الصيغتين (٧-٣٦) ، (٧-٣٧) يمكن تحديد معاملات الارتباط الجزئي كما هو موضح بالجدول (٧-١) .

جدول ٠٧-١)

الارتباط البسيط والارتباط الجزئي

المتغير	الارتباط البسيط مع ص	الارتباط الجزئي مع ص	بيان الحسابات
$س_١$	-٠,٠١	-٠,٢٩	$\frac{(٢,١٢٩٥)^٢}{(٢,١٢٩٥)^٢+(٥٢-٣)}$
$س_٢$	٠,٩٢٥	٠,٩٣٠	$\frac{(١٧,٩١٦٨)^٢}{(١٧,٩١٦٨)^٢+(٥٢-٣)}$

ويلاحظ أن إشارة معامل الارتباط هي نفسها إشارة معامل الانحدار .

المبحث الثاني

الانحدار غير الخطي المتعدد

Nonlinear Multiple Regression

يوجد هناك أمثلة عديدة للعلاقات الاقتصادية المتعددة غير الخطية . ويمكن عموما التفرقة بين نوعين أساسيين من العلاقات في هذا الصدد :

(٧-٢-١) المسترسلات (كثيرات الحدود) Polynomials .

(٧-٢-٢) الدوال ذات المرونات الثابتة Functions with Constant Elasticities

وسوف نتناول كل واحدة منها بنوع من التفصيل في هذا المبحث .

(٧-٢-١) المسترسلات (كثيرات الحدود) :

يمكن تعريف المسترسلة بأنها دالة يظهر فيها المتغير المستقل عدد من المرات مرفوعاً في كل مرة إلى درجة أعلى . ومن الأمثلة الاقتصادية على هذه الدوال ما يلي :

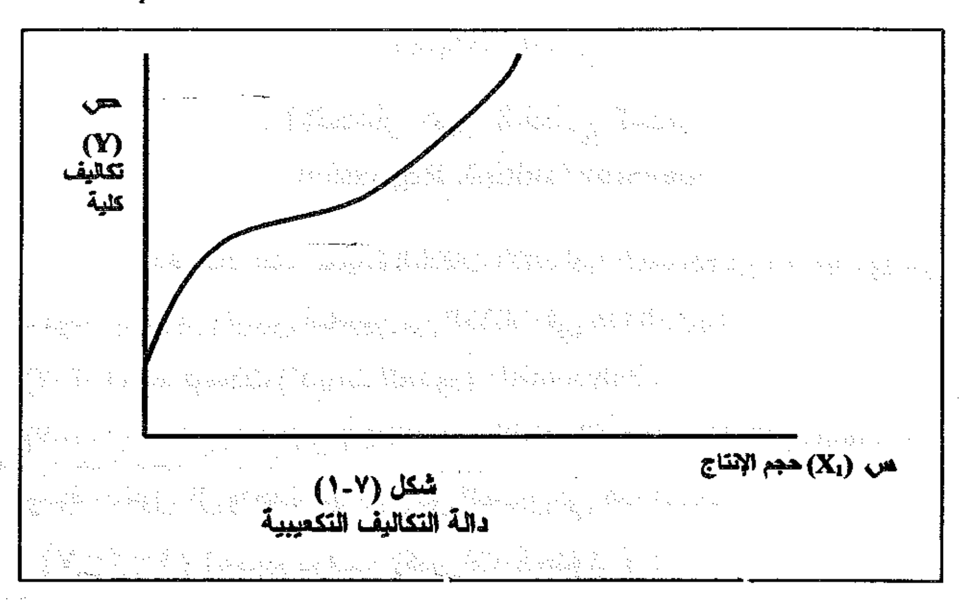
(١) دالة التكاليف الكلية التكعيبية Cubic Total Cost Function

وتأخذ هذه الدالة الصيغة التالية :

ص = أ + ب١ س١ +ب٢ س١^٢ + ب٣ س١^٣ ....(٧-٣٨)

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_1^2 + b_3X_1^3$$

حيث : ص (Y) = التكاليف الكلية ، س١ (X_1) = حجم الإنتاج ، أ(a) = التكاليف الثابتة ، ب١ (b_1) > صفر ، ب٢(b_2) < صفر ، ب٣ (b_3) > صفر . ويمثل الشكل (٧-١) هذه الدالة .



شكل (٧-١)
دالة التكاليف التكعيبية

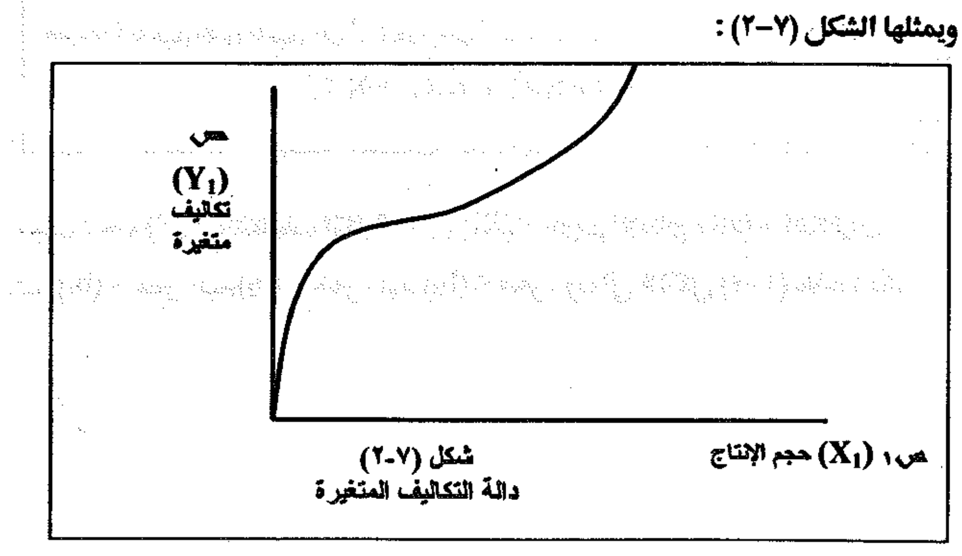
(٢) دالة التكاليف المتغيرة :

يتضح من المعادلة (٧-٣٨) أن دالة التكاليف المتغيرة تأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}_1\,\text{س}_1 + \text{ب}_2\,\text{س}_1^2 + \text{ب}_3\,\text{س}_1^3$$

$$Y = b_1X_1 + b_2X_1^2 + b_3X_1^3$$

ويمثلها الشكل (٧-٢) :



شكل (٧-٢)
دالة التكاليف المتغيرة

(٣) دالة التكلفة المتوسطة التربيعية :

من الممكن الحصول على دالة التكلفة المتوسطة التربيعية بقسمة دالة التكاليف الكلية على حجم الإنتاج س١ كما يلي :

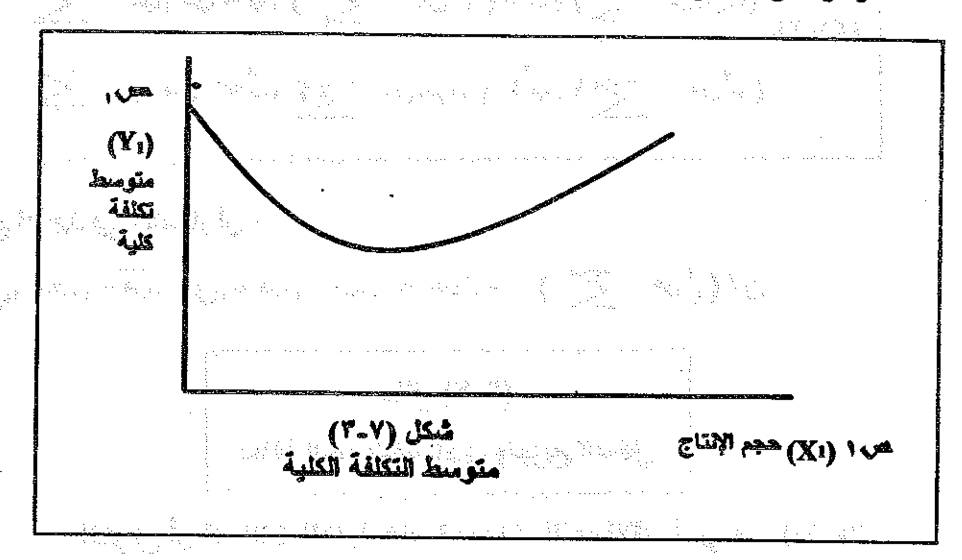
$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{أ}{س_1} + ب_1 + ب_2 س_1 + ب_3 س_1^2$$

أي :

$$ص_1 = أ_0 + أ_1 س_1^{-1} + أ_2 س_1 + أ_3 س_1^2 \quad \text{.............................}(٧-٣٩)$$

$$Y_1 = a_0 + a_1 X_1^{-1} + a_2 X_1 + a_3 X_1^2$$

حيث : $أ_0$ = ثابت = متوسط التكلفة الكلية عندما $س_1$ = صفر ، $أ_1 >$ صفر ، $أ_2 <$ صفر ، $أ_3 >$ صفر . ويمثل الشكل (٧-٣) الدالة (٧-٣٩) .



شكل (٧-٣)
متوسط التكلفة الكلية

ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير دالة الانحدار غير الخطي المتعدد بنفس الطريقة التي اتبعناها في حالة الانحدار الخطي المتعدد . فلتقدير دالة تربيعية كدالة التكلفة الحدية التي تأخذ الصيغة (٧-٤٠) والتي تعتبر حالة انحدار بسيط

طالما أن هناك متغير مستقل واحد هو س١ ، ولكنها متعددة الحدود يتعين معاملتها نفس معاملة الانحدار المتعدد في عملية التقدير .

ص = أ̂ + ب̂١ س١ + ب̂٢ س١^٢ + د ....(٧-٤٠)

$$Y = \hat{a} + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_1^2 + e$$

وللحصول على المعادلات الطبيعية في صورة انحرافات ، نقوم بوضع الصيغة (٧-٤٠) في صورة انحرافات بعد إحلال س٢ بدلا من س١^٢ حيث س٢= س١^٢ ، ثم نضربها في س١ ونجمع بالنسبة لكل المشاهدات فنحصل على المعادلة الطبيعية الأولى ، ونضربها مرة أخرى في س٢ ونقوم بالتجميع فنحصل على المعادلة الطبيعية الثانية .

وتأخذ المعادلات الطبيعية الصيغ التالية :

∑ س١ ص = ب̂١ (∑ س١^٢) + ب̂٢ (∑ س١س٢) ...(٧-٤١)

∑ س٢ ص = ب̂١ (∑ س١س٢) + ب̂٢ (∑ س٢^٢)

مع الأخذ في الاعتبار أن :

س١ =س١ − س̄١ ، س٢ = س٢ − س̄٢ = س١^٢ − (∑ س١^٢) / ن

مثال (٧-٢)

علاقة النمو الاقتصادي وتوزيع الدخل

افترض أن البيانات التالية خاصة بمعدل النمو الاقتصادي س١ (X_1) والنصيب النسبي للطبقة الفقيرة من الدخل الكلي ص (Y) لعدد من الدول التي تختلف في المرحلة الاقتصادية التي تمر بها . والمطلوب هو تقدير العلاقة بين المتغيرين السابقين باستخدام البيانات الموضحة بالجدول (٧-٢) .

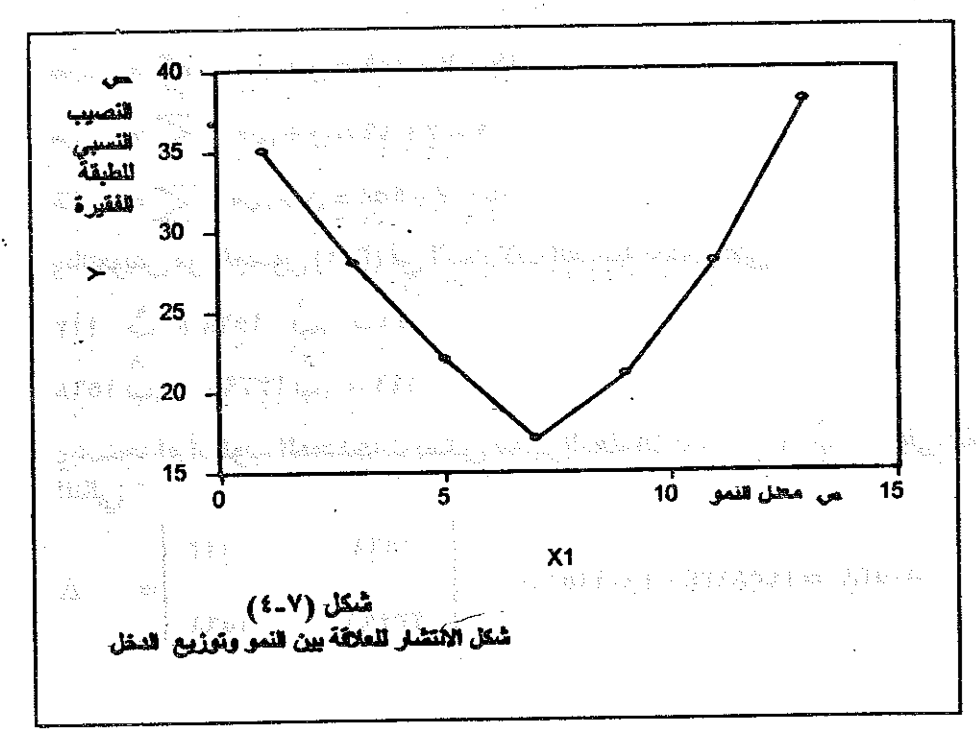
جدول (٧-٢)

معدلات النمو وتوزيع الدخل في سبعة من الدول

الدولة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
معدل النمو (س١) ٪	١	٣	٥	٧	٩	١١	١٣
نصيب نسبي ص٪	٣٥	٢٨	٢٢	١٧	٢١	٢٨	٣٨

والمطلوب هو تقدير العلاقة بين النمو وتوزيع الدخل .

للتعرف على درجة خطية العلاقة بين س١ ، ص نقوم برسم شكل الانتشار الممثل للعلاقة بينهما باستخدام البيانات المعطاة بالجدول (٧-٢) . وبمعاينة شكل الانتشار (٧-٤) يتضح أن الصيغة الملائمة لتقدير العلاقة بين ص ، س١ هي الصيغة التربيعية (٧-٤٠) . ولتقدير هذه الصيغة يتعين حساب المجاميع التي يحتوي عليها النسق (٧-٤١) . ويوضح الجدول (٧-٣) كيفية حساب هذه المجاميع .



شكل (٧-٤)
شكل الانتشار للعلاقة بين النمو وتوزيع الدخل

جدول (٧-٣)

حسابات علاقة النمو وتوزيع الدخل

ص	س١	س٢ = س١²	ص	س١	س٢	ص س١	ص س٢	س١س٢	س١²	س٢²
٣٥	١	١	٨	-٦	-٦٤	-٤٨	-٥١٢	٣٨٤	٣٦	٤٠٦٩
٢٨	٣	٩	١	-٤	-٥٦	-٤	-٥٦	٢٢٤	١٦	٣١٣٦
٢٢	٥	٢٥	-٥	-٢	-٤٠	١٠	٢٠٠	٨٠	٤	١٦٠٠
١٧	٧	٤٩	-١٠	٠	-١٦	٠	١٦٠	٠	٠	٢٥٦
٢١	٩	٨١	-٦	٢	١٦	-١٢	-٩٦	٣٢	٤	٢٥٦
٢٨	١١	١٢١	١	٤	٥٦	٤	٥٦	٢٢٤	١٦	٣١٣٦
٣٨	١٣	١٦٩	١١	٦	١٠٤	٦٦	١١٤٤	٦٢٤	٣٦	١٠٨١٦
مج ص ١٨٩	مج س١ ٤٩	مج س٢ ٤٥٥				مج ص س١ ١٦	مج ص س٢ ٨٩٦	مج س١س٢ ١٥٦٨	مج س١² ١١٢	مج س٢² ٢٣٢٩٦

$\bar{ص}$ = $\sum$ ص ÷ ن = ١٨٩ ÷ ٧ = ٢٧

$\bar{س}_1$ = $\sum$ س١ ÷ ن = ٤٩ ÷ ٧ = ٧

$\bar{س}_2$ = $\sum$ س٢ ÷ ن = ٤٥٥ ÷ ٧ = ٦٥

وبالتعويض من الجدول (٧-٣) في المعادلات الطبيعية نحصل على :

١١٢ $\hat{ب}_1$ + ١٥٦٨ $\hat{ب}_2$ = ١٦

١٥٦٨ $\hat{ب}_1$ + ٢٣٢٩٦ $\hat{ب}_2$ = ٨٩٦

وباستخدام أسلوب المحددات يمكن تقدير المعلمات $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ على النحو التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١١٢ & ١٥٦٨ \\ ١٥٦٨ & ٢٣٢٩٦ \end{vmatrix} = ٢٦٠٩١٥٢ - ٢٤٥٨٦٢٤ = ١٥٠٥٢٨$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_1 = \begin{vmatrix} ١٦ & ١٥٦٨ \\ ٨٩٦ & ٢٣٢٩٦ \end{vmatrix} = ٣٧٢٧٣٦ - ١٤٠٤٩٢٨ = -١٠٣٢١٩٢$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_2 = \begin{vmatrix} ١١٢ & ١٦ \\ ١٥٦٨ & ٨٩٦ \end{vmatrix} = ١٠٠٣٥٢ - ٢٥٠٨٨ = ٧٥٢٦٤$$

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_1}{\Delta} = \frac{-١٠٣٢١٩٢}{١٥٠٥٢٨} = -٦,٨٥٧$$

$$\hat{\text{ب}}_2 = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_2}{\Delta} = \frac{٧٥٢٦٤}{١٥٠٥٢٨} = ٠,٥$$

$$\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}_1 \bar{\text{س}}_1 - \hat{\text{ب}}_2 \bar{\text{س}}_2 =$$

$$= ٢٧ + (٦,٨٥٧)(٧) - (٠,٥)(٦٥) = ٧٤,٩٩٩ - ٣٢,٥ = ٤٢,٥^*$$

$$\hat{\text{ص}} = ٤٢,٥ - ٦,٨٥٧ \text{ س}_1 + ٠,٥ \text{ س}_1^2 \quad \text{.......................} (٧-٤٢)$$

وبمفاضلة هذه الدالة بالنسبة للمتغير س_1 نحصل على :

$$\frac{d\,\text{ص}}{d\,\text{س}_1} = -٦,٨٥٧ + ١ \text{ س}_1 \quad \text{.......................} (٧-٤٣)$$

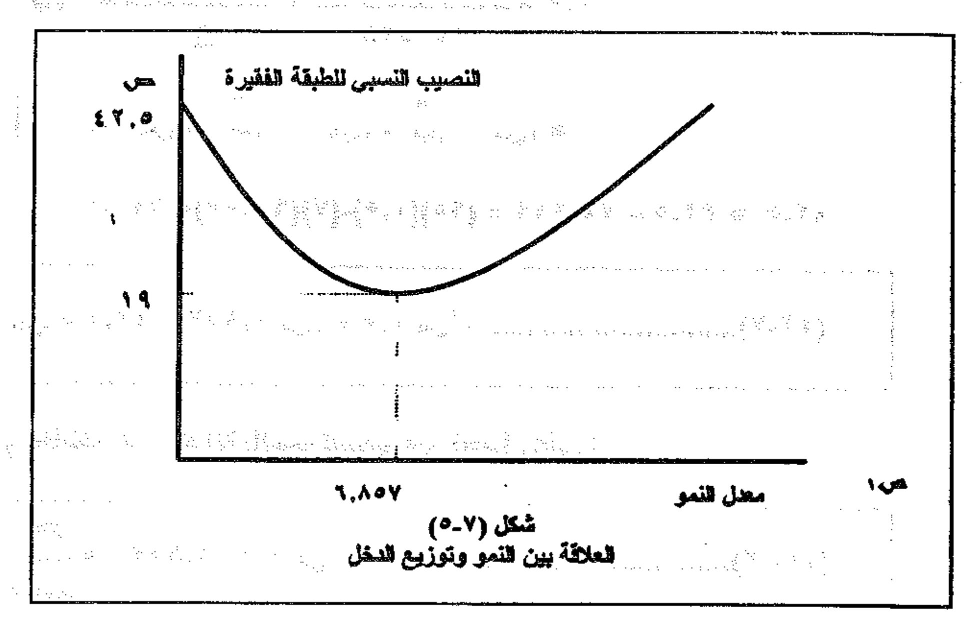
ومن الواضح من المعادلة (٧–٤٣) أن ميل الدالة (٧–٤٢) ليس ثابتاً وإنما يتغير وفقا لتغير س_1 . ووفقا للمعادلة (٧–٤٢) نجد أن النصيب النسبي للطبقة الفقيرة من الدخل قبل

بدء عملية النمو (عندما يكون معدل النمو = صفر) يساوي ٤٢,٥ ٪ في المتوسط ، ومن ثم فإن النصيب النسبي للطبقة الغنية يساوي ٥٧,٥ ٪ في المتوسط . ومن المعادلة (٧-٤٣) يمكن التعرف على الحد الأدنى الذي لابد أن يصل إليه معدل النمو قبل أن يصاحب النمو الاقتصادي تحسناً في توزيع الدخل لصالح الطبقة الفقيرة . فبمساواة هذه المعادلة بالصفر نجد أن : س١ = ٦,٨٥٧ ٪ ، وبالتعويض عن س١ في المعادلة (٧-٤٢) بهذه القيمة يمكن تحديد الحد الأدنى الذي يصل إليه النصيب النسبي للطبقة الفقيرة من الدخل الكلي في غمار عملية النمو الاقتصادي ، حيث :

ص = ٤٢,٥ ٦,٨٥٧ (٦,٨٥٧) + ٠,٥ (٦,٨٥٧)٢

ص = ٤٢,٥ - ٤٧,٠٢ + ٢٣,٥ = ١٨,٩٨ ، أي أن : ص = ١٩ ٪ تقريبا .

ويوضح الشكل (٧-٥) العلاقة بين النمو وتوزيع الدخل .



شكل (٧-٥)
العلاقة بين النمو وتوزيع الدخل

ومن الممكن التأكد من أن المعادلة (٧-٤٢) تمثل نهاية دنيا بالحصول على المشتقة الثانية من المعادلة (٧-٤٣) كما يلي :

$$\frac{ء^2 ص}{ء س_1^2} = 1 > صفر \quad ....(7-44)$$

ومن ثم فإنها تمثل نهاية دنيا طالما أن المشتقة الجزئية الثانية موجبة .

ومن الواضح مما سبق أن العلاقة بين النمو وتوزيع الدخل تمر بمرحلتين ، حيث تمتد المرحلة الأولى بين معدلي النمو صفر ، ٦,٨٥٧ ٪ ، وتمتد المرحلة الثانية بعد معدل النمو ٦,٨٥٧ ٪ . وخلال المرحلة الأولى يؤدي النمو الاقتصادي إلى سوء توزيع الدخل ، حيث يصاحبه انخفاض في النصيب النسبي للطبقة الفقيرة من الدخل الكلي من ٤٢,٥ ٪ إلى ١٩ ٪ تقريبا ، وزيادة النصيب النسبي للطبقة الغنية من ٥٧,٥ ٪ إلى ٨١ ٪. أما في المرحلة الثانية فيؤدي النمو الاقتصادي إلى تحسن توزيع الدخل في صالح الطبقة الفقيرة .

(٧-٢-٢) الدوال ذات المرونات الثابتة :

تأخذ الدالة ذات المرونات الثابتة الصيغة التالية :

$$ص = أ\, س_1^{ب_1}\, س_2^{ب_2} \quad ....(7-45)$$

$$Y = AX_1^{b_1} X_2^{b_2}$$

ومن الأمثلة الاقتصادية التي تأخذ هذه الصيغة دالة الإنتاج – كوب دوجلاس ، ودالة الطلب المارشلية . وفي حالة دالة الإنتاج كوب – دوجلاس نجد أن :

ص (Y) = كمية الإنتاج ، $س_1$ (X₁) = كمية عنصر العمل ، $س_2$ (X₂) = كمية عنصر رأس المال ، أ (A) = المعلمة الناقلة وهي تعتبر مؤشر للكفاءة الإنتاجية ، حيث أن التغير في قيمتها يعكس التغير في الإنتاج الراجع لتغير نوعيات عناصر الإنتاج مع ثبات كمياتها .

$ب_1$ = مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل .

$$\text{ب}_1 = \frac{\text{التغير النسبي في الإنتاج}}{\text{التغير النسبي في كمية العمل}} = \frac{\partial\,\text{ص}}{\text{ص}} \div \frac{\partial\,\text{س}_1}{\text{س}_1}$$

$$\text{ب}_1 = \frac{\partial\,\text{ص}}{\partial\,\text{س}_1} \div \frac{\text{ص}}{\text{س}_1} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية للعمل}}{\text{الإنتاجية المتوسطة للعمل}} \quad \text{.................} (٧\text{-}٤٦)$$

$$\text{الإنتاجية الحدية للعمل} = \frac{\partial\,\text{ص}}{\partial\,\text{س}_1} = \text{ب}_1 \cdot \frac{\text{ص}}{\text{س}_1} \quad \text{.............. ....} (٧\text{-}٤٧)$$

ب٢ = مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لرأس المال

$$\text{ب}_2 = \frac{\text{التغير النسبي في الإنتاج}}{\text{التغير النسبي في كمية رأس المال}} = \frac{\partial\,\text{ص}}{\text{ص}} \div \frac{\partial\,\text{س}_2}{\text{س}_2}$$

$$\text{ب}_2 = \frac{\partial\,\text{ص}}{\partial\,\text{س}_2} \div \frac{\text{ص}}{\text{س}_2} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية لرأس المال}}{\text{الإنتاجية المتوسطة لرأس المال}} \quad \text{..............} (٧\text{-}٤٨)$$

$$\text{الإنتاجية الحدية لرأس المال} = \frac{\partial\,\text{ص}}{\partial\,\text{س}_2} = \text{ب}_2 \cdot \frac{\text{ص}}{\text{س}_2} \quad \text{.................} (٧\text{-}٤٩)$$

ويلاحظ ما يلي بالنسبة لدالة الإنتاج كوب - دوجلاس :

(١) إذا كانت : $\text{ب}_1 + \text{ب}_2 = 1$ ، فإن هذا يشير إلى حالة ثبات غلة الحجم ، حيث أن التغير في كميات عناصر الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه . وتكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى في هذه الحالة .

(٢) إذا كانت : $ب_1 + ب_2 > 1$ ، فإن هذا يشير إلى حالة تزايد غلة الحجم ، حيث أن التغير في كميات عناصر الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنسبة أكبر وفي نفس الاتجاه .

(٣) إذا كانت : $ب_1 + ب_2 < 1$ ، فإن هذا يشير إلى حالة تناقص غلة الحجم ، حيث أن التغير في كميات عناصر الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنسبة أقل وفي نفس الاتجاه .

(٤) إذا افترضنا سيادة المنافسة الكاملة في أسواق عناصر الإنتاج فإن كل عنصر يحصل على عائد حقيقي يساوي إنتاجيته الحدية . أي أن :

الإنتاجية الحدية للعمل = الأجر الحقيقي = جـ ....(٧-٥٠)

$$\frac{\partial ص}{\partial ص_1} = جـ$$

وبالتعويض من (٧-٤٧) في (٧-٥٠) نحصل على : $ب_1 \frac{ص}{ص_1} = جـ$ ، **ومنها :**

$$ب_1 = \frac{جـ\, ص_1}{ص} = \frac{\text{الأجور الكلية}}{\text{الناتج الكلي الحقيقي}} \quad \text{.................(٧-٥١)}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$ب_2 = \frac{ر\, ص_2}{ص} = \frac{\text{عوائد رأس المال}}{\text{الناتج الكلي الحقيقي}} \quad \text{.................(٧-٥٢)}$$

حيث : ر = العائد الحقيقي للوحدة من رأس المال .

ولعل هذا يعني أن $ب_1$ ، $ب_2$ بجانب أنهما يمثلان مرونات الإنتاج الجزئية ، فإنهما يمثلان الأنصبة النسبية لعناصر الإنتاج من الناتج الكلي الحقيقي ، ولكن تحت شروط

معينة : (أ) سيادة المنافسة الكاملة في أسواق عناصر الإنتاج ، (ب) وجود حالة ثبات غلة الحجم التي تعني أن : $\sum$ ب$_{ر}$ = ١ ، ذلك لأن مجموع الأنصبة النسبية لابد أن يساوي الواحد .

أما إذا كانت الصيغة (٧-٤٥) تعبر عن دالة الطلب المارشلية فإن :

ص = الكمية المطلوبة من السلعة ، س$_{١}$ = سعر السلعة ، س$_{٢}$ = الدخل ، "أ" تعكس أثر العوامل المنتظمة الأخرى غير س$_{١}$ ، س$_{٢}$ التي تؤثر في الطلب .

ب$_{١}$= مرونة الطلب السعرية ، ب$_{٢}$ = مرونة الطلب الدخلية . ومن المتوقع أن تكون ب$_{١}$ < صفر ، ب$_{٢}$ > صفر في حالة السلعة العادية .

وإذا كانت ب$_{١}$ + ب$_{٢}$ = صفر ، فإن هذا يعني أن دالة الطلب متجانسة من الدرجة الصفرية ، وهو ما يعكس الرشد الاقتصادي الذي يشير إلى حقيقة أن المستهلك لا يخضع لظاهرة الخداع النقدي . أي أنه إذا تغيرت الأسعار والدخل النقدي بنفس النسبة فإن الطلب على السلعة لا يتغير نظراً لإدراك المستهلك أن الدخل الحقيقي لم يتغير . ويلاحظ عموماً أن المرونات ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ثابتة لا تتأثر بمستوى الدخل أو الأسعار في هذه الحالة .

ويمكن تقدير المعلمات أ ، ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ في حالة الدوال ذات المرونات الثابتة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية بعد تحويل هذه الدوال من الصيغة غير الخطية إلى الصيغة الخطية باستخدام اللوغاريتمات . فبإدخال الحد العشوائي نجد أن الدالة (٧-٤٥) يمكن أن تأخذ الصيغتين التاليتين :

ص = أ س$_{١}^{ب_{١}}$ س$_{٢}^{ب_{٢}}$ ع .... (٧-٥٣)

$$Y = AX_1^{b_1} X_2^{b_2} u$$

ص = أ س$_{١}^{ب_{١}}$ س$_{٢}^{ب_{٢}}$ هـ^{ع} .... (٧-٥٤)

$$Y = AX_1^{b_1} X_2^{b_2} e^u$$

حيث أن هـ (e) = أساس اللوغاريتم الطبيعي = ٢,٧١٨ .

ولكن يلاحظ أن الصيغة (٧-٥٣) لا يمكن استخدامها عند افتراض أن الوسط الحسابي للحد العشوائي = صفر ، حيث تصبح الدالة المقدرة مساوية للصفر في المتوسط عند التمسك بهذا الافتراض . أما الصيغة (٧-٥٤) فهي تساعد على تلاشي هذه الصعوبة مع الاحتفاظ بافتراض الوسط الحسابي للحد العشوائي = صفر . وبأخذ لوغاريتم الصيغة (٧-٥٤) للأساس "هـ" "e" نحصل على الصيغة اللوغاريتمية التالية :

لو ص = لو أ + ب١ لو س١ + ب٢ لو س٢ + ع ....(٧-٥٥)

$$LnY = LnA + b_1 LnX_1 + b_2 LnX_2 + u$$

وفي هذه الحالة تتحول الصيغة غير الخطية إلى صيغة خطية باستخدام اللوغاريتمات . وإذا رمزنا إلى قيم اللوغاريتمات بعد الحصول عليها لكل المتغيرات بنفس الرموز مرفوعة لنجمة نتوصل للصيغة التالية :

ص* = أ̂* + ب̂١ س١* + ب̂٢ س٢* + د ....(٧-٥٦)

$$Y^* = \hat{A}^* + \hat{b}_1 X_1^* + \hat{b}_2 X_2^* + e$$

ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير الدالة (٧-٥٦) بنفس الأسلوب الذي تم اتباعه في حالة الانحدار الخطي المتعدد سابقاً ، حيث :

ب̂١ = [∑ س*²٢ر ∑ س*١ر ص*ر - ∑ س*١ر س*٢ر ∑ س*٢ر ص*ر] ÷ [∑ س*²١ر ∑ س*²٢ر - [∑ س*١ر س*٢ر]²] (٧-٥٧)

ب̂٢ = [∑ س*²١ر ∑ س*٢ر ص*ر - ∑ س*١ر س*٢ر ∑ س*١ر ص*ر] ÷ [∑ س*²١ر ∑ س*²٢ر - [∑ س*١ر س*٢ر]²] (٧-٥٨)

$$\hat{أ}^* = \bar{ص}^* - \hat{ب}_1 \bar{س}^*_1 - \hat{ب}_2 \bar{س}^*_2 \quad ......(7-59)$$

مع ملاحظة أن : $\hat{أ}$ = مقابل لوغاريتم $\hat{أ}^*$ ، أي أن : $\hat{أ} = هـ^{\hat{أ}^*}$

$$ر^2_{ص^*.س^*_1س^*_2} = \frac{\hat{ب}_1 \sum ص^* س^*_1 + \hat{ب}_2 \sum ص^* س^*_2}{\sum ص^{*2}} \quad ......(7-60)$$

ويشير معامل التحديد في هذه الحالة إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير في لوغاريتم ص بدلالة التغير في لوغاريتمات قيم $س_1$ ، $س_2$.

المبحث الثالث

معايير التقييم العام لنماذج الانحدار المتعدد

لقد تعرضنا سابقاً لبعض المعايير التي تستخدم في تقييم نماذج الانحدار البسيط والمتعدد ممثلة في معامل التحديد ، واختبارات المعنوية . وتوجد هناك معايير أخرى تعتبر أكثر ملائمة لتقييم نماذج الانحدار المتعدد سوف نركز على بعضها فيما يلي :

(٧-٣-١) الانحدار المعياري .

(٧-٣-٢) معايير اختبار درجة التبسيط .

(٧-٣-٣) معايير اختبار معنوية مجموعة معاملات .

(٧-٣-٤) معايير اختبار تعيين النموذج .

ونتعرض لكل من هذه من المعايير بنوع من التفصيل في هذا المبحث .

(٧-٣-١) الانحدار المعياري Standardized Regression :

عندما تختلف وحدات قياس المتغيرات التفسيرية يصبح من الصعب مقارنة قيم المعلمات الانحدارية لهذه المتغيرات لمعرفة أيها أكثر تأثيراً . وحتى نتعرف على أي المتغيرات أكثر تأثيراً من الناحية الرقمية على المتغير التابع يتعين تحويل كل المتغيرات إلى قيم معيارية ، حيث :

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{القيمه المشاهدة} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{القيمة المعيارية } ص^*_ر = \frac{ص_ر - \bar{ص}}{ع_ص} = \frac{صَ_ر}{ع_ص} \qquad Y_i^* = \frac{y_i}{S_y}$$

القيمة المعيارية س*ر = س ر / ع س $X_i^* = \frac{x_i}{S_x}$

القيمة المعيارية د*ر = د ر / ع د $e_i^* = \frac{e_i}{S_e}$

ثم نقوم بتقدير الصيغة المعيارية للانحدار المعياري على النحو التالي :

ص* = بَ*١ س*١ + بَ*٢ س*٢ + د* ← $Y^* = \hat{\beta}_1^* X_1^* + \hat{\beta}_2^* X_2^* + e^*$ (٧-٦١)

ويلاحظ أن تفسير بَ*ر (β^*_i) والتي يطلق عليها Beta ,s هو أنها تمثل مقدار التغير في ص مقاسة بوحدات انحراف معياري نتيجة التغير في المتغير التفسيري س بمقدار وحدة انحراف معياري واحدة . وتتحدد العلاقة بين بَ ر ، بَ*ر كما يلي :

بَ*ر = بَ ر (ع س ر / ع ص) ....(٧-٦٢) $\hat{\beta}_i^* = \hat{\beta}_i \frac{S_{Xi}}{S_Y}$

و تختفي المعلمة التقاطعية من الانحدار المعياري لأن متوسط المتغير س.ر المصاحب للمعلمة التقاطعية = ١ مثل قيمته عند جميع المشاهدات، ومن ثم فإن انحرافه عن الوسط = صفر. وإذا افترضنا أن معادلة الانحدار المعياري تأخذ الصيغة التالية:

$ص^* = ٠,٥ \; س^*_١ + ٢ \; س^*_٢ + ٤ \; س^*_٣ + د^*$

فإن هذا يعني أن $س_٣$ أكثر المتغيرات التفسيرية تأثيراً على ص يليه $س_٢$ ثم $س_١$ وذلك من حيث القيمة الرقمية للتأثير.

مثال (٧-٣)

العوامل المؤثرة في سعر التجزئة

أراد باحث أن يحدد أي العوامل أكثر تأثيراً في سعر التجزئة (ص) لسلعة يتم توزيعها في مراكز عديدة ومتباعدة. واقتصر الباحث على متغيرين لاعتقاده أنهما أكثر الأسباب أهمية في اختلاف أسعار التجزئة لنفس السلعة بين مراكز التوزيع المختلفة، وهما: طول المسافة بين مركز الإنتاج ومركز التوزيع بالكيلومترات ($س_١$)، وعدد الوسطاء بين مركز الإنتاج ومركز التوزيع ($س_٢$) . فإذا كانت البيانات الخاصة بهذه المتغيرات كما هي موضحة في الجدول (٧-٤) ، فالمطلوب هو تقدير معادلتي الانحدار العادي و المعياري وتحديد أي المتغيرين أكثر تأثيراً على سعر التجزئة من الناحية الرقمية .

جدول (٧-٤)

بيانات أسعار التجزئة في مراكز التوزيع المختلفة

المشاهدة	ص	س١	س٢
١	٢٠	٣٠	٢
٢	٢١	٤٠	٣
٣	٢٢,٥	٧٠	٤
٤	٢٣	٩٠	٤
٥	٢٣,٧	١٢٠	٥
٦	٢٤,٥	١٥٠	٥
٧	٢٥	٢٠٠	٦
٨	٢٥,٥	٢٢٠	٥
٩	٢٦	٢٤٠	٦
١٠	٢٦,٧	٢٧٠	٧

وبتقدير معادلة الانحدار العادية نحصل على :

$\hat{ص} = ١٨,٧٣ + ٠,٠١٤\ س_{١} + ٠,٦٤٧\ س_{٢} + د$

$ع_{\hat{ب}}$ (٠,٦٤٦) (٠,٠٠٤) (٠,٢٤٨)

ت (٢٨,٩٧) (٣,٢٩) (٢,٦١)

$\bar{ر}^{٢} = ٠,٩٦٥$

ومنها يتضح أن كل من $س_{١}$ ، $س_{٢}$ لهما معنوية إحصائية في التأثير على ص و ذلك عند مستوى معنوية ٥٪ على الأقل . و لتحديد أي المتغيرين المستقلين له تأثير كمي أكبر على سعر التجزئة يتعين تقدير ما يسمى بالانحدار المعياري. و لتقدير الانحدار المعياري نقوم بحساب الانحراف المعياري لكل متغير من المتغيرات الثلاثة ($ع_{ص}$، $ع_{س١}$، $ع_{س٢}$)، ثم نحصل على القيم المعيارية كما هو موضح بالجدول (٧-٥) ، حيث :

$\bar{ص} = ٢٣,٧٩$ ، $\bar{س}_{١} = ١٤٣$ ، $\bar{س}_{٢} = ٤,٧$ ، $ع_{ص} = ٢,١٧٨$ ، $ع_{س١} = ٨٦,١٥٩$ ، $ع_{س٢} = ١,٤٩٤$

جدول (٧-٥)

القيم المعيارية للمتغيرات

المشاهدات	ص*	ص١*	ص٢*
١	١,٧٤٠١٢٩-	١,٣١١٥٢٩-	١,٨٠٧٢٢٩-
٢	١,٢٨٠٩٩٢-	١,١٩٥٤٦٤-	١,١٣٧٨٨٥-
٣	٠,٥٩٢٢٨٧-	٠,٨٤٧٢٧١-	٠,٤٦٨٥٤١-
٤	٠,٣٦٢٧١٨-	٠,٦١٥١٤٢-	٠,٤٦٨٥٤١-
٥	٠,٠٤١٣٢٢-	٠,٢٦٦٩٤٨-	٠,٢٠٠٨٠٣
٦	٠,٣٢٥٩٨٧-	٠,٠٨١٢٤٥	٠,٢٠٠٨٠٣
٧	٠,٥٥٥٥٥٦	٠,٦٦١٥٦٨	٠,٨٧٠١٤٧
٨	٠,٧٨٥١٢٤	٠,٨٩٣٦٩٧	٠,٢٠٠٨٠٣
٩	١,٠١٤٦٩٣	١,١٢٥٨٣٦	٠,٨٧٠١٤٧
١٠	١,٣٣٦٠٨٩	١,٤٧٤٠١٩	١,٥٣٩٤٩١

و بتقدير الانحدار المعياري نحصل على:

ص* = ٠,٥٥٩ ص١* + ٠,٤٤٤ ص٢* + د* ....(٧-٦٣).

ع*ب̂   (٠,١٥٩)   (٠,١٥٩)

ت   (٣,٥١٨)   (٢,٧٩١)

ر٢ = ٠,٩٦٩

و وفقا لهذا التقدير فإن طول المسافة (ص١) يعتبر أكثر تأثيراً على سعر التجزئة من عدد الوسطاء (ص٢) ، حيث أن المعلمة المعيارية للمتغير الأول (٠,٥٥٩) أكبر منها للمتغير الثاني (٠,٤٤٤).

(٧-٣-٢) معايير درجة التبسيط

تفضل عادة النماذج الأبسط ذات المتغيرات التفسيرية الأقل على النماذج الأكثر تعقيداً التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات التفسيرية. و توجد هناك

مجموعة من المعايير التي تعتمد على ESS (مجموع مربعات البواقي الممثلة للخطأ العشوائي و الذي نشير له بالرمز "ك")، و درجات الحرية. و يوضح الجدول (٧-٦) بعض هذه المعايير:

جدول (٧-٦)

معايير درجة التبسيط

اسم المعيار	صيغة المعيار	ملاحظات
SGMASQ	$(\frac{ESS}{n})[1-(\frac{k}{n})]^{-1}$	
AIC	$(\frac{ESS}{n})e^{(2k/n)}$	Akaike Information Criterion
FPE	$(\frac{ESS}{n})\frac{n+k}{n-k}$	Finite Prediction Error
GCV	$(\frac{ESS}{n})[1-(\frac{k}{n})]^{-2}$	Generalized Cross Validation
HQ	$(\frac{ESS}{n})(Ln\ n)^{2k/n}$	Hannan & Quinm
RICE	$(\frac{ESS}{n})[1-(\frac{2k}{n})]^{-1}$	
SCHWARZ	$(\frac{ESS}{n})n^{(k/n)}$	
SHIBATA	$(\frac{ESS}{n})\frac{n+2k}{n}$	

و تتفق هذه المعايير جميعها في كونها تعطي النموذج تقديراً أكبر كلما قل ESS ، و تضع عنصر عقاب يقلل من قيمة المعيار كلما زاد عدد المتغيرات التفسيرية. و من الثابت أن:

١- زيادة عدد المتغيرات التفسيرية عن حد معين تقلل من دقة المعاملات المقدرة.

٢- نقص درجات الحرية التي تصاحبها يقلل من قوة الاختبارات التي تجرى على هذه المعاملات ، و يزيد من احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني المتمثل في احتمال قبول فرض هو في حقيقة الأمر خطأ.

و عند استخدام هذه المعايير يفضل اختيار النموذج الذي يعطي أقل قيمة.

(٧-٣-٣) معايير اختبار معنوية مجموعة معاملات معا :

إذا افترضنا أن هناك علاقتي انحدار على النحو التالي:

ص= ب + ب١ س١ + ب٢ س٢ +ب٣ س٣ + ب٤ س٤ +ح ←(غ) ....(٧-٦٤)

ص= أ + أ١ س١ + و ←(ق) ....(٧-٦٥)

$$Y = b+b_1X_1 + b_2 X_2 +b_3 X_3 + b_4 X_4 +u \rightarrow (U)$$
$$Y = a + a_1 X_1 + w \rightarrow (R)$$

فإنه يطلق على الصيغة الأولى (غ ، U) الصيغة غير المقيدة Unrestricted Model ، ويطلق على الصيغة الثانية (ق ، R) الصيغة المقيدة Restricted Model . و يرجع هذا إلى كون الصيغة الثانية تقوم على أساس قيد معين هو أن : ب٢ = ب٣ = ب٤ = صفر . و الآن نريد اختبار ما إذا كانت مجموعة المتغيرات س٢ ، س٣ ، س٤ تمارس في مجموعها كوحدة واحدة تأثيراً جوهرياً على ص أم لا . و لاختبار معنوية تأثير مجموعة من المتغيرات التفسيرية كحزمة واحدة على المتغير التابع نستخدم عدداً من المعايير أهمها:

١ - اختبار والد العام General Wald Test :

من الملاحظ أنه تم الحصول على النموذج (ق) عن طريق حذف عدد من المتغيرات المستقلة من النموذج (غ) . و دعنا نفترض أن :

عدد معلمات النموذج غير المقيد (غ ، U) = ك (k)

عدد معلمات النموذج المقيد (ق ، R) = م (m)

اذن ، عدد المتغيرات المحذوفة من النموذج المقيد = ك – م ← (k-m)

و يحاول معيار والد العام اختبار :

فرض العدم : ب٢ = ب٣ = ب٤ = صفر ← $b_2 = b_3 = b_4 = 0$

في مواجهة :

الفرض البديل : أن معلمة واحدة منها على الأقل غير صفرية ب ر ≠ صفر

و لو أن المتغيرات المحذوفة من الصيغة المقيدة ليس لها تأثير جوهري على ص . فإن : كق (ESS_R) لن يختلف جوهريا عن كغ (ESS_U) ، حيث كر (ESS_i) تشير إلى مجموع مربعات البواقي كمؤشر للحد العشوائي . أي أن الفرق بينهما (كق – كغ) يكون غير جوهري . و لاختبار ذلك نستخدم إحصائية "F" ، حيث أن :

درجات حرية الصيغة غير المقيدة = حغ = ن – ك ⟵ $DF_U = n\text{-}k$

درجات حرية الصيغة المقيدة = حق = ن – م ⟵ $DF_R = n\text{-}m$

و لإجراء الاختبار نقوم بحساب "فس" F_c و هي تسمى "ف المحسوبة" ، حيث :

و نبحث في الجداول عن فج (F_t) و التي تسمى "ف الجدولية" عند درجات حرية "م" m للبسط ، (ن – ك) n-k للمقام ، و مستوى معنوية (α) . أي : $F_t \longrightarrow F^{m}_{(n-k),\alpha}$ و لو أن :

(أ) فس > فج ⟵ $F_c > F_t$ نرفض فرض العدم و نقبل الفرض البديل و يكون لمجموعة المتغيرات المحذوفة تأثير جوهري كحزمة متكاملة على ص .

(ب) فس > فج ⟵ $F_c < F_t$ نقبل فرض العدم و نرفض الفرض البديل و لا يكون لمجموعة المتغيرات المحذوفة تأثير جوهري كحزمة متكاملة على ص .

٢- اختبار والْد الخاص Special Wald Test :

يعتبر هذا الاختبار حالة خاصة من الاختبار العام السابق. و لتوضيح ذلك افترض أن هناك صيغتين للانحدار على النحو التالي :

ص = ب+ ب١ س١ + ب٢ س٢ + ب٣ س٣ + ع ⟵ (غ) .... (٧-٦٦)
ص = ب + و .... (عق) (٧-٦٧)
$Y = b + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + u \longrightarrow (U)$
$Y = b + W \longrightarrow (SR)$

حيث أن الصيغة (غ ، U) هي الصيغة غير المقيدة ، والصيغة (ع ق .SR) عالية التقييد Super Restricted وذلك لأن جميع المتغيرات التفسيرية قد تم حذفها . و الآن نريد اختبار فرض العدم الذي يعني أن جميع المتغيرات التفسيرية التي ظهرت في الصيغة (٧-٦٦) لا تؤثر جوهريا كحزمة على المتغير التابع ص . أي أن ب١ = ب٢ = ب٣ = صفر . و بالطبع في حالة ثبوت ذلك فإن هذا يعني أن هناك حاجة لإعادة صياغة النموذج من جديد .

و لإجراء هذا الاختبار نقوم بحساب ف س (F_c) من بيانات عينة ، حيث :

$$\text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ر}^{٢} \div (\text{ك} - ١)}{(١ - \text{ر}^{٢}) \div (\text{ن} - \text{ك})} \quad \text{.......................} \quad (٦٨-٧)$$

$$F_c = \frac{(TSS_U - ESS_U) / (k-1)}{ESS_U / (n-k)} = \frac{R^2 / (k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

مع العلم بأن ر^{٢} هو معامل التحديد للصيغة غير المقيدة . ثم نقوم بالبحث عن ف $_{ج}$ عند درجات حرية (ك – ١) للبسط ، (ن – ك) للمقام ، و مستوى معنوية ١٪ أو ٥٪ . ولو أن :

(أ) ف $_{س}$ > ف $_{ج}$ ⟵ $F_c > F^{k-1}_{(n-k), \alpha}$ نرفض فرض العدم ، و هو ما يعني أن هناك متغيراً تفسيرياً واحداً على الأقل له تأثير جوهري على ص .

(ب) ف $_{س}$ < ف $_{ج}$ ⟵ $F_c < F^{k-1}_{(n-k), \alpha}$ نقبل فرض العدم ، و هو ما يعني أن جميع المتغيرات التفسيرية لا تؤثر على المتغير ص .

(٣) اختبار والد في حالة عدم وجود معلمة تقاطعية :

إذا كان النموذج لا يحتوي على معلمة تقاطعية و نريد اختبار هل مجموعة المتغيرات التفسيرية التي يحتوي عليها لها تأثير جوهري كحزمة على المتغير التابع أم لا، يمكن استخدام اختبار Wald لإجراء ذلك . و لتوضيح هذا الاختبار دعنا نستخدم الصيغتين التاليتين :

ص = ب$_{١}$ س$_{١}$ + ب$_{٢}$ س$_{٢}$ + ب$_{٣}$ س$_{٣}$ + ع ⟵ (أ) .... (٦٩-٧)

ص = و ⟵ (ب) .... (٧٠-٧)

$$Y = b + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + u \longrightarrow (A)$$
$$Y = W \longrightarrow (B)$$

حيث لا يحتوي النموذج "أ" (A) على معلمة تقاطعية ، ولا يحتوي النموذج

"ب" (B) على أي معلمة إلا الخطأ العشوائي "و" (W) . وهذا يعني أن عدد المعلمات المقدرة في النموذج "أ" تساوي "ك" ، و في النموذج "ب" = صفر . ومن ثم فإن :

فرض العدم : ب₁ = ب₂ = ب₃ = صفر ⟵ $b_1 = b_2 = b_3 = 0$

و لإجراء الاختبار نحسب :

$$ف_{س} = \frac{\sum \hat{ص}^2 \div ك}{ك أ \div (ن - ك)} \quad .... (٧-٧١)$$

$$F_c = \frac{(ESS_B - ESS_A)/k}{ESS_A/(n-k)} = \frac{\sum \hat{Y}^2/k}{ESS_A/(n-k)}$$

و يلاحظ في هذه الحالة أن ك = ٣ . ثم نكمل الخطوات التالية كما سبق ، مع مراعاة أن درجات الحرية للبسط بالنسبة لاختبار "ف" = ك ، وللمقام = ن-ك .

ومن ناحية أخرى إذا كان النموذج غير المقيد يحتوي على معلمة واحدة هي المعلمة التقاطعية ، ونريد إجراء اختبار والدّ عليه ، أي أن :

ص = ب + ع ← (غ) .... $Y = b + u$

ص = و ← (ق) .... $Y = W$

فإن ف س تكون هي مربع "ت" للمعلمة التقاطعية . أي أن : $F_c = t^2$

٤- اختبار توليفة خطية من المعاملات :

افترض أننا بصدد تقدير دالة الاستهلاك باستخدام الصيغة التالية :

ص ز = ب₁ + ب₂ س₂ز + ب₃ س₃ز + ع ز .... (٧-٧٢)

$$Y_t = b_1 + b_2 X_{2t} + b_3 X_{3t} + u_t$$

حيث :

ص ز = الإنفاق الاستهلاكي الكلي $Y_t =$

س ٢ز= الأجور الكلية $X_{2t} =$

س ٣ز= الدخل غير الأجري $X_{3t} =$

ب ٢ = الميل الحدي للاستهلاك لدى منفقي الأجور $b_2 =$

ب ٣ = الميل الحدي للاستهلاك لدى الفئات غير العمالية $b_2 =$

و افترض الآن أننا نريد اختبار ما إذا كان الميل الحدي للاستهلاك لمنفقي الأجور مختلفا اختلافا جوهريا عن الميل الحدي للاستهلاك للفئات غير العمالية أم لا . أي أن:

فرض العدم : ب٢ = ب٣ $\longrightarrow b_2 = b_3$

الفرض البديل : ب٢ ≠ ب٣ $\longrightarrow b_2 \neq b_3$

وفي هذه الحالة توجد هناك ثلاث طرق مختلفة لإجراء هذا الاختبار وكلها تؤدي لنفس النتيجة . و تتمثل هذه الطرق فيما يلي :

الطريقة الأولى : طريقة والد Wald Test :

ولتوضيح هذه الطريقة افترض أن النموذج غير المقيد يأخذ الصيغة التالية :

ص ز = ب١ + ب٢ س٢ز + ب٣ س٣ز + ع ز ⟵ (غ) .... (٧-٧٣)
$Y_t = b_1 + b_2 X_{2t} + b_3 X_{3t} + u_t \longrightarrow (U)$

و بالتعويض بالقيد ب٢ = ب٣ في الصيغة غير المقيدة نحصل على الصيغة المقيدة على النحو التالي :

ص ز = ب١ + ب٢ س٢ز + ب٢ س٣ز + ع ز ⟵ (ق) .... (٧-٧٤)
$Y_t = b_1 + b_2 X_{2t} + b_2 X_{3t} + u_t \longrightarrow (R)$
إذن :
ص ز = ب١ + ب٢(س٢ز + س٣ز) + ع ز ⟵ (ق) .... (٧-٧٥)
$Y_t = b_1 + b_2 (X_{2t} + X_{3t}) + u_t \longrightarrow (U)$

و باستحداث متغير مركب جديد هو "ع ز" (Z_t) ، حيث :

ع ز = (س٢ز + س٣ز) $Z_t = (X_{2t} + X_{3t})$

و التعويض به في (٧-٧٥) نحصل على :

ص ز = ب١ + ب٢ ع ز + ى ز ⟵ (ق) .... (٧-٧٦)
$Y_t = b_1 + b_2 Z_t + u_t \longrightarrow$ (R)

و الآن نتبع الخطوات التالية لإجراء الاختبار :

(١) تقدير الصيغة غير المقيدة و الحصول منها على (لـ غ) ESS_U ، بالإضافة لتقدير الصيغة المقيدة و الحصول منها على (لـ ق) ESS_R .

(٢) حساب ف س (F_c) باستخدام نفس الصيغة (٧-٦٥) .

(٣) البحث في جدول "ف" (F) عن "ف ج" (F_t) عند مستوى معنوية معين (α) ، ودرجات حرية للبسط = عدد المعلمات المقدرة في الصيغة المقيدة = م (m) ، و درجات حرية للمقام = ن - كـ (n-k) حيث "كـ" هي عدد المعلمات المقدرة بالصيغة غير المقيدة .

(٤) مقارنة ف س (F_c) مع ف ج (F_t) . فإذا كان ف س > ف ج نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل و العكس صحيح .

ومن الممكن إجراء اختبارات أخرى من هذا القبيل ، مثال ذلك اختبار افتراض أن غلة الحجم ثابتة ، أي أن : ب٢ + ب٣ = ١ ، أو اختبار أن مجموع مرونات الطلب الدخلية و السعرية مساوية للصفر ، أي أن : ب٢ + ب٣ = صفر .

و في الحالة الأولى يمكن إعادة صياغة الفرض كما يلي :

ب٢ = ١ - ب٣ ⟵ $b_2 = 1 - b_3$

و في الحالة الثانية يعاد صياغة الفرض كما يلي :

ب٢ = - ب٣ ⟵ $b_2 = - b_3$

فإذا افترضنا أن الصيغة غير المقيدة لدالة الإنتاج هي :

$$\text{Ln } Y = b_1 + b_2 \text{ Ln } X_2 + b_3 \text{ Ln } X_3 + u \text{ ....(U)}$$

فإنه بالتعويض بـ $b_2 = 1 - b_3$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \ln Y &= b_1 + (1-b_3) \ln X_2 + b_3 \ln X_3 + u \\ &= b_1 + \ln X_2 - b_3 \ln X_2 + b_3 \ln X_3 + u \\ &= b_1 + \ln X_2 + b_3 (\ln X_3 - \ln X_2) + u \end{aligned}$$

$$\ln Y - \ln X_2 = b_1 + b_3 (\ln X_3 - \ln X_2) + u$$

و من ثم فإن الصيغة المقيدة للدالة الإنتاج تصبح كما يلي :

$$H = b_1 + b_3 Z + u \text{ ....(R) ....(7-77)}$$

حيث : $H = \ln Y - \ln X_2 \ , \ Z = \ln X_3 - \ln X_2$

و يمكن استكمال خطوات الاختبار كما أوضحنا سابقا ، حيث :

لو ص = ب١ + ب٢ لو س٢ + ب٣ لو س٣ + ع ⟵ (غ)

لو ص - لو س٢ = ب١ + ب٣ (لو س٣ - لو س٢) + ع ⟵ (ق)

أو : ص* = ب١ + ب٣ س* + ع ⟵ (ق)

و يمكن اختبار الفرض الثاني الخاص بدالة الطلب بإتباع نفس الخطوات السابقة ، حيث أن :

دالة الطلب غير المقيدة : $\ln Y = b_1 + b_2 \ln X_2 + b_3 \ln X_3 + u$

ثم نعوض بالقيد : $b_2 = -b_3$ ، فنحصل على دالة الطلب المقيدة على النحو التالي :

$$\ln Y = b_1 - b_3 \ln X_2 + b_3 \ln X_3 + u$$

$$\ln Y = b_1 + b_3 (\ln X_3 - \ln X_2) + u$$

$$\ln Y = b_1 + b_3 Z_3 + u \text{ .... (R) .... (7-78)}$$

الطريقة الثانية : اختبار "ت" غير المباشر :

إذا كنا بصدد اختبار فرض العدم : ب٢ = ب٣ ← $(b_2 = b_3)$ ، فإننا نستحدث معلمة جديدة و لتكن "م" (δ) ، حيث : م = ب٢ - ب٣ ← $\delta = b_2 - b_3$

ومن ثم فإن :

فرض العدم : م = صفر ← $\delta = 0$

الفرض البديل : م ≠ صفر ← $\delta \neq 0$

و يمكن صياغة فرض العدم أعلاه على النحو التالي :

ب٣ = ب٢ – م ⟵ $b_3 = b_2 - \delta$

و إذا كانت دالة الاستهلاك المراد تقديرها تأخذ الصيغة التالية :

ص ز = ب١ + ب٢ س٢ز + ب٣ س٣ز + ع ز .... (٧-٧٩)

$$Y_t = b_1 + b_2\,X_{2t} + b_3\,X_{3t} + u_t$$

و بالتعويض بالقيد أعلاه الممثل في فرض العدم نحصل على الدالة المقيدة التالية:

ص ز = ب١ + ب٢ س٢ز + (ب٢- م) س٣ز + ع ز......................................(٧-٨٠)

و بإجراء بعض الاختصارات نصل إلى:

ص ز = ب١ + ب٢ (س٢ز+س٣ز)- م س٣ز + ع ز......................................(٧-٨١)

$$Y_t = b_1 + b_2\,(X_{2t} + X_{3t}) - \delta\,X_{3t} + u_t$$

و يمكن اختبار فرض العدم من خلال تقدير الصيغة (٧-٨١) ثم استخدام إحصائية "ت" t للمعلمة "م" δ في إجراء الاختبار.

أما إذا كنا بصدد اختبار فرض غلة الحجم الثابتة في دالة إنتاج لوغاريتمية مزدوجة ، و الذي يتمثل في:

ب٢ + ب٣ = ١ ⟵ $b_2 + b_3 = 1$

فإننا نستحدث معلمة جديدة تعبر عن هذا الفرض و هي "م" δ ، حيث :

م = ب٢ + ب٣ –١ ⟵ $\delta = b_2 + b_3 - 1$

و حيث أن الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة لدالة الإنتاج كما يلي :

لو ص = ب١ + ب٢ لو س٢ +ب٣ لو س٣+ع

$$\text{Ln}\,Y = b_1 + b_2\ \text{Ln}\,X_2 + b_3\ \text{Ln}\,X_3 + u$$

فبإعادة صياغة الفرض السابق على النحو التالي :

ب٣ = م – ب٢ + ١ ← $b_3 = \delta - b_2 + 1$ ، و التعويض به في دالة الإنتاج السابقة نحصل على :

$$Ln\ Y = b_1 + b_2\ Ln\ X_2 + (\delta - b_2 + 1)\ Ln\ X_3 + u$$
$$Ln\ Y = b_1 + b_2\ (Ln\ X_2 - Ln\ X_3) + (\delta + 1) Ln\ X_3 + u$$
$$Ln\ Y = b_1 + b_2\ Z + b_4\ Ln\ X_3 + u$$

أي :

لو ص = ب١ + ب٢ ع + ب٤ لو س٣ + ى .... (٧–٨٢)

حيث : ب٤ = م + ١ ← $b_4 = \delta + 1$

ع = لو س٢ – لو س٣ ← $Z = Ln\ X_2 - Ln\ X_3$

و بتقدير الصيغة (٧–٨٢) يمكن اختبار فرض العدم : ب٤ = ١ ← $b_4 = 1$ في مواجهة الفرض البديل : ب٤ ≠ ١ ← $b_4 \neq 1$ ، مع الأخذ في الاعتبار أن اختبار ب٤ = ١ يقابل م = صفر ، وعندئذ نقوم بحساب :

$$ت_س = \frac{\hat{ب}_٤ - ١}{ع_{\hat{ب}_٤}} \qquad t_c = \frac{\hat{b}_4 - 1}{S_{\hat{b}_4}}$$

و لكن يلاحظ أن استخدام اختبار "t" غير المباشر Indirect "t" Test يؤدي للإخلال ببعض افتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية ، ومنها :

(أ) افتراض عدم وجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية . فمن المعادلة (٧–٨٢) يتضح أن هناك ارتباطاً بين "ع" ، لو س٣) و هو ما يؤدي إلى وجود مشكلة الامتداد الخطي المتعدد .

(ب) افتراض عدم وجود ارتباط بين المتغير العشوائي و المتغيرات التفسيرية . ويترتب على اختلال هذا الافتراض وجود مشكلة عدم ثبات التباين .

(جـ) افتراض أن قيم الحد العشوائي غير مرتبطة . ويترتب على اختلال هذا الافتراض وجود مشكلة الارتباط الذاتي .

الطريقة الثالثة : إختبار "ت" المباشر :

وتعتمد هذه الطريقة على استحداث معلمة جديدة تعبر عن فرض العدم . فإذا كان فرض العدم هو : ب٢ = ب٣ ← $b_2 = b_3$ ، فمن الممكن كتابته في الصيغة التالية :

م = ب٣ − ب٢ ← $\delta = b_3 - b_2$

أما إذا كان فرض العدم هو : ب٢ + ب٣ = ١ ← $b_2 + b_3 = 1$ ، فمن الممكن كتابته في الصيغة التالية :

م = ب٢ + ب٣ − ١ ← $\delta = b_2 + b_3 - 1$.

و إذا كان فرض العدم على الصورة التالية : ب٢ + ب٣ = صفر ← $b_2 + b_3 = 0$ ، يمكن إعادة كتابته على النحو التالي :

م = ب٢ + ب٣ ← $\delta = b_2 + b_3$.

و لاختبار فرض العدم في الحالات السابقة نقوم بتقدير الصيغة الأصلية لدالة الانحدار الممثلة في (٧−٨٨) ثم نقدر "ت س" (t_c) لكل واحدة منها باستخدام الصيغ التالية :

$$t_{c1} = \frac{(\hat{b}_2 - \hat{b}_3) - 0}{\sqrt{\operatorname{var}\hat{b}_2 + \operatorname{var}\hat{b}_3 - 2\operatorname{cov}(\hat{b}_2, \hat{b}_3)}}$$

$$t_{c2} = \frac{(\hat{b}_2 + \hat{b}_3) - 1}{\sqrt{\operatorname{var}\hat{b}_2 + \operatorname{var}\hat{b}_3 - 2\operatorname{cov}(\hat{b}_2, \hat{b}_3)}}$$

$$t_{c3} = \frac{(\hat{b}_2 + \hat{b}_3) - 0}{\sqrt{\operatorname{var}\hat{b}_2 + \operatorname{var}\hat{b}_3 - 2\operatorname{cov}(\hat{b}_2, \hat{b}_3)}}$$

ثم نبحث عن "ت ج" t في الجداول عند مستوى معنوية معين ، ودرجات حرية (ن-ك) n-k و نكمل باقي خطوات الاختبار .

و يتعين ملاحظة أن اختبار والد يصلح في حالة العينات الصغيرة .

(٧-٣-٤) اختبارات تعيين النموذج :

من بين اختبارات تعيين النموذج الهامة اختبار مضاعف لاجرانج لإضافة متغيرات تفسيرية ، واختبار لاجرانج للصيغة غير الخطية . وسوف نلقي الضوء على هذين الاختبارين فيما يلي :

١- اختبار مضاعف لاجرانج لإضافة متغيرات تفسيرية Lagrange Multiplier Test (LM):

يستخدم هذا الاختبار لتحديد ما إذا كان من المجدي إضافة بعض المتغيرات التفسيرية للنموذج أم لا ، ولذا فهو على عكس اختبار والد يبدأ بنموذج مقيد ويقارنه بنموذج غير مقيد . أي يبدأ بالنموذج الأبسط الذي يحتوي على عدد أقل من المتغيرات التفسيرية ، ثم يختبر مدى معنوية إضافة متغيرات تفسيرية أخرى . و لتوضيح هذا الاختبار افترض أن:

ص = ب١ + ب٢ ص٢ + ب٣ ص٣ + ... + بم سم ← (ق) .... (٧-٨٣)

$$Y = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \ldots\ldots + b_m X_m + u \quad (R)$$

ص = ب١ + ب٢ ص٢ + ب٣ ص٣ +...+ بم صم ....+ ب ر ص ر + و ← (غ) (٧-٨٤)

$$Y = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_m X_m + b_m + {}_1X_{m+1} + \ldots\ldots + b_k X_k + v \quad (U)$$

و الآن نريد اختبار فرض العدم المتمثل في كون معلمات المتغيرات المضافة مساوية للصفر . أي أن :

فرض العدم : ب م+١ = ب م+٢ = ... = ب ر = صفر ← $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0$

الفرض البديل : واحد فقط على الأقل من هذه المعلمات ≠ صفر .

و تتمثل الخطوات التي تتبع لإجراء الاختبار فيما يلي :

(أ) نقوم بتقدير الصيغة المقيدة (ق) R ، ثم نحصل على البواقي المقدرة من هذا النموذج ، حيث :

$$د_ق = ص - \hat{ب}_1 - \hat{ب}_2 س_2 - .... - \hat{ب}_م س_م \quad .... (٧-٨٥)$$

$$e_R = Y - b_1 - b_2 X_2 - .... - b_m X_m$$

(ب) إذا افترضنا أن التعيين الصحيح للنموذج يتمثل في الصيغة غير المقيدة ، لكان هذا يعني أن المتغيرات $س_{م+1}$ ، .... ، $س_ك$ يتعين إدراجها في الصيغة المقدرة . ومن ثم فإن عدم إدراجها ينعكس في البواقي $د_ق$ ($\hat{e}_R$) . و هذا يعني أنه إذا كانت المتغيرات غير المدرجة في الصيغة المقيدة ذات أهمية في التأثير على ص يجب أن تكون على علاقة مع "$د_ق$" . أي إذا قمنا بتقدير علاقة الانحدار بين "$د_ق$" و المتغيرات المحذوفة سوف نحصل على علاقة ذات مقدرة تفسيرية عالية . وهذا يقودنا إلى الخطوة التالية :

(جـ) نقوم بتقدير العلاقة بين "$د_ق$" و المتغيرات التفسيرية الموجودة في الصيغة غير المقيدة وهي $س_2$ ، $س_3$ ، $س_{م+1}$ ، .... $س_ك$ وتسمى الصيغة المقدرة عندئذ بصيغة الانحدار المساعد Auxiliary Regression . و يلاحظ أن المتغيرات الأصلية قد تم إضافتها للمتغيرات المحذوفة في صيغة واحدة حتى تكون صيغة الانحدار المساعد متوافقة مع اختبار (كا^2) χ^2 . ولقد ثبت أن " ن ر^2 "($n R^2$) لصيغة الانحدار المساعد لها توزيع كا^2 بدرجات حرية = عدد معلمات المتغيرات المضافة في الصيغة غير المقيدة .

حيث : ر^2 = معامل التحديد لصيغة الانحدار المساعد ، ن = حجم العينة .

(د) نحسب ن ر^2 ، ثم نبحث عن كا^2 في الجداول الإحصائية عند مستوى معنوية معين (α) ودرجات حرية (ك – م) (k-m) . و لو أن : $nR^2 > \chi^2_{\alpha,(k-m)}$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل أن واحد على الأقل من المتغيرات المضافة في الصيغة غير

المقيدة له معنوية إحصائية في تأثيره على ص . و توضح عندئذ قيم " t " للمعلمات المضافة أي المتغيرات أكثر معنوية حتى تضاف دون غيرها .

و يلاحظ أن LM يصلح في حالة العينات الكبيرة ، غير أنه من المفيد إجراءه حتى في حالة أن يكون حجم العينة ٣٠ .

٢- اختبار لاجرانج للصيغة غير الخطية Nonlinearity Test :

من الممكن استخدام اختبار لاجرانج لتحديد ما إذا كانت الصيغة غير الخطية أكثر ملائمة من الصيغة الخطية ، أو أن الصيغة التي تحتوي على حد مركب Interaction Term أكثر ملائمة من تلك التي لا تحتوي على هذا الحد . و لتوضيح ذلك افترض أن لدينا النموذج التالي :

ص = أ + ب س + جـ ع + ء .... (٧-٨٦)

$$Y = a + b X + c Z + u$$

و نريد اختبار ما إذا كان من المتعين أن تحتوي هذه الصيغة على حدود غير خطية مثل س ع ، س^٢ ، ع^٢ (XZ , Z^2 , X^2) أم لا . و لعمل ذلك نتبع الخطوات التالية :

(أ) نقوم بتقدير الصيغة (٧-٨٦) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية ، ثم نحسب منها البواقي (د ر) .

(ب) لو أن الحدود غير الخطية كان لها تأثير على ص فلابد أن هذا التأثير يكون قد انعكس على حد الخطأ (د ر) ، ولاختبار ذلك نقوم بتقدير صيغة الانحدار المساعد التالية:

د ر = أ٠ + أ١ س + أ٢ ع + أ٣ ع^٢ + أ٤ س^٢ + أ٥ س ع + و .... (٧-٨٧)

(جـ) ثم نحسب "ن ر^٢ " للانحدار المساعد و نقارنه بـ كا^٢ عند مستوى معنوية معين ودرجات حرية = عدد المتغيرات المضافة = ٣ . فإذا اتضح أن كا^٢ر < ن ر^٢ فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل بأن واحداً من الحدود غير الخطية على الأقل له تأثير جوهري على ص . و يمكن بالطبع اختبار أي صيغة غير خطية مثل "لو س" أو "لو ع" .

الفصل الثامن

المتغيرات الصورية أو الصماء

Dummy Variables

تستخدم المتغيرات الصورية أو الصماء كممثل لبعض المتغيرات النوعية أو الوصفية التي تؤثر في الظواهر الاقتصادية كالجنس واللون والديانة والموطن والمهنة والمستوى التعليمي وغيرها . وتأخذ هذه المتغيرات قيمتين تحكميتين فقط هما الصفر والواحد. فهي تأخذ القيمة واحد عند وجود خاصية معينة ، وتأخذ القيمة صفر عند غياب هذه الخاصية . فإذا رمزنا إلى المتغير الصوري بالرمز "و" فإن و = ١ إذا كان الشخص أبيضاً مثلا ، و = صفر إذا كان الشخص أسوداً ، باعتبار أن "و" هنا ترمز إلى اللون . أو أن و=١ إذا كان الفرد ذكراً ، و= صفر إذا كان الفرد أنثى باعتبار أن "و" ترمز للجنس ، وهكذا . وتستخدم المتغيرات الصورية في نماذج الانحدار إما كمتغيرات تفسيرية أو كمتغيرات تابعة ، ولكن التركيز الأكبر عليها كمتغيرات تفسيرية على النحو الذي سوف يأتي . ويشار إليها في بعض الكتابات بالمتغيرات الوهمية ، أو المتغيرات الثنائية Binary Variables أو المتغيرات النوعية Qualitative Variables أو المتغيرات الفئوية Categorical Variables . وسوف نركز في هذا الفصل على نقاط ثلاثة نتناول كل منها في مبحث مستقل على النحو التالي :

المبحث الأول : كيفية استخدام المتغيرات الصورية .

المبحث الثاني : أهم استخدامات المتغيرات الصورية .

المبحث الثالث : استخدام المتغيرات الصورية كمتغيرات تابعة .

المبحث الأول

كيفية استخدام المتغيرات الصورية

يوجد هناك أكثر من طريقة لاستخدام المتغيرات الصورية في نماذج الانحدار كمتغيرات تفسيرية . ونشير في هذا الصدد لبعض منها فيما يلي :

(٨-١-١) متغير تفسيري نوعي واحد

من الممكن أن يحتوي نموذج الانحدار على متغير تفسيري نوعي واحد دون وجود أي متغيرات كمية تفسيرية . فإذا أردنا مثلا اختبار أثر الجنس (ذكر أو أنثى) على مستوى الأجور في مجتمع العاملين بمجال التدريس ، فمن الممكن عمل ذلك من خلال قياس علاقة الانحدار بين الأجر "ص" (Y_i) كمتغير تابع ، "و ر" (u_i) كمتغير تفسيري صوري يمثل الجنس . وتأخذ هذه العلاقة الصيغة التالية :

ص ر = أ + ب و ر + ى ر ← $Y_i = a + b D_i + u_i$ .... (٨-١)

حيث : ص ر (Y_i) = المرتب السنوي للمدرس خريج الجامعة

و ر (D_i) = الجنس بحيث :

و ر (D_i) = ١ إذا كان المدرس ذكراً

و ر (D_i) = صفر إذا كان المدرس أنثى

مثال (٨-١) العلاقة بين الأجر والجنس

إذا كان لدينا عينة من المدرسين خريجي الجامعات عددهم ١٠ وكانت مرتباتهم على النحو الموضح بالجدول (٨ - ١) ، فمن الممكن تقدير معادلة الانحدار (٨-١) باستخدام بيانات العمودين الثالث والرابع بالجدول (٨-١) بنفس الطريقة التي أوضحناها سابقا في حالة الانحدار الخطي البسيط ، وذلك كما هو موضح بالجدول (٨-٢) .

جدول (٨-١)

المرتب السنوي لعينة من خريجي الجامعات

المشاهدة	الجنس	المرتب السنوي (ص) (Y)	المتغير الصوري (و) (D)
1	ذكر	1000	1
2	ذكر	1100	1
3	أنثى	800	0
4	أنثى	900	0
5	ذكر	1050	1
6	أنثى	950	0
7	أنثى	850	0
8	ذكر	1300	1
9	ذكر	1500	1
10	أنثى	950	0

جدول (٨-٢)

حسابات أثر الجنس على الأجر

ص (Y)	و (Di)	ص، (y) = ص − $\bar{ص}$	و، = و − $\bar{و}$	ص، و،	و،^{2}
1000	1	- 40	+ 0.5	- 20	0.25
1100	1	+ 60	+ 0.5	+ 30	0.25
800	0	- 240	- 0.5	+ 120	0.25
900	0	- 140	- 0.5	+ 70	0.25
1050	1	+10	+ 0.5	+ 5	0.25
950	0	- 90	- 0.5	+ 45	0.25
850	0	- 190	- 0.5	+ 95	0.25
1300	1	+ 260	+ 0.5	+ 130	0.25
1500	1	+ 460	+ 0.5	+ 230	0.25
950	0	- 90	- 0.5	+ 45	0.25
$\sum$ ص = 10400	$\sum$ و = 5			$\sum$ ص، و، = 750	$\sum$ و،^{2} = 2.5

$\overline{ص} = \sum ص_ر \div ن = ١٠٤٠٠ \div ١٠ = ١٠٤٠$ =المتوسط العام للمرتبات .

$\overline{و} = \sum و_ر \div ن = ٥ \div ١٠ = ٠,٥$

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص_١ و_١}{\sum و_١^٢} = \frac{٧٥٠}{٢,٥} = ٣٠٠$$

$$\hat{أ} = \overline{ص} - \hat{ب}\ \overline{و} = ١٠٤٠ - (٣٠٠)(٠,٥) = ٨٩٠$$

$ص_ر = ٨٩٠ + ٣٠٠ و_ر + د_ر$ ....(٨-٢)

$$Y_i = 890 + 300D_i + e_i$$

$\overline{ص}_ن = ٤٤٥٠ \div ٥ = ٨٩٠$ = متوسط مرتبات الإناث = $\overline{Y}_f$ ...(٨-٣-أ)

$\overline{ص}_ذ = ٥٩٥٠ \div ٥ = ١١٩٠$ = متوسط مرتبات الذكور = $\overline{Y}_m$ .....(٨-٣-ب)

ويلاحظ من المعادلة (٨-١) ما يلي :

القيمة المتوقعة لمرتب المُدَرِّسة = ق(ص) / و=صفر = أ← $E(Y / D_i = 0) = a$

القيمة المتوقعة لمرتب المُدَرِّس = ق(ص / و=١) = أ+ب ← $E(Y / D_i = 1) = a + b$

وذلك بافتراض أن القيمة المتوقعة للحد العشوائي =صفر . ويعني الخط المائل (/) بشرط.

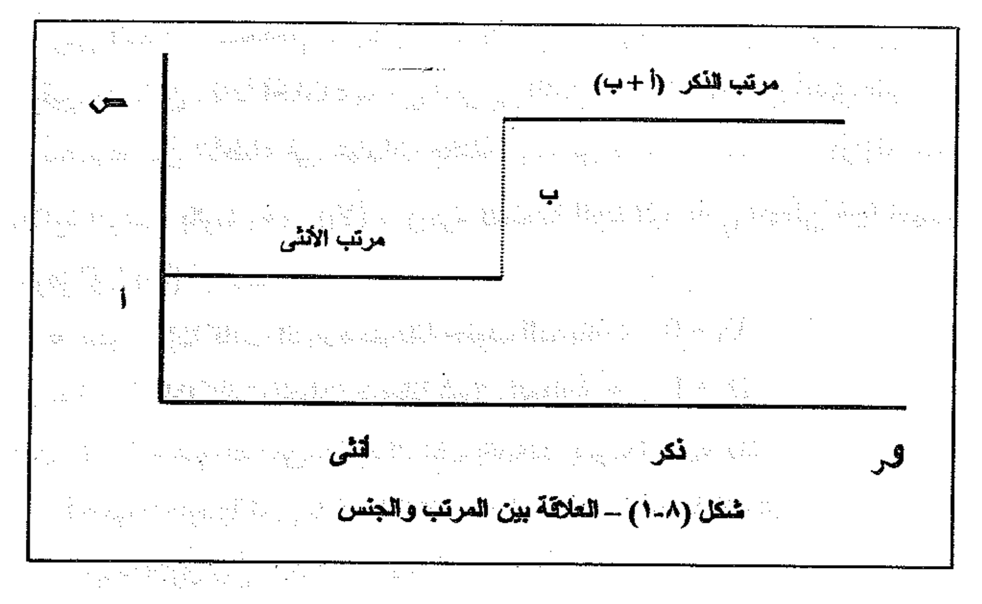
ومما سبق نجد أن المعلمة التقاطعية (أ) تشير إلى متوسط مرتب المُدَرِّسة . ويتضح هذا من المعادلة (٨-٢) حيث نجد أن أ = ٨٩٠ وهي نفسها $\overline{ص}_ن$. أما المعلمة الانحدارية (ب) فهي تشير إلى الفرق بين مرتب المدرس الذكر والمدرسة ، حيث يلاحظ أن متوسط مرتب المدرس = أ + ب . وفي المعادلة (٨-٢) نجد أن :

أ+ب = ٨٩٠ + ٣٠٠ = ١١٩٠ وهو نفسه $\overline{ص}_ذ$.

ومن ثم فإن الفرق بين المتوسطين = $\overline{ص}_ذ - \overline{ص}_ن$ = (أ + ب) – أ = ب = ٣٠٠.

ويعبر الشكل (٨-١) عن ذلك .

ومن الممكن التعميم في هذه الحالة بالقول أن المعلمة التقاطعية بنموذج يأخذ الصيغة (٨-١) تشير إلى متوسط المتغير التابع في حالة الصفة التي يكون عندها و , (Di) = صفر .



شكل (٨-١) – العلاقة بين المرتب والجنس

أما المعلمة الانحدارية " ب" فهي تشير إلى الفرق بين متوسط المتغير التابع في حالة الصفة التي يكون عندها " و , (D_i) = ١ ، والمتوسط في حالة الصفة التي يكون عندها و,= صفر .

ومن الممكن في هذه الحالة اختبار الفرض القائل " أنه يوجد تمييز في الأجر وفقا للجنس " من خلال اختبار :

فرض العدم : ب = صفر ← $b = 0$

في مواجهة :

الفرض البديل : ب ≠ صفر ← $b \neq 0$

وذلك باستخدام اختبار " ت" .

وإذا ثبت من الاختبار أن $\hat{ب}$ لها معنوية إحصائية فإن هذا يعني أن الاختلاف بين مرتبات المدرسين الذكور والمدرسات جوهري ، ومن ثم نقبل الفرض

القائل " أنه يوجد هناك تمييز في الأجر وفقا للجنس "، والعكس صحيح . كما يعني قبول الفرض البديل ورفض فرض العدم أن الجنس متغير له تأثير جوهري على مستوى الأجر .

ومن الممكن استخدام الصيغة (٨-١) أيضا في اختبار مدى وجود تمييز سعري بين سوقين مختلفين . فإذا أخذنا عينة من المرضى الذين يتم علاجهم على أيدي طبيب ما أو مجموعة من الأطباء في عيادات مختلفة بمناطق مختلفة بالمدينة ، ورمزنا لثمن تذكرة الكشف بالرمز ص ر (Y_i) ، ورمزنا للمنطقة الجغرافية التي تتوطن فيها العيادة بالرمز "و ر" (D_i) ، بحيث :

و ر = صفر إذا كانت العيادة متوطنة جنوب المدينة← $D_i = 0$

و ر = ١ إذا كانت العيادة متوطنة شمال المدينة← $D_i = 1$

فإن : أ = متوسط ثمن تذكرة الكشف بالعيادة جنوب المدينة (a)

أ + ب = متوسط ثمن تذكرة الكشف بالعيادة شمال المدينة (a+b)

ب = الفرق بين المتوسطين (b)

وباختبار معنوية "ب " يمكن تحديد ما إذا كان هناك تمييز سعري أم لا .

ويلاحظ من ناحية أخرى أنه من الممكن استخدام أكثر من متغير صوري لتمثيل متغير تفسيري نوعي واحد . فإذا أردنا اختبار أثر المستوى التعليمي على مستوى المرتب في مجتمع العاملين بمجال معين ، وكان لدينا ثلاث مستويات تعليمية :

خريجون بمستوى تعليمي متوسط (دبلوم) و١ ... (D_1)

خريجون بمستوى تعليمي عالي (بكالوريوس) و٢ .. (D_2)

خريجون بمستوى تعليمي أعلى (ماجستير) و٣ .... (D_3)

فمن الممكن عمل ذلك من خلال قياس العلاقة التالية :

ص ر = ب ١ + ب٢ و٢ + ب٣ و٣ + ع ر ....(٨-٤)

$$Y_i = b_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + u_i$$

حيث :

ص ر = المرتب السنوي للخريج " ر"

و٢ (D_2) =١ إذا كان الخريج ذا مستوى تعليمي يكافئ البكالوريوس

و٢ (D_2) =صفر إذا كان الخريج ذا مستوى تعليمي آخر

و٣ (D_3) = ١ إذا كان الخريج ذا مستوى تعليمي يكافئ الماجستير

و٣ (D_3) = صفر إذا كان الخريج ذا مستوى تعليمي آخر

ويلاحظ في هذا الصدد أن الخريج الواحد يمكن أن يندرج تحت مستوى تعليمي واحد ، ومن ثم فان وجوده في مستوى تعليمي معين يمنع من وجوده في مستوى آخر . ويتضح هذا مما يلي :

	و١	و٢	و٣
خريج/ بكالوريوس	0	1	0
خريج / دبلوم	1	0	0

ولما كانت المعلمة التقاطعية ب١ (b_1) هي قيمة المتغير التابع ص عندما تكون كل المتغيرات التفسيرية المدرجة بالدالة مساوية للصفر ، أي عندما و٢ = و٣ = صفر ، فإنها تمثل القيمة التي يأخذها المتغير التابع ص عندما و١ = ١ ، وتسمى معلمة فئة أو صفة الأساس . ولذلك لا توجد هناك ضرورة لكتابة "و١ " كمتغير ثالث لأنه يصاحب المعلمة الناقلة وقيمته = ١ .

مثال (٨-٢)

العلاقة بين المستوى التعليمي والأجر

افترض أن هناك عينة من ١٢ خريج ذوي مستويات تعليمية مختلفة كما هو موضح بالجدول (٨-٣) .والمطلوب هو اختبار مدى وجود علاقة بين المستوى التعليمي والأجر باستخدام بيانات هذه العينة .

جدول (٨-٣)

مرتبات عاملين ذوي مستويات تعليمية مختلفة

(1) المشاهدات	(2) المرتب السنوي (ص)	(3) المستوى التعليمي	(4) و$_2$ (D_2)	(5) و$_3$ (D_3)
1	10000	بكالوريوس	1	0
2	12000	بكالوريوس	1	0
3	13000	ماجستير	0	1
4	14000	ماجستير	0	1
5	8000	دبلوم متوسط	0	0
6	9000	دبلوم متوسط	0	0
7	11000	بكالوريوس	1	0
8	12000	بكالوريوس	1	0
9	20000	ماجستير	0	1
10	15000	ماجستير	0	1
11	8500	دبلوم متوسط	0	0
12	9500	دبلوم متوسط	0	0

من الممكن استخدام بيانات الأعمدة (٢) ، (٤) ، (٥) بالجدول (٨-٣) في تقدير علاقة الانحدار (٨-٤) . ويتضح من المعادلة (٨-٤) ما يلي :

القيمة المتوقعة لمرتب حامل دبلوم متوسط = ق(ص/ و$_2$=و$_3$=صفر) = ب$_1$

$$E(Yi / D_2 = D_3 = 0) = b_1$$

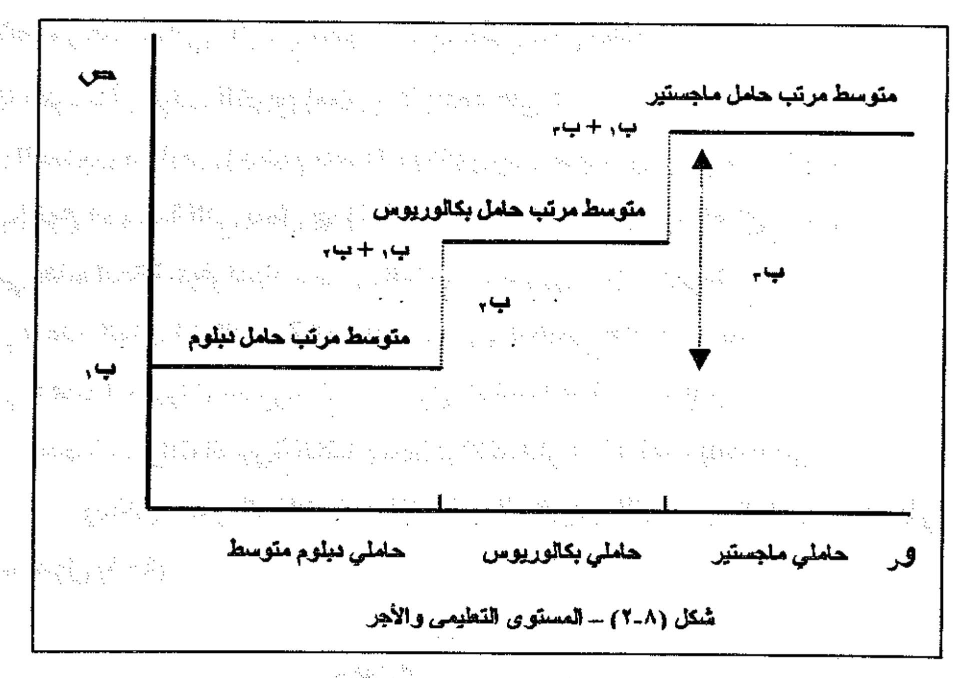
القيمة المتوقعة لمرتب حامل البكالوريوس = ق (ص / و$_2$=١ ، و$_3$ = صفر)= ب$_1$ + ب$_2$

$$E\left(Yi / D_2 = 1, D_3 = 0\right) = b_1 + b_2$$

القيمة المتوقعة لمرتب حامل الماجستير = ق (ص / و$_3$=١ ، و$_2$ = صفر)= ب$_1$ + ب$_3$

$$E\left(Yi / D_3 = 1, D_2 = 0\right) = b_1 + b_3$$

ويتضح في هذه الحالة أننا استخدمنا متغيرين صوريين هما $و_2$ ، $و_3$ للتعبير عن متغير نوعي تفسيري واحد هو المستوى التعليمي . كما يتضح أيضا أن المعلمة التقاطعية $ب_1$ تمثل معلمة الأساس ، أي متوسط المرتب بالنسبة لحامل دبلوم متوسط وهي الفئة التي اخترناها كفئة أساس . أما المعلمة الانحدار ية $ب_2$ فإنها تمثل الفرق بين متوسط مرتب فئة حاملي البكالوريوس ومتوسط مرتب حاملي الدبلوم (فئة الأساس) . وتشير المعلمة الانحدار ية $ب_3$ إلى الفرق بين متوسط مرتب فئة حاملي الماجستير ومتوسط مرتب حاملي الدبلوم . ويمكن توضيح ذلك من الشكل (٨-٢).



شكل (٨-٢) ـ المستوى التعليمي والأجر

ويلاحظ في هذا الصدد أن استخدام ثلاث متغيرات صورية للتعبير عن متغير وصفي واحد يؤدي لنوع من الخطأ في التقدير . ولعل السبب في ذلك هو أن المتغير الصوري الثالث يعتبر متغير ضمني يمكن التوصل إليه من المتغيرين الآخرين . فالعامل الذي لا يخص الفئة الثانية ($و_2$) أو الفئة الثالثة ($و_3$) هو بالضرورة يخص الفئة الأولى دون النص على ذلك صراحة . ومن هذا المنطلق يمكن أن نقرر ما يلي :

عدد المتغيــرات الصــورية = عدد الفئات التي يحتوي عليها المتغير التفسيري النوعي – ١ (٨–٥)

(٨–١–٢) أكثر من متغير تفسيري نوعي

لقد لاحظنا في القسم السابق أن نموذج الانحدار يمكن أن يبنى على أساس متغير تفسيري نوعي واحد سواء أكان هذا المتغير التفسيري ممثلا في متغير صوري واحد أو أكثر من متغير صوري . ولكن بالإضافة إلى ذلك من الممكن أن يبنى نموذج الانحدار على أساس أكثر من متغير تفسيري نوعي مثال ذلك :

إذا افترضنا أن مرتب الخريج (ص ر) Y_i يعتمد على :

(أ) المستوى التعليمي (دبلوم متوسط ، بكالوريوس، ماجستير) ونرمز له "و ر" = D_i

(ب) نوع المؤسسة التي يعمل بها (قطاع عام ، قطاع خاص) ونرمز له "ع ر" = H_i

ففي هذه الحالة يتوفر لدينا عدد من المتغيرات الصورية (م) يساوي :

م و = عدد المتغيرات الصورية الممثلة للمستوى التعليمي =٣–١=٢ (n)

م ع = عدد المتغيرات الصورية الممثلة لنوع المؤسسة = ٢–١= ١ (m)

م = عدد المتغيرات الصورية الكلية بنموذج الانحدار = ٢+ ١ = ٣ (p=n+m) .

ويمكن حصر الصفات المتعلقة بقيم المتغيرين النوعيين السابقين فيما يلي بالجدول (٨–٤).

جدول (٨–٤)

صفات المتغيرين النوعيين

نوع المؤسسة / المستوى التعليمي	قطاع عام (ع١) (H_1)	قطاع خاص (ع٢) (H_2)
دبلوم متوسط (و١) D_1	1	2
بكالوريوس (و٢) D2	3	4
ماجستير (و٣) D3	5	6

ومن ثم فإن معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة بين مرتب العامل ص ر (Y_i) والمتغيرات التفسيرية النوعية المؤثرة فيه يمكن صياغتها على النحو التالي :

ص ر = ب١ + ب٢ و٢ + ب٣ و٣ + أ٢ ع٢ + ع ر ....(٨-٦)

$$Y_i = b_1 + b_2 D_{2i} + b_3 D_{3i} + a_2 H_{2i} + u_i$$

حيث ص = المرتب السنوي للخريج

و٢ (D_2) = ١ إذا كان الخريج من حاملي درجة البكالوريوس

و٢ (D_2) = ٠ إذا كان الخريج من حاملي درجة أخرى

و٣ (D_3) = ١ إذا كان الخريج من حاملي درجة الماجستير

و٣ (D_3) = ٠ إذا كان الخريج من غير حاملي الماجستير

ع٢ (H_2) = ١ إذا كان الخريج يعمل في القطاع الخاص

ع٢ (H_2) = ٠ إذا كان الخريج يعمل في القطاع العام

ومما سبق يتضح لنا أن فئة الأساس التي تنعكس في المعلمة التقاطعية هي الخريجين من حملة الدبلوم المتوسط(D_1)العاملين بالقطاع العام(H_1) .

متوسط مرتب العاملين بالقطاع العام من حملة الدبلوم المتوسط = ق (ص / و٢=و٣=ع٢= صفر) =ب١

$$E(Y_i / D_2 = D_3 = H_2 = 0) = b_1$$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع العام من حملة البكالوريوس = ق (ص / و٢=١ ، و٣=ع٢= صفر) =

ب١ +ب٢ ← $E(Y_i / D_2=1, D_3 = H_2 = 0) = b_1 + b_2$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع العام من حملة الماجستير =ق (ص / و٣=١ ، و٢=ع٢= صفر) =ب١ +ب٣

$$E(Y_i / D_3 =1, D_2 = H_2 = 0) = b_1 + b_3$$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع الخاص من حملة الدبلوم المتوسط = ق (ص / و٢=و٣=صفر، ع٢=١)

=ب١ +أ٢ ← $E(Y_i / H_2 = 1, D_2 = D_3 = 0) = b_1 + a_2$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع الخاص من حملة البكالوريوس = ق (ص / و٢=ع٢=١، و٣=صفر) =

ب١+ب٢+أ٢ ← $E(Y_i / H_2 = D_2 = 1, D_3 = 0) = b_1 + b_2 + a_2$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع الخاص من حملة الماجستير = ق (ص / و٣=ع٢=١، و٢=صفر) =

=ب١+ب٣+أ٢ ← $E(Y_i / H_2 = D_3 = 1, D_2 = 0) = b_1 + b_3 + a_2$

ويمكن إجراء عدد من الاختبارات هنا أهمها :

(١) هل هناك فروق جوهرية بين مرتبات العاملين بالقطاع العام من مختلف المستويات التعليمية ؟ أو بين مرتبات العاملين بالقطاع الخاص من مختلف المستويات التعليمية؟ ويمكن عمل ذلك من خلال اختبار الفرض : ب٢ = ب٣= صفر

(٢) هل هناك فروق جوهرية بين مرتبات العاملين بالقطاع الخاص ومرتبات العاملين بالقطاع العام من مختلف المستويات التعليمية ؟ ويمكن عمل ذلك باختبار الفرض : أ٢=صفر .

وبجانب إمكانية استخدام اختبارات مجموعة المعلمات التي تم التعرض لها في الفصل السابق ، يمكن استخدام اختبار "ت" لإتمام الاختبارات السابقة ، حيث نختبر فروض العدم : ب٢ = صفر ، ب٣ = صفر ، أ٢ = صفر ، في مواجهة الفروض البديلة : ب٢> صفر ، ب٣> صفر ، أ٢> صفر .

ومن نتيجة هذه الاختبارات يمكن تحديد ما إذا كان المستوى التعليمي أو نوع المؤسسة التي يعمل بها العامل له تأثير جوهري على مستوى المرتب أم لا .

(٨-١-٣) متغيرات تفسيرية نوعية وكمية

يمكن أن يبنى نموذج الانحدار على أساس وجود عدد من المتغيرات التفسيرية النوعية بجانب عدد آخر من المتغيرات التفسيرية الكمية . وسوف نتعرض في هذا الصدد لأكثر من نموذج على النحو التالي :

١- متغير كمي ومتغير نوعي واحد بصفتين .

٢- متغير كمي ومتغير نوعي واحد بأكثر من صفتين .

٣- متغير كمي ومتغيرين نوعيين .

٤- أكثر من متغير كمي وأكثر من متغير نوعي .

١-متغير كمي ومتغير نوعي واحد بصفتين:

إذا افترضنا أن مرتب العاملين من حاملي البكالوريوس في مجال معين ص ر (Y_i) يتحدد بعنصرين :

(أ) عدد سنوات الخبرة كمتغير كمي (س ر) X_i

(ب) الجنس (ذكر أو أنثى) كمتغير نوعي (و ر) D_i

فمن الممكن صياغة العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرين المستقلين في هذه الحالة في صورة دالة الانحدار التالية :

ص ر = أ١ + أ٢ و٢ + ب س ر + ع ر .... (٨-٧)
$Y_i = a_1 + a_2 D_2 + bX_i + u_i$

حيث : و٢ (D_2) = ١ إذا كان العامل ذكراً ، و٢ (D_2) = صفر إذا كان العامل أنثى .

ويلاحظ في هذه الحالة أن نموذج الانحدار يحتوي على متغيرين تفسيريين أحدهما كمي وهو عدد سنوات الخبرة والآخر نوعي ذو صفتين وهو الجنس (ذكر أو أنثى) . ومن ثم فان :

القيمة المتوقعة لمرتب الخريج الأنثى = ق(ص / س ، و٢= صفر) = أ١ + ب س ر

$E(Y_i / X_i , D_2=0) = a_1 + bX_i$

القيمة المتوقعة لمرتب الخريج الذكر = ق(ص / س ، و٢= ١) = (أ١ + أ٢) + ب س ر

$E(Y_i / X_i , D_2=1) = (a_1+a_2) + bX_i$

وبمعاينة القيمتين المتوقعتين السابقتين نلاحظ ما يلي :

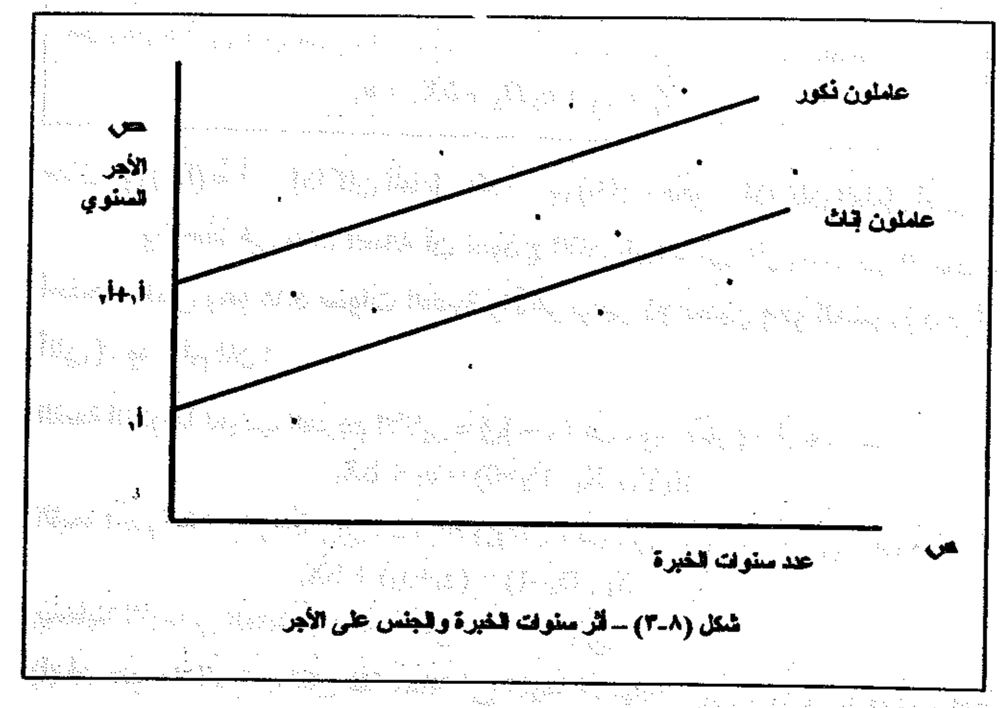
(أ) أن متوسط المرتب لكل فئة ممثلا في القيمة المتوقعة ليس ثابتا وإنما متغير . فهو يتغير في الحالتين تبعا لتغير عدد سنوات الخبرة .

(ب) كما يلاحظ أن عدد سنوات الخبرة يؤثر على متوسط مرتب العاملين الذكور بنفس المعدل الذي يؤثر به على متوسط مرتب العاملين الإناث . ويتضح هذا من تساوي المعلمة الانحدارية الخاصة بعدد سنوات الخبرة في معادلتي الانحدار السابقتين حيث :

$\frac{\partial ص_ذ}{\partial س} = \frac{\partial ص_ث}{\partial س}$ = ب ، أي أن ميل معادلتي الانحدار متماثل .

$$\frac{\partial Y_m}{\partial X} = \frac{\partial Y_f}{\partial X} = b$$

(جـ) بالإضافة إلى ما سبق يلاحظ أن متوسط مرتب العاملين الذكور ممثلاً في علاقة الانحدار [ص د = (أ١ +أ٢) + ب س ر] يفوق متوسط مرتب العاملين الإناث ممثلاً في علاقة الانحدار [ص ن = أ١ + ب س ر] بالمقدار " أ٢" . أي أن المعلمة التقاطعية في علاقة الانحدار الأولى أكبر منها في علاقة الانحدار الثانية بالمقدار "أ٢" بافتراض أن : أ٢ > صفر . ومن الممكن توضيح ذلك بالشكل (٨-٣).



شكل (٨-٣) – أثر سنوات الخبرة والجنس على الأجر

(د) من الممكن التوصل لمعادلتي الانحدار الموضحتين بالشكل (٨-٣) من خلال تقدير معادلة انحدار واحدة هي المعادلة (٨-٧) . ويتضح من هذه المعادلة أن فئة الأساس هي العاملين الإناث ولذلك فإن المعلمة التقاطعية بهذه الدالة وهي أ١ تمثل المعلمة التقاطعية لمعادلة انحدار العاملات . أما المعلمة الانحدارية للمتغير الصوري و٢ وهي أ٢ فهي تمثل الفرق بين متوسط مرتب فئة العاملين الذكور ومتوسط مرتب فئة الأساس وهي العاملات . ومن المتوقع أن تكون أ٢ > صفر في هذه الحالة.

(هـ) إذا أردنا اختبار مدى وجود تمييز أجري يرجع للجنس فإننا نختبر الفرض : $أ_{٢}$ = صفر في مواجهة الفرض : $أ_{٢}$ > صفر ، وذلك باستخدام اختبار " ت" . فإذا كانت "$أ_{٢}$ " المقدرة من بيانات عينة لها معنوية إحصائية فإن هذا يرجح صحة الفرض القائل بوجود تمييز أجري يرجع للجنس .

(و) يعتبر اختيار الفئة التي تمثل فئة الأساس أمراً تحكمياً يرجع لتقدير الباحث . ففي المثال السابق جعلنا فئة العاملات هي فئة الأساس وفئة العاملين هي فئة المقارنة . ومن الممكن أن نعكس الوضع حيث نحدد منذ البداية أن :

$و_{٢}$ (D_2) = ١ إذا كان العامل أنثى ، $و_{٢}$ (D_2) = صفر إذا كان العامل ذكراً .

ومن ثم فإن فئة الأساس تصبح هي العاملين من الذكور حيث يتم إعطاء المتغير الصوري $و_{٢}$ قيمة صفر بالنسبة لها . ومما سبق نجد أن :

القيمة المتوقعة لمرتب الأنثى = ق (ص / س ، $و_{٢}$=١) = ($أ_{١}$+$أ_{٢}$) + ب $س_{ر}$

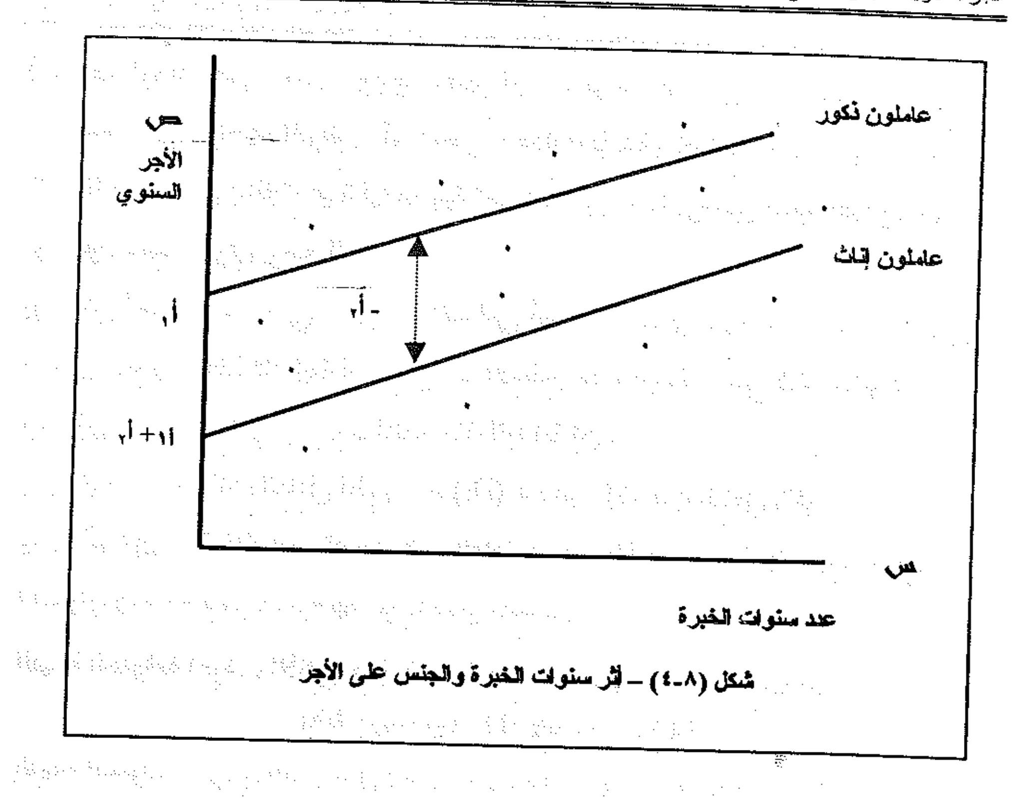
$$E(Y_i / X_i, D_2=1) = (a_1+a_2) + bX_i$$

القيمة المتوقعة لمرتب الذكر = ق (ص / س ، و٢ =٠) = $أ_{١}$ + ب $س_{ر}$

$$E(Y_i / X_i, D_2=0) = a_1 + bX_i$$

ويلاحظ أن الفرق بين القيمة المتوقعة لمرتب العاملة ومرتب العامل هو $أ_{٢}$ ، غير أنه من المتوقع أن تكون $أ_{٢}$ < صفر في هذه الحالة .

وإذا أردنا اختبار مدى وجود تمييز أجري يرجع للجنس في هذه الحالة فإننا نختبر الفرض : $أ_{٢}$ = صفر ، في مواجهة الفرض $أ_{٢}$ < صفر . ولعل هذا يتضح من الشكل (٨-٤).



شكل (٨-٤) - أثر سنوات الخبرة والجنس على الأجر

(٢) متغير كمي ومتغير نوعي بأكثر من صفتين :

افترض أن الإنفاق على المواصلات كمتغير تابع (ص ر) Y_i يتأثر بعاملين :

١- مستوى الدخل الفردي كمتغير تفسيري كمي (س ر) X_i .

٢- موقع العمل كمتغير نوعي (و ر) D_i ممثلا في :

شمال المدينة (و١) ← D_1

وسط المدينة (و٢) ← D_2

جنوب المدينة (و٣) ← D_3

وفي هذه الحالة يمكن قياس العلاقة بين الإنفاق على المواصلات وبين مستوى الدخل، وموقع العمل من خلال معادلة الانحدار التالية :

ص ر = أ١ + أ٢ و٢ + أ٣ و٣ + ب س ر + ى ر ....(٨-٨)

$$Y_i = a_1 + a_2D_2 + a_3 D_3 + bX_i + u_i$$

حيث : ص ر = الإنفاق السنوي على المواصلات للعامل = Y_i

س ر = الدخل السنوي للعامل = X_i

و٢ (D_2) = ١ إذا كان العامل يعمل في وسط المدينة

و٢ (D_2) = ٠ إذا كان العامل يعمل في مكان آخر

و٣ (D_3) = ١ إذا كان العامل يعمل جنوب المدينة

و٣ (D_3) = ٠ إذا كان العامل يعمل في مكان آخر

ويلاحظ في هذه الحالة أن فئة الأساس هي مجموعة العمال الذين يعملون شمال المدينة ، ولذلك فان المعلمة التقاطعية بالمعادلة (٨-٨) وهي أ١ تشير إلى المعلمة التقاطعية بمعادلة انحدار هذه الفئة . وبافتراض أن القيمة المتوقعة للحد العشوائي ى = صفر ، يمكن أن نحدد التالي من المعادلة (٨-٨) : •

القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين شمال المدينة =

ق(ص ر / س ر ، و٢=و٣ =صفر) = أ١ + ب س ر ← $E(Y_i / X_i, D_2=D_3=0) = a_1 + bX_i$

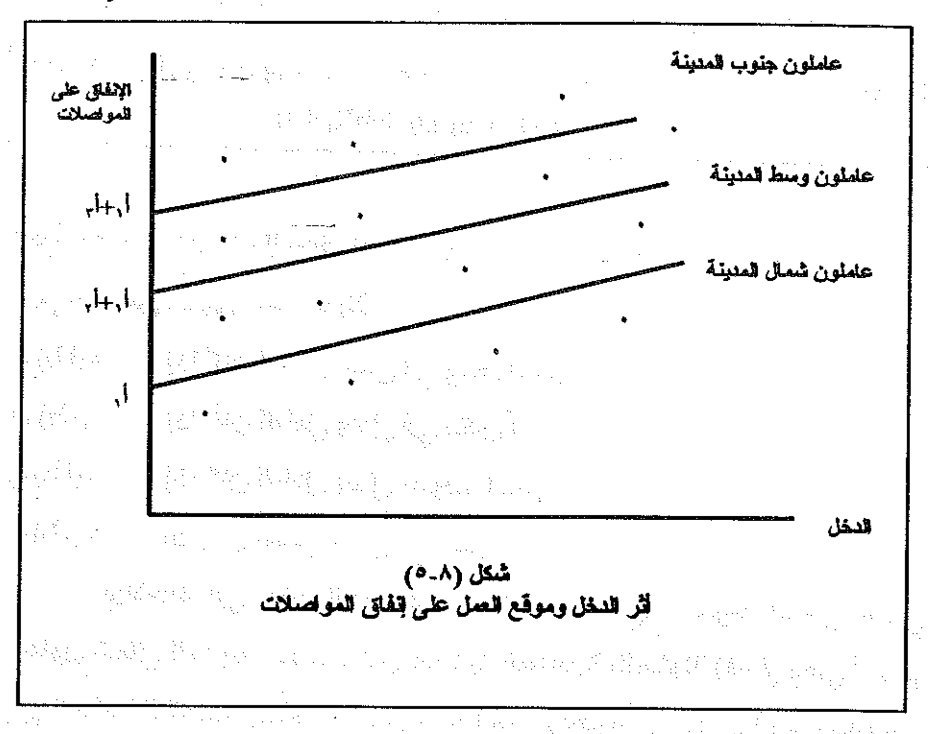
القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين وسط المدينة =

ق(ص ر/ س ر،و٢=١ ،و٣ =صفر)=(أ١ + أ٢) + ب س ر ← $E(Y_i / X_i, D_2=1, D_3=0) = (a_1+a_2) + bX_i$

القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين جنوب المدينة =

ق(ص ر/س ر، و٣=١،و٢=صفر)=(أ١ + أ٣) + ب س ر ← $E(Y_i / X_i, D_3=1, D_2=0) = (a_1+a_3) + bX_i$

ويمكن تمثيل هذه الحالات الثلاثة السابقة بالشكل (٨-٥) :



شكل (٨-٥)
أثر الدخل وموقع العمل على إنفاق المواصلات

ومن الممكن اختبار هل هناك اختلاف جوهري في أعباء المواصلات المالية بين هذه الفئات الثلاث باستخدام معيار " ت" من خلال اختبار الفروض التالية :

فرضي العدم : أ٢ = صفر ، أ٣ = صفر

الفرضين البديلين : أ٢ > صفر ، أ٣ > صفر

(٣) متغير كمي ومتغيرين نوعيين

إذا افترضنا أن مرتب الخريج (ص ر) Yi يتأثر بثلاث متغيرات :

(أ) عدد سنوات الخبرة كمتغير كمي (س ر) Xi

(ب) نوع المؤسسة التي يعمل بها (قطاع عام أم قطاع خاص) كمتغير نوعي (ع ر) Hi

(جـ) المستوى التعليمي (مؤهل عالي أم مؤهل متوسط) كمتغير نوعي (و ر) Di

فمن الممكن صياغة دالة الانحدار التي تمثل هذه العلاقة فيما يلي :

ص ر = أ١ + أ٢ ع٢ + أ٣ و٢ + ب س ر + ء ر ....(٨-٩)

$$Y_i = a_1 + a_2 H_2 + a_3 D_2 + b X_i + u_i$$

حيث : ع٢ (H_2) = ١　إذا كان الخريج يعمل بالقطاع الخاص

ع٢ (H_2) = ٠　إذا كان الخريج يعمل بالقطاع العام

و٢ (D_2) = ١　إذا كان الخريج يحمل مؤهل عالي

و٢ (D_2) = ٠　إذا كان الخريج يحمل مؤهل متوسط

ومن هذه المعلومات يتضح لنا أن فئة الأساس هي فئة العاملين بالقطاع العام من حملة المؤهلات المتوسطة . وبافتراض أن القيمة المتوقعة للحد العشوائي = صفر ، يمكن اشتقاق معادلات الانحدار التالية من المعادلة (٨-٩) :

القيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع العام من حملة المؤهلات المتوسطة =

ق(ص ر / س ر ، ع٢=و٢=صفر) = أ١+ب س ر ← $E(Y_i / X_i, H_2=D_2=0)=a_1+bX_i$

القيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع العام من حملة المؤهلات العليا =

ق(ص ر / س ر ، ع٢=صفر،و٢=١) =(أ١+أ٣)+ب س ر ← $E(Y_i / X_i, H_2=0,D_2=1)=(a_1+a_3)+bX_i$

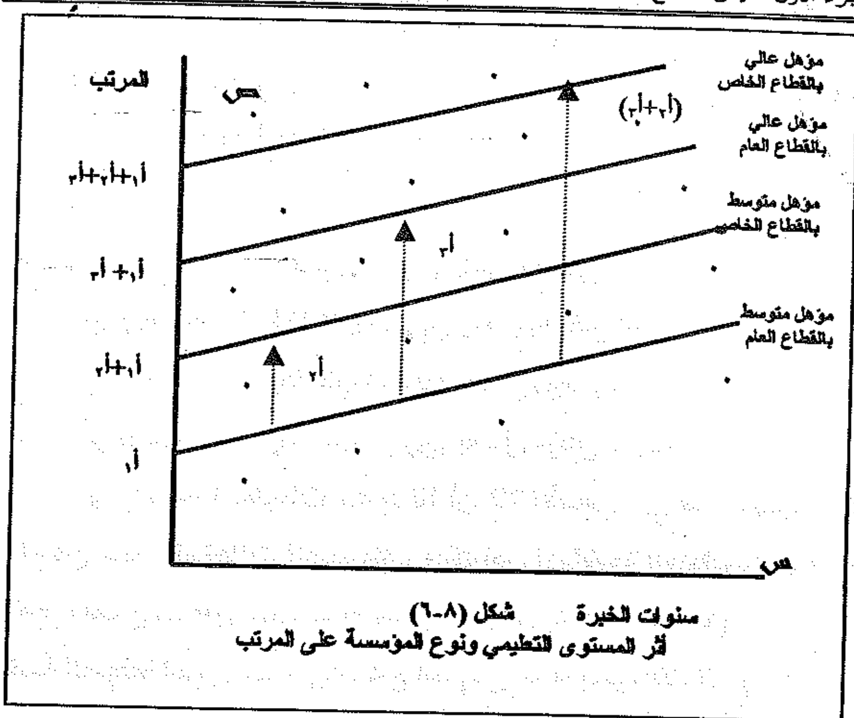
القيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع الخاص من حملة المؤهلات المتوسطة =

ق(ص ر / س ر ، ع٢=١،و٢=صفر) =(أ١+أ٢)+ب س ر ← $E(Y_i / X_i, H_2=1,D_2=0)=(a_1+a_2)+bX_i$

القيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع الخاص من حملة المؤهلات العليا =

ق(ص ر / س ر ، ع٢= و٢=١) =(أ١+أ٢+أ٣)+ب س ر ← $E(Y_i / X_i, H_2= D_2=1)=(a_1+a_2+a_3)+bX_i$

ويمكن توضيح ذلك باستخدام الشكل (٨-٦) .



شكل (٨-٦)
أثر المستوى التعليمي ونوع المؤسسة على المرتب

ولو اختبرنا الفرضين : $أ_{٢}$= صفر ، $أ_{٣}$ = صفر ، في مواجهة الفرضين: $أ_{٢}$ > صفر، $أ_{٣}$ > صفر واتضح أن $\hat{أ}_{٢}$ لها معنوية إحصائية فان هذا يعني أن نوع المؤسسة التي يعمل بها الفرد تؤثر تأثيراً جوهريا على مستوى المرتب . كما أنه إذا اتضح أن $\hat{أ}_{٣}$ لها معنوية إحصائية فان هذا يعني أن المستوى التعليمي للعامل يؤثر بصورة جوهرية على مستوى المرتب .

(٤) تعميم يحتوي على أكثر من متغير كمي وأكثر من متغير نوعي

افترض أننا نريد تحديد العوامل التي تؤثر على الدخل الكلي لمدرس ثانوي من خريجي الجامعة ص , (Y_i)، واتضح لنا أن العوامل التالية يعتقد أنها تؤثر في هذا الدخل:

١- المرتب الأساسي الذي يتقاضاه من المدرسة كمتغير كمي =م , (X_{1i})

٢-عدد سنوات الخبرة في التدريس كمتغير كمي = س , (X_{2i})

٣- نوع المدرسة التي يدرس فيها (خاصة أم حكومية) كمتغير نوعي = ع , (H_i)

٤- موطن المدرسة التي يعمل بها (حضر أم ريف) كمتغير نوعي = ك ر (D_i)

٥- الجنس (ذكر أم أنثى) كمتغير نوعي = و ر (F_i)

ومما سبق يتضح أن هناك خمس متغيرات تفسيرية يوجد منها متغيرين كميين ، وثلاث متغيرات نوعية . وبناءاً على هذه المعلومات يمكن صياغة معادلة الانحدار التي تمثل هذه العلاقة فيما يلي :

ص ر = أ١ + أ٢ ع٢ +أ٣ ك٢ +أ٤ و٢ + ب١ م ر + ب٢ س ر + ى ر ....(٨-١٠)

$$Y_i = a_1 + a_2 H_2 + a_3 D_2 + a_4 F_2 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + u_i$$

حيث :

ع٢ (H_2) = ١ إذا كان المدرس يعمل بمدرسة خاصة

ع٢ (H_2) = ٠ إذا كان المدرس يعمل بمدرسة حكومية

ك٢ (D_2) = ١ إذا كان المدرس يعمل بمدرسة بالحضر

ك٢ (D_2) = ٠ إذا كان المدرس يعمل بمدرسة بالريف

و٢ (F_2) = ١ إذاكان المدرس ذكراً

و٢ (F_2) = ٠ إذا كان المدرس أنثى

ومن المعلومات السابقة يتضح أن فئة الأساس هي المدرسات اللائي يعملن بمدارس حكومية بالريف . وإذا قمنا بتقدير العلاقة (٨-١٠) من بيانات واقعية واتضح لنا أن هذه العلاقة كانت على النحو التالي :

ص ر = ٢ + ٣ ع٢ + ٥ ك٢ + ٤ و٢ + ٠,٧٥ م ر + ١,٥ س ر + ى ر

(١) (٢) (١,٥) (٠,٠٥) (٠,٥)

فإن هذا يعني أن :

القيمة المتوقعة لدخل الساعة لُمدرّسة تعمل بمدارس حكومية بالريف =

ق(ص ر / م ر، س ر ، ع٢=ك٢=و٢=صفر)= ٢ + ٧٥، م ر + ٥، ١ س ر

القيمة المتوقعة لدخل الساعة لُمدرّس يعمل بمدارس خاصة بالحضر =

ق(ص$_{ر}$ / م$_{ر}$، س$_{ر}$ ، ع$_{٢}$=ك$_{٢}$=و$_{٢}$=١)= ١٤ + ،٧٥ م$_{ر}$ + ١،٥ س$_{ر}$

ومن ثم فإن الفرق بين مستويين الدخل = ١٤- ٢ = ١٢ جنيه في الساعة وهو فرق جوهري، ذلك لأن معلمات المتغيرات النوعية والكمية السابقة معنوية إحصائيا كما يوضح الخطأ المعياري.

ويوضح التقدير السابق أن كل سنة إضافية تزيد دخل المدرس أو المدرسة في الساعة بمقدار ١,٥ جنيه. كما أن زيادة المرتب الأساسي بمقدار جنيه يؤدي لزيادة دخل الساعة بمقدار ٧٥ قرش بعد اقتطاع الضرائب و التأمينات وغيرها .

المبحث الثاني

أهم استخدامات المتغيرات الصورية

يوجد هناك استخدامات عديدة للمتغيرات الصورية نوجز أهمها فيما يلي :

(٨-٢-١) قياس التغير في الميول الحدية .

(٨-٢-٢) قياس التغيرات الهيكلية (انتقال الدالة) .

(٨-٢-٣) قياس أثر التغيرات الموسمية .

(٨-٢-٤) قياس الخط المنكسر .

(٨-٢-٥) مؤشر للمتغيرات الرقمية .

(٨-٢-٦) استخدام بيانات سلسلة قطاعية .

(٨-٢-٧) تقدير دالة الشرائح .

وسوف نتناول هذه الاستخدامات بنوع من التفصيل في هذا المبحث :

(٨-٢-١) قياس التغير في الميول الحدية

لقد أوضحنا في المبحث الأول كيف يؤثر المتغير النوعي على المعلمة التقاطعية لعلاقة انحدار ، ولكن لم نوضح كيف يؤثر على المعلمة الانحدار ية فيجعلها تختلف من علاقة انحدار لأخرى . وحتى نوضح كيف يؤثر المتغير النوعي على الميل الحدي للدالة أو المعلمة الانحدار ية دعنا نأخذ المثال التالي:

افترض أننا بصدد مقارنة دالة الاستهلاك في الريف بنظيرتها في الحضر . فمن الأساليب التي يمكن إتباعها لعمل ذلك هو أن نقوم بأخذ عينة من أسر الريف حجمها $ن_1$ ثم نقدر دالة الاستهلاك منها ، ونقوم بأخذ عينة من أسر الحضر حجمها $ن_2$ ثم نقدر دالة الاستهلاك منها ، فنحصل على دالتي الاستهلاك التاليتين:

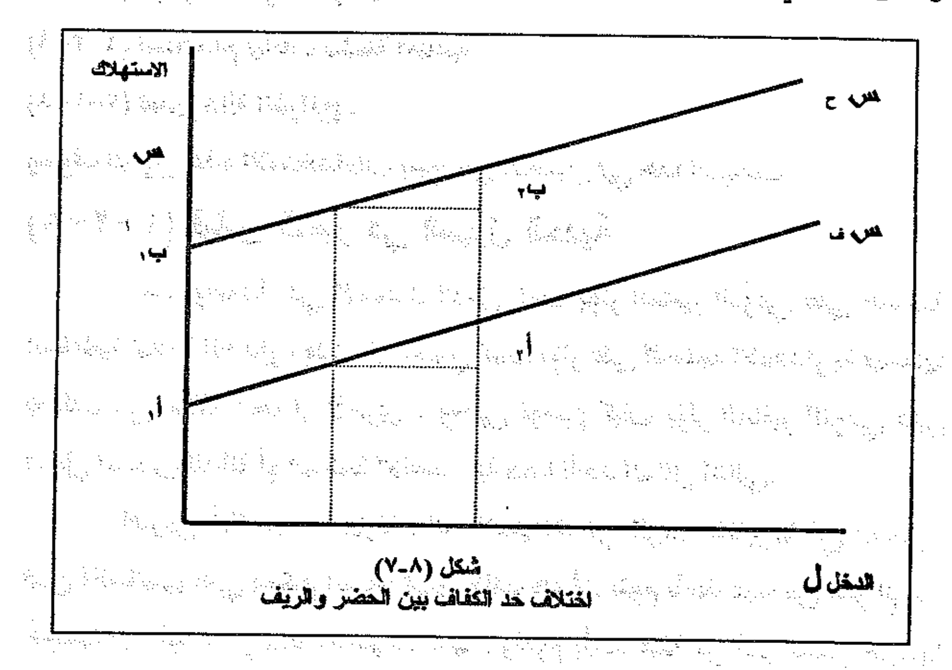
س ر = أ١ + أ٢ ل ف ← $Y_r = a_1 + a_2 X_r$ ....دالة استهلاك الريف .....(٨-١١)
س ح = ب١ + ب٢ ل ح ← $Y_u = b_1 + b_2 X_u$ .... دالة استهلاك الحضر .....(٨-١٢)

حيث س = الإنفاق الاستهلاكي ، ل = الدخل ، ف (r) تشير للريف ، ح (u) تشير للحضر.

وبمقارنة دالتي الاستهلاك (٨-١١) ، (٨-١٢) نجد أن هناك أربع احتمالات ممكنة :

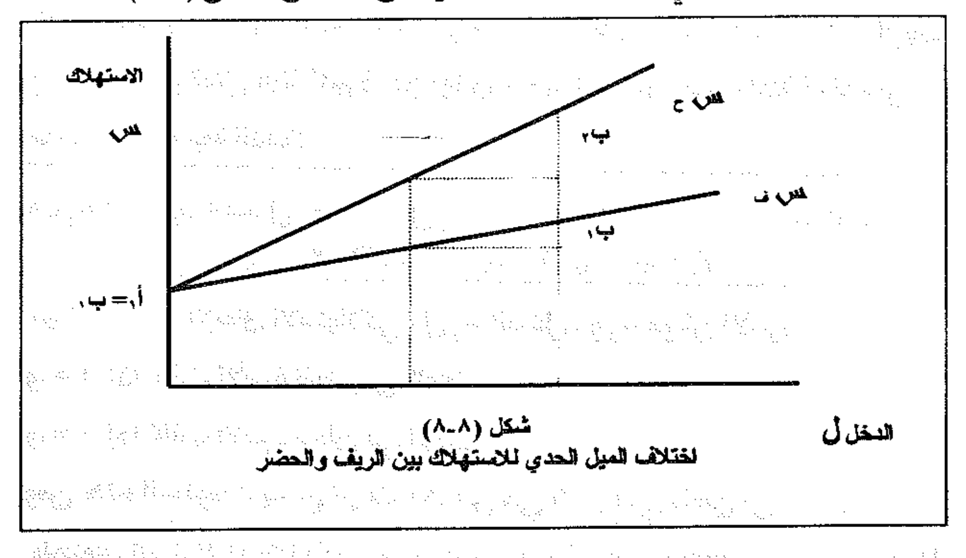
(١) أ١=ب١ ، أ٢ = ب٢ ومن ثم تكون دالتي الاستهلاك متماثلتين تماما .

(٢) أ١≠ ب١ ، أ٢ = ب٢ ومن ثم تكون دالتي الاستهلاك مختلفتين فقط في المعلمة التقاطعية التي تمثل حد الكفاف ، ولكنهما متماثلتين في الميل الحدي للاستهلاك . ويتضح هذا في الشكل (٨-٧) .



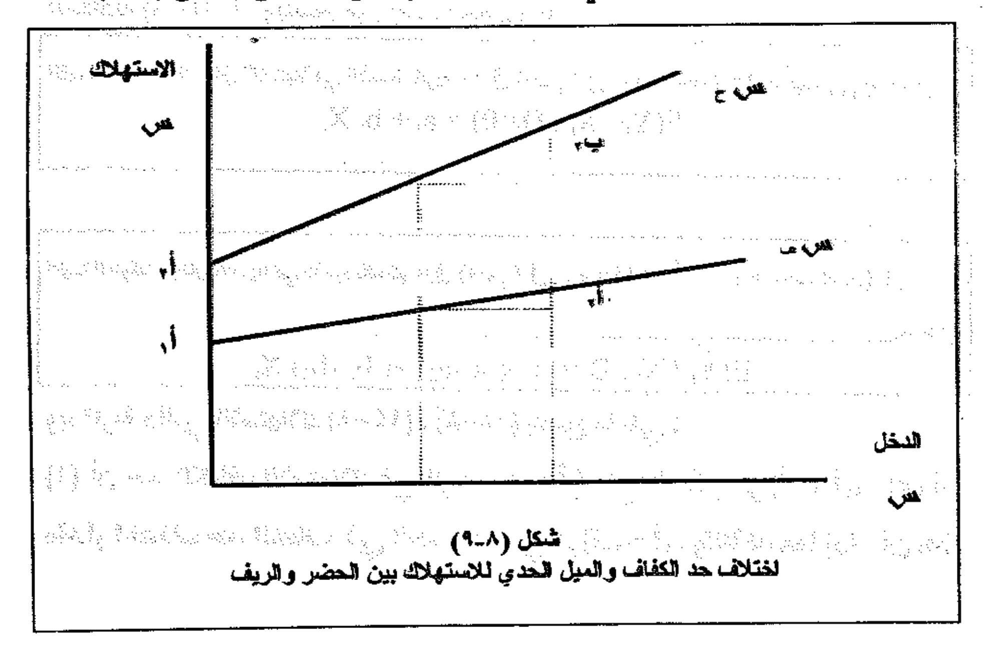
شكل (٨-٧)
اختلاف حد الكفاف بين الحضر والريف

(٣) أ١=ب١ ، أ٢ ≠ ب٢ ومن ثم تكون دالتي الاستهلاك مختلفتين في الميل الحدي للاستهلاك ومتماثلتين في المعلمة التقاطعية . ويتضح هذا من الشكل (٨-٨) .



شكل (٨-٨)
لختلاف الميل الحدي للاستهلاك بين الريف والحضر

(٤) أ١≠ ب١ ، أ٢ ≠ ب٢ أي أن دالتي الاستهلاك مختلفتين في كل من المعلمة التقاطعية والمعلمة الانحدارية التي تمثل الميل ، ويتضح هذا من الشكل (٨-٩).



شكل (٨-٩)
لختلاف حد الكفاف والميل الحدي للاستهلاك بين الحضر والريف

ويساعد استخدام المتغيرات الصورية على اختبار كل الاحتمالات السابقة من خلال تقدير معادلة انحدار واحدة بدلا من تقدير معادلتين ومقارنتهما . وفي هذه الحالة يتم تقدير معادلة انحدار واحدة من كل البيانات المتاحة عن الريف والحضر والتي تمثل عينة كبيرة حجمها ن = ن١ + ن٢ .وتأخذ معادلة الانحدار في هذه الحالة الصيغة التالية:

س ر = أ١+ أ٢ و٢ + ب١ ل ر + ب٢ و٢ ل ر + ع ر ....(٨-١٣)

$$Y_i = a_1 + a_2 D_2 + b_1 X_i + b_2 D_2 X_i + u_i$$

حيث ، س ر = الإنفاق الاستهلاكي ، ل ر = الدخل ، و ر = موطن الأسرة .

و٢ = ١ إذا كانت الأسرة تقطن في الحضر

و٢ = ٠ إذا كانت الأسرة تقطن في الريف

ومن هذه المعلومات يتضح أن فئة الأساس هي الأسر التي تقطن في الريف .

وتحتوي المعادلة (٨-١٣) على متغير مركب Interaction Term "و٢ ل ر" D_2X_i يترتب على وجوده اختلاف ميول الانحدار المختلفة التي يمكن اشتقاقها من المعادلة (٨-١٣) . ويتضح من هذه المعادلة أن :

القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي للأسرة بالريف = ق (س ر / ل ر ، و٢= صفر) = أ١ + ب١ ل ر (٨-١٤)

$$E(Y_i / X_i , D_2=0) = a_1 + b_1 X_i$$

القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي للأسرة بالحضر = ق (س ر / ل ر ، و٢=١) = (أ١ +أ٢) + (ب١+ب٢) ل ر

....(٨-١٥)

$$E(Y_i / X_i , D_2=1) =(a_1+a_2) +(b_1 +b_2) X_i$$

وبمقارنة دالتي الاستهلاك (٨-١٤) ، (٨-١٥) يتضح ما يلي :

(١) أن حد الكفاف للاستهلاك في الريف هو (أ١) وفي الحضر هو (أ١ + أ٢) . أي أن مقدار اختلاف حد الكفاف في الحضر عنه في الريف = أ٢ . وللتأكد مما إذا كان هذا

الاختلاف جوهرياً أم لا يتعين اختبار : فرض العدم : أ٢ = صفر ، في مواجهة الفرض البديل أ٢ > صفر .

(٢) أن الميل الحدي للاستهلاك بالريف = ب١ ، أما في الحضر فهو يساوي (ب١+ب٢) ، ومن ثم فان مقدار الاختلاف في الميل الحدي للاستهلاك = ب٢ . ولاختبار ما إذا كان هذا الاختلاف جوهريا أم لا ، نختبر : فرض العدم : ب٢ = صفر ، في مواجهة الفرض البديل : ب٢ > صفر .

(٣) أن صياغة معادلة الانحدار على النحو الموضح بالصيغة (٨-١٣) يتضمن افتراض مؤداه أن دالة الاستهلاك في الحضر تختلف عنها في الريف في كل من المعلمتين التقاطعية والانحدارية . أما إذا افترضنا أن الدالتين مختلفتين في المعلمة الانحدارية فقط ومتماثلتين في المعلمة التقاطعية فإن معادلة الانحدار تأخذ الصيغة التالية :

س ر = أ١+ ب١ ل ر + ب٢ و٢ ل ر + ع ر ....(٨-١٦)

$$Y_i = a_1 + b_1 X_i + b_2 D_2 X_i + u_i$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن :

القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي بالريف = ق(س ر / ل ر ، و٢= صفر)= أ١ +ب١ ل ر

$$E(Y_i / X_i, D_2 = 0) = a_1 + b_1 X_i$$

القيمة المتوقعة للانفاق الاستهلاكي بالحضر = ق(س ر / ل ر ، و٢= ١)= أ١ + (ب١ +ب٢) ل ر

$$E(Y_i / X_i, D_2 = 1) = a_1 + (b_1 + b_2) X_i$$

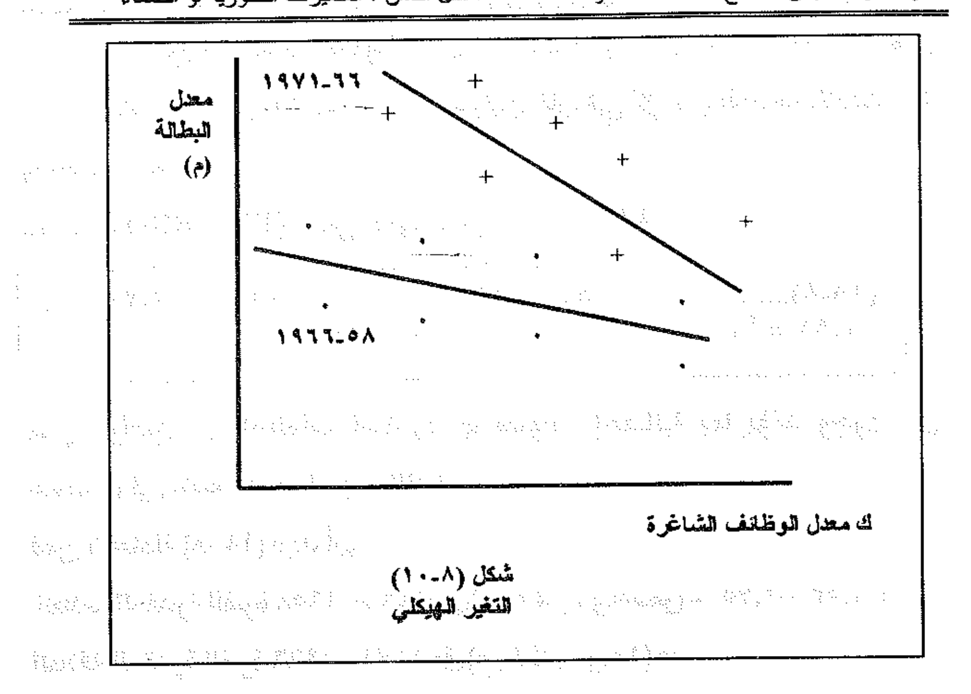
ومن ثم فان الاختلاف في هذه الحالة يكون فقط في المعلمة الانحدار ية ومقداره "ب٢" . ويلاحظ عموماً أن من أهم مزايا استخدام المتغيرات الصورية أنها تمكننا من تقدير أكثر من معادلة واحدة . ولاشك أن نتائج المعادلة (٨-١٣) سوف تكون هي نفسها نتائج المعادلتين (٨-١١) ، (٨-١٢) .

(٨-٢-٢) قياس التغيرات الهيكلية:

إذا أردنا تقدير دالة انحدار من بيانات سلسلة زمنية تخص فترة زمنية طويلة نسبيا تمتد مثلا من ١٩٠٠ إلى ١٩٩٥ ، فان استخدام المتغيرات التفسيرية الكمية فقط لتقدير هذه الدالة لا يعطي صورة حقيقية لسلوك الظاهرة محل البحث خلال هذه

الفترة . ففي الفترات الزمنية الطويلة تحدث هناك تغيرات جوهرية نتيجة لبعض الأحداث الكبيرة مثل الحرب العالمية الأولى أو الثانية أو الكساد الكبير عام ١٩٢٩ أو قيام الثورات أو قدوم السلام . ولاشك أن مثل هذه الأحداث الكبيرة تقسم التاريخ إلى مراحل وتجعل سلوك الظواهر مختلفاً في كل مرحلة من هذه المراحل . ومن ثم يصبح من الضروري تقدير معادلة انحدار مستقلة لكل مرحلة لاختلاف طبيعة الظاهرة بينها . ولكن يلاحظ في هذه الحالة أن استخدام المتغيرات الصورية يساعدنا على تقدير معادلة انحدار واحدة لكل المراحل ويمكننا من اشتقاق معادلة مستقلة لكل مرحلة مع تحديد وجه الاختلاف في سلوك الظاهرة عبر الفترات .

ومن الأمثلة على ذلك ما قام به الاقتصادي Damodar Gujarati في دراسته للعلاقة بين معدل البطالة ومعدل الوظائف الشاغرة في بريطانيا خلال فترة طويلة نسبيا ١٩٥٨-١٩٧١ . فمن خلال رسم شكل الانتشار الخاص بالعلاقة بين هذين المتغيرين اتضح للمؤلف أن تغيراً هيكلياً أو جذرياً حدث في هذه العلاقة منذ ١٩٦٦ كما يوضح الشكل (٨-١٠) . حيث من الواضح بالشكل أن الخط الممثل للعلاقة بين المتغيرين قد انتقل لأعلى بعد عام ١٩٦٦ وأصبح مختلفا في شكله خلال الفترة ١٩٦٦-١٩٩٧١ ، وذلك من حيث كل من المعلمتين التقاطعية و الانحدار ية . ويلاحظ أن اختلاف شكل العلاقة على هذا النحو يعني أنه لكل معدل وظائف شاغرة أصبح هناك مستوى أعلى للبطالة . وبمعنى آخر لكل وظيفة شاغرة أصبح هناك عدد أكبر من المتعطلين .



شكل (٨-١٠)
التغير الهيكلي

وبالبحث في أسباب هذه الظاهرة اتضح للمؤلف أن حكومة العمال ببريطانيا قد عدلت قانون التأمينات عام ١٩٦٦ بما يتيح مزايا أكثر للعمال الذين يعانون من بطالة ، الأمر الذي شجع العمال العاطلين على قضاء وقت أطول في البحث عن وظيفة جديدة مع التحرر من ضغط الحاجة .

ولتقدير معادلة الانحدار الممثلة لهذه العلاقة خلال كل الفترة ١٩٥٨ -١٩٧١ استخدم المؤلف الصيغة التالية :

م ر = أ١ + أ٢ و٢ + ب١ ك ر + ب٢ و٢ ك ر + ع ر ....(٨-١٧)

$$Y_i = a_1 + a_2 D_2 + b_1 X_i + b_2 D_2 X_i + u_i$$

حيث : م ر (Y_i) = معدل البطالة ٪ ، ك ر (X_i) = معدل الوظائف الشاغرة ٪

و٢ (D_2) = ١ للفترة من أكتوبر ١٩٦٦-١٩٧١

و٢ (D_2) = ٠ للفترة من أكتوبر ١٩٥٨-سبتمبر ١٩٦٦

ويتضح من هذه المعلومات أن الباحث اعتبر الفترة ١٩٥٨ -١٩٦٦ هي فترة الأساس . كما أن الاختلاف بين الفترتين كان في كل من المعلمة الانحدار ية والمعلمة التقاطعية .

وبتقديره للعلاقة (٨-١٧) حصل المؤلف على الصيغة التالية :

م ر = ٢,٧٥ + ١,١٥ و٢ – ١,٥٣ ك ر – ٠,٨٥ و٢ك ر + د ر ....(٨-١٨)
(٠,٣٢) (٠,١٢) (٠,٤٢) ر٢ = ٠,٩١

ومن الواضح أن المعلمات المقدرة لها معنوية إحصائية بما يؤكد وجود فرق جوهري في علاقة الانحدار بين الفترتين .

فمن المعادلة (٨-١٨) نجد أن :

العلاقة المقدرة للفترة ١٩٥٨ -١٩٦٦=ق(م ر / ك ر ، و٢=صفر) = ٢,٧٥- ١,٥٣ ك ر

العلاقة المقدرة للفترة ١٩٦٦ -١٩٧١=ق(م ر / ك ر ، و٢=١) =
(٢,٧٥ + ١,١٥)-(١,٥٣ +٠,٨٥) ك ر = ٣,٩ - ٢,٣٨ ك ر

كما يوجد اختلاف جوهري في المعلمة التقاطعية بالمقدار أ٢= ١,١٥، وآخر في المعلمة الانحدار ية بالمقدار ب٢ = ٠,٨٥ بين علاقتي الفترتين .

(٨-٢-٣) قياس أثر التقلبات الموسمية :

تعتبر التقلبات الموسمية من بين العوامل التي تؤثر في الظواهر الاقتصادية بجانب العوامل الأخرى . فيلاحظ أن الموجة الباردة في فصل الشتاء تزيد من الطلب على البلوفرات الصوفية والملابس الثقيلة بوجه عام ، كما أن الموجة الحارة في فصل الصيف تقلل من الطلب على هذا النوع من الملابس . و يلاحظ أيضا أن الموجة الحارة بفصل الصيف تزيد من الطلب على الثلج والآيس كريم والمشروبات الباردة بمختلف أنواعها، في حين أن الموجه الباردة بفصل الشتاء تقلل من الطلب على هذه المنتجات. وفي المواسم والأعياد يزداد الطلب على الحلوى والهدايا بصورة ملحوظة بالمقارنة مع الأوقات الأخرى من السنة . ومن الممكن قياس أثر

التقلبات الموسمية على المتغيرات الاقتصادية باستخدام المتغيرات الصورية . ويلاحظ في هذا الصدد أن التقلبات الموسمية قد تؤثر على المعلمة التقاطعية لعلاقة الانحدار فقط ، أو قد تؤثر على المعلمة الانحدار ية فقط ، أو قد تؤثر على كليهما معا.

(١) تأثير التقلبات الموسمية على المعلمة التقاطعية

إذا افترضنا أن مستوى الأرباح للشركات الصناعية (ح ر) Y_i يتأثر بعاملين هما : حجم المبيعات ربع السنوية (ك ر) X_i ، والتقلبات الموسمية (و ر) D_i ، وأن هذه التقلبات الموسمية تحدث عبر أربعة فصول بالعام هي :الربيع (و١) D_1 ، الصيف (و٢) D_2، والخريف (و٣) D_3 ، الشتاء (و٤) D_4 ، فمن الممكن صياغة دالة الانحدار الممثلة لهذه العلاقة كما يلي :

ح ر = أ١ + أ٢و٢ + أ٣ و٣ +أ٤ و٤ + ب١ ك ر +ع ر ....(٨-١٩)

$$Y_i = a_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + b_1 X_i + u_i$$

حيث : و٢ (D_2) = ١ في فصل الصيف ، و٢ (D_2) = ٠ في أي فصل آخر .

و٣ (D_3) = ١ في فصل الخريف ، و٣ (D_3) = ٠ في أي فصل آخر

و٤ (D_4) = ١ في فصل الشتاء ، و٤ (D_4) = ١ في أي فصل آخر

ومن الواضح أن الفصول الأربعة مانعة بالتبادل . فوجودنا في فصل الصيف يمنع من وجودنا في أي فصل آخر، ولذا نعطي في هذه الحالة فصل الصيف قيمة ١ ، والفصول الأخرى القيمة صفر ، وهكذا . ويلاحظ هنا أن فصل الأساس هو فصل الربيع ولذا فان المعلمة التقاطعية أ١ تخصه. فالمعلمة أ١ تشير إلى مستوى الأرباح عندما و٢ = و٣=و٤ = صفر ، وذلك لا يكون إلا في فصل الربيع .

ومن المعادلة (٨-١٩) يمكن اشتقاق معادلات الانحدار الخاصة بالأرباح في الفصول الأربعة كما يلي :

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الربيع = ق (ح ر / ك ر ، و٢=و٣=و٤=صفر) = أ١+ب١ ك ر

$$E(Y_i / X_i, D_2=D_3=D_4=0) = a_1 + b_1X_i$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الصيف = ق (ح ر / ك ر ، و٢=١ ،و٣=و٤=صفر)= (أ١ +أ٢)+ب١ ك ر

$$E(Y_i / X_i, D_2=1, D_3=D_4=0) = (a_1+a_2) + b_1X_i$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الخريف = ق (ح ر / ك ر ، و٣=١ ، و٢=و٤=صفر) = (أ١ +أ٣)+ب١ ك ر

$$E(Y_i / X_i, D_3=1, D_2=D_4=0) = (a_1+a_3) + b_1X_i$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الشتاء = ق (ح ر / ك ر ، و٤=١ ، و٢=و٣=صفر) = (أ١ +أ٤)+ب١ ك ر

$$E(Y_i / X_i, D_4=1, D_2=D_3=0) = (a_1+a_4) + b_1X_i$$

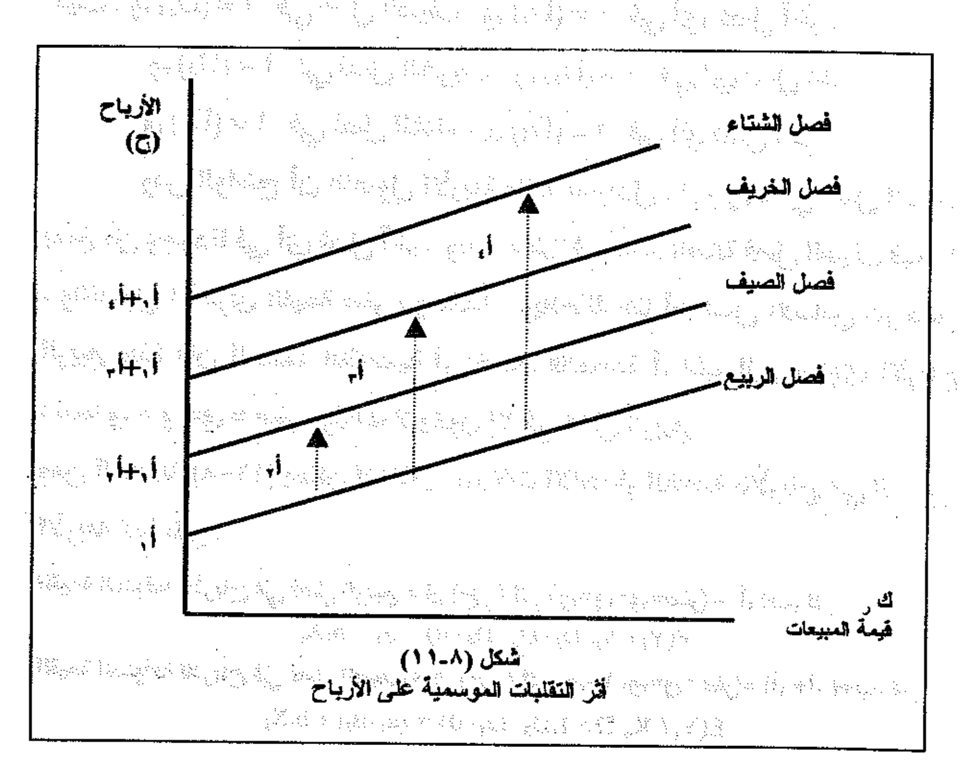
وهكذا فإن :

أ٢(a_2) = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الصيف وفصل الربيع

أ٣(a_3) = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الخريف وفصل الربيع

أ٤(a_4) = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الشتاء وفصل الربيع

ويمكن اختبار ما إذا كانت هذه الفروق جوهرية أم لا من خلال اختبار فروض العدم التالية : أ٢ = صفر ، أ٣ = صفر ، أ٤ = صفر ، في مواجـهة الفروض البديلة : أ٢ > صفر ، أ٣ > صفر ، أ٤ > صفر . ويوضح الشكل (٨-١١) معادلات الانحدار السابقة .



شكل (٨-١١)
أثر التقلبات الموسمية على الأرباح

ولقد أجريت هناك دراسة عن الأرباح الصناعية في الولايات المتحدة الأمريكية خلال الفترة ١٩٦٥– ١٩٧٠ وكانت نتيجة هذه الدراسة كما يلي :

ح$_{ر}$ = ٦٦٨٨ + ١٣٢٣ و$_{٢}$ – ٢١٨ و$_{٣}$ + ١٨٤ و$_{٤}$ + ٠,٠٣٨ ك$_{ر}$
(٦٣٨,٤٨)　(٦٣٢,٢٦) (٦٥٤,٢٩) (٠,٠١١)

ويتضح من هذه النتيجة أن الفرق بين أرباح الربع الثالث والربع الرابع من ناحية وأرباح الربع الأول من ناحية أخرى غير جوهري حيث أن :

$\hat{أ}_{٣}$ / ٢ = ٢١٨ ÷ ٢ = ١٠٩ < ع$_{أ٣}$ (٦٣٢,٢٦) ، وكذلك :

$\hat{أ}_{٤}$ / ٢ = ١٨٤ ÷ ٢ = ٩٢ < ع$_{أ٤}$ (٦٥٤,٢٩)

أما عن الفرق بين أرباح الربع الثاني وأرباح الربع الأول المتمثل في $\hat{أ}_{٢}$ فإنه جوهري ، حيث أن له معنوية إحصائيا . وكذلك الأمر بالنسبة للمعلمة $\hat{ب}_{١}$ الخاصة بحجم المبيعات فهي معنوية إحصائيا .

ونشتق من المعادلة السابقة ما يلي :

القيمة المتوقعة للأرباح في الربع الثاني = ق (ح$_{ر}$ / ك$_{ر}$ ، و$_{٢}$=١ ، و$_{٣}$=و$_{٤}$=صفر)=

ح$_{٢}$ = (٦٦٨٨+١٣٢٣) + ٠,٠٣٨ ك$_{ر}$ = ٨٠١١ + ٠,٠٣٨ ك$_{ر}$

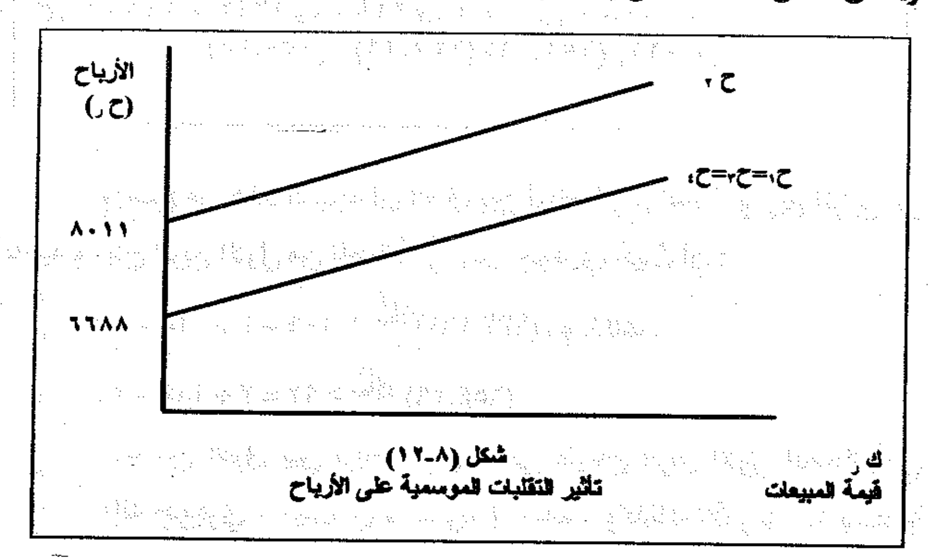
ولعل هذا يعني أن مستوى الأرباح في الربع الثاني يفوق مستوى الأرباح في الربع الأول بمقدار = أ$_{٢}$ = ١٣٢٣ مليون دولار . كما أن زيادة المبيعات بما قيمته ١ دولار يترتب عليها زيادة في مستوى الربح بمقدار ٤ سنت فقط تقريبا .

أما عن القيمة المتوقعة للأرباح في الربعين الثالث والرابع فإنها لا تختلف جوهريا عن القيمة المتوقعة للأرباح في الربع الأول . ولذلك يمكن تمثيلها جميعا بمعادلة واحدة تتمثل في :

القيمة المتوقعة للأرباح في الربع الأول أو الثالث أو الرابع = ق (ح$_{ر}$ / ك$_{ر}$ ، و$_{٢}$= و$_{٣}$ =و$_{٤}$=صفر)=

ح ١، ٣، ٤ = ٦٦٨٨ + ٠,٠٣٨ ك ر

ويمكن تمثيل ذلك بالشكل (٨-١٢) .



شكل (٨-١٢)
تأثير التقلبات الموسمية على الأرباح

(٢) تأثير التقلبات الموسمية على المعلمة الانحدارية

إذا افترضنا أن التقلبات الموسمية تؤثر على الميول الحدية ، أي على المعلمات الانحدارية فقط ، فان معادلة الانحدار التي تصف العلاقة بين الأرباح من ناحية والتقلبات الموسمية وحجم المبيعات من ناحية أخرى تأخذ الصيغة التالية :

ح ر = أ١ + ب١ ك ر +ب٢ ك ر و٢ + ب٣ ك ر و٣ + ب٤ ك ر و٤ + ع ....(٨-٢٠)

$$Y_i = a_1 + b_1X_i + b_2D_2X_i + b_3D_3X_i + b_4D_4X_i + u_i$$

وبافتراض أن فصل الربيع هو فصل الأساس نجد أن :

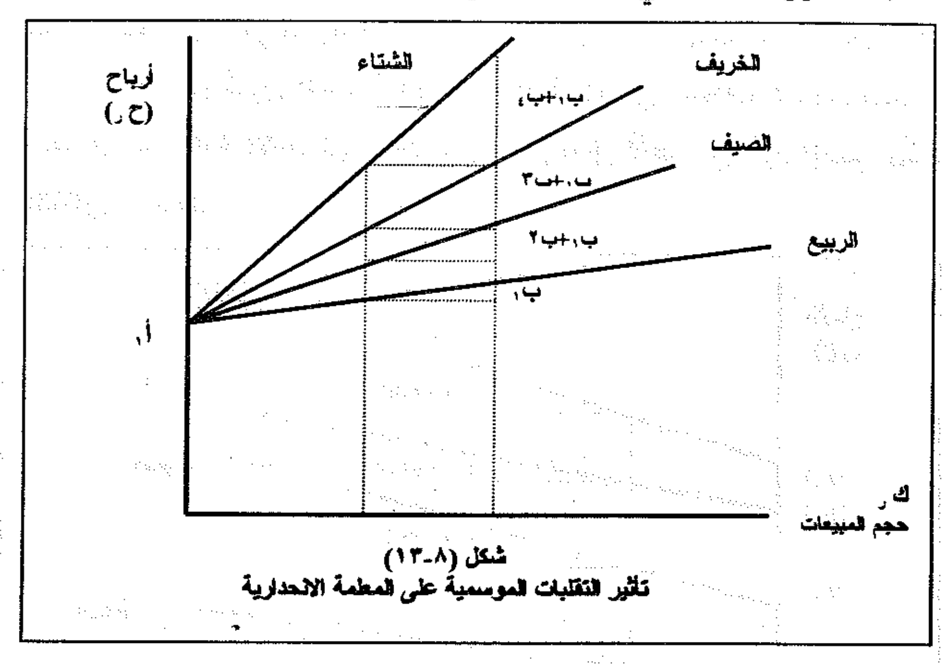
القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الربيع = ح١ = أ١ + ب١ ك ر ← $Y_1 = a_1 + b_1X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الصيف =ح٢= أ١ + (ب١ +ب٢) ك ر ← $Y_2 = a_1 + (b_1+b_2)X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الخريف =ح٣ = أ١ +(ب١ +ب٣) ك ر ← $Y_3 = a_1 + (b_1+b_3)X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الشتاء =ح٤ = أ١ + (ب١ +ب٤) ك ر ← $Y_4 = a_1 + (b_1+b_4)X_i$

ومن ثم فإن التقلبات الموسمية تؤثر فقط على المعلمات الانحدارية الخاصة بالفصول المختلفة دون المعلمة التقاطعية . ويمكن توضيح الاختلاف بين دوال الأرباح بالنسبة للفصول المختلفة في هذه الحالة من الشكل (٨-١٣).



شكل (٨-١٣)
تأثير التقلبات الموسمية على المعلمة الانحدارية

(٣) تأثير التقلبات الموسمية على المعلمتين التقاطعية و الانحدارية معا

إذا افترضنا أن التقلبات الموسمية تؤثر ليس فقط على مستوى الربح فتجعله في فصل مختلفاً عنه في فصل آخر ، ولكن أيضا على معدل الزيادة فيه فتجعله ينمو في فصل بمعدل مختلف عنه في فصل آخر ، فإن معادلة الانحدار التي تصف العلاقة بين الربح وحجم المبيعات في ظل هذه الظروف تأخذ الصيغة التالية :

ح ر = أ١ +أ٢و٢ +أ٣و٣ +أ٤ و٤ + ب١ ك ر +ب٢ ك ر و٢ + ب٣ ك ر و٣ +ب٤ ك ر و٤ + ع (٨-٢١)

$$Y_i = a_1+a_2D_2 +a_3D_3+a_4D_4+ b_1X_i + b_2D_2X_i+ b_3D_3X_i+b_4D_4X_i+u_i$$

ومن المعادلة (٨-٢١) نجد أن :

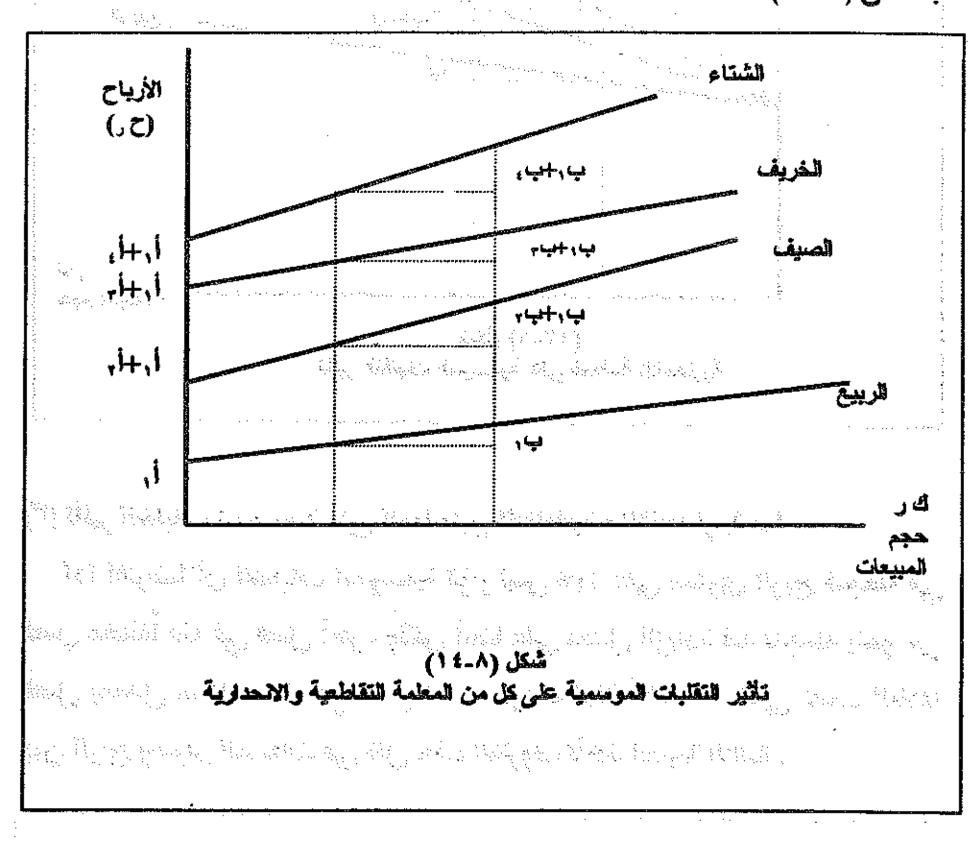
القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الربيع = أ١ + ب١ ك ر ← $Y_i = a_1 + b_1 X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الصيف= (أ١ +أ٢)+ (ب١+ب٢) ك ر ← $Y_i = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الخريف= (أ١ +أ٣)+ (ب١+ب٣) ك ر ← $Y_i = (a_1+a_3) + (b_1+b_3)X_i$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الشتاء= (أ١ +أ٤)+ (ب١+ب٤) ك ر ← $Y_i = (a_1+a_4) + (b_1+b_4)X_i$

ومن ثم تكون التقلبات الموسمية قد أدت إلى اختلاف كل من المعلمة التقاطعية والمعلمة الانحدارية لدالة الربح من فصل لآخر . ويمكن توضيح ذلك بالشكل (٨-١٤).



شكل (٨-١٤)
تأثير التقلبات الموسمية على كل من المعلمة التقاطعية والانحدارية

(٤) تقدير المسار الزمني لدالة المبيعات الموسمية

يمكن استخدام المتغيرات الصورية في التعبير عن المسار الزمني للمبيعات الموسمية . وتتم التفرقة هنا بين صيغتين في هذا الصدد : الصيغة الجمعية Additive Form والصيغة الضربية Multiplicative Form . وفيما يتعلق بالصيغة الجمعية فهي تتمثل في :

ص ز = أ١ + أ٢ و٢ + أ٣ و٣ + أ٤ و٤ +ى ز ....(٨-٢٢)

$$Y_t = a_1 + a_2D_2 + a_3D_3 + a_4D_4 + u_t$$

حيث : ص ز (Y_t) = المبيعات في الفترة "ز"

و٢(D_2)=١ في فصل الصيف ، = صفر في الفصول الأخرى

و٣ (D_3)=١ في فصل الخريف ، = صفر في الفصول الأخرى

و٤(D_4)=١ في فصل الشتاء ، = صفر في الفصول الأخرى

وبالتالي فان فصل الربيع يكون هو نقطة الأساس .

مثال (٨-٣)

المسار الزمني للمبيعات وفقا للصيغة الجمعية

إذا تم تقدير الصيغة (٨-٢٢) من بيانات ربع سنوية فجاءت على النحو الموضح في المعادلة (٨-٢٣) :

ص ز = ٧٥ + ١٠ و٢ + ٢٥ و٣ + ١٥ و٤ + ى ز ....(٨-٢٣)

قدر القيمة المتوقعة للمبيعات في فصول السنة وارسم الدالة الممثلة للمسار الزمني لها .

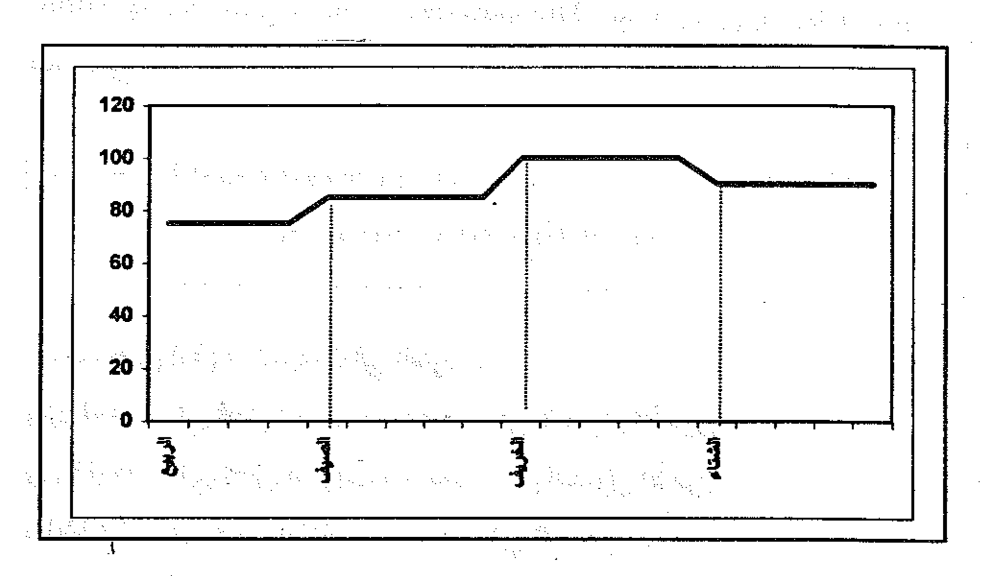
القيمة المتوقعة للمبيعات في فصل الربيع = ق(ص ز / و٢=و٣=و٤=صفر) =٧٥

القيمة المتوقعة للمبيعات في فصل الصيف = ق(ص$_{ز}$ / و$_{٢}$=١ ، و$_{٣}$=و$_{٤}$=صفر) =٧٥ + ١٠ =٨٥

القيمة المتوقعة للمبيعات في فصل الخريف = ق(ص$_{ز}$ / و$_{٣}$=١ ، و$_{٢}$=و$_{٤}$=صفر) =٧٥ + ٢٥ =١٠٠

القيمة المتوقعة للمبيعات في فصل الشتاء = ق(ص$_{ز}$ / و$_{٤}$=١ ، و$_{٢}$=و$_{٣}$=صفر) =٧٥ + ١٥ =٩٠

ويوضح الشكل (٨–١٥) المسار الزمني للمبيعات وفقا للصيغة الجمعية .



شكل (٨–١٥)

المسار الزمني للمبيعات وفقا للصيغة الجمعية

أما عن الصيغة الضربية فتتمثل في المعادلة (٨–٢٤) :

ص ز = أ$_{١}$ هـ$^{(م ز + أ٢ و٢ + أ٣ و٣ + أ٤ و٤ + ع ز)}$ .... (٨-٢٤)

$$Y_t = A_1 e^{(\lambda t + a2\,D2 + a3\,D3 + a4\,D4 + ut)}$$

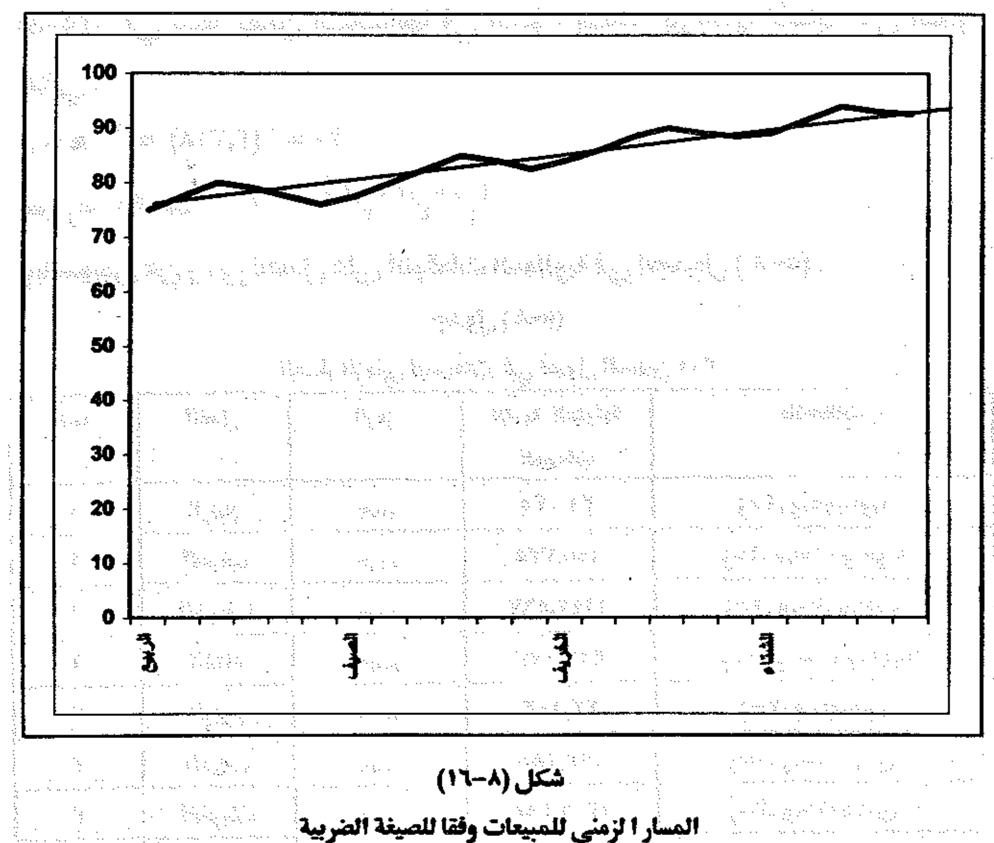
حيث هـ (e) = أساس اللوغاريتم الطبيعي ، ز (t) = الزمن ، م (λ) = معدل نمو المبيعات عبر الزمن . ص ز (Y_t) = المبيعات في الفترة ز .

ولتقدير المسار الزمني للمبيعات باستخدام الصيغة (٨-٢٤) يتعين تحويلها لصيغة لوغاريتمية على النحو التالي :

لو ص ز = أ*١ + م ز + أ٢ و٢ + أ٣ و٣ + أ٤ و٤ + ع ز ....(٨-٢٥)

$$\text{Ln } Y_t = A_1 + \lambda\, t + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + u_t$$

ويعبر الشكل (٨-١٦) عن الصيغة (٨-٢٤).



شكل (٨-١٦)

المسار الزمني للمبيعات وفقا للصيغة الضربية

مثال (٨-٤)

المسار الزمنى للمبيعات وفقا للصيغة الضربية

إذا جاء تقدير المسار الزمني للمبيعات على النحو الموضح بالمعادلة (٨-٢٦) المقدر باستخدام بيانات ربع سنوية ، قدر المبيعات المتوقعة في الفصول المختلفة للسنتين أرقام ١ ، ٢ .

$$\text{لو}\,\text{ص}_{\text{ز}} = ٣ + ٠,٠٥\,\text{ز} + ٢\,\text{و}_{٢} + ٤\,\text{و}_{٣} + ٣\,\text{و}_{٤} + \text{د}_{\text{ز}} \qquad (٨\text{-}٢٦)$$

لتقدير المبيعات المتوقعة في الفصول المختلفة للسنتين ١ ، ٢ نقوم أولا بإعداد المعادلة (٨-٢٥) في صيغة يمكن استخدامها في التنبؤ ، وذلك بإرجاعها لأصلها على النحو التالي:

$$\text{أ}_{١} = \text{هـ}^{٣} = (٢,٧١٨)^{٣} = ٢٠$$

$$\text{ص}_{\text{ز}} = ٢٠\ \text{هـ}^{(٠,٠٥\text{ز} + ٢\text{و}_{٢} + ٤\text{و}_{٣} + ٣\text{و}_{٤} + \text{د}_{\text{ز}})}$$

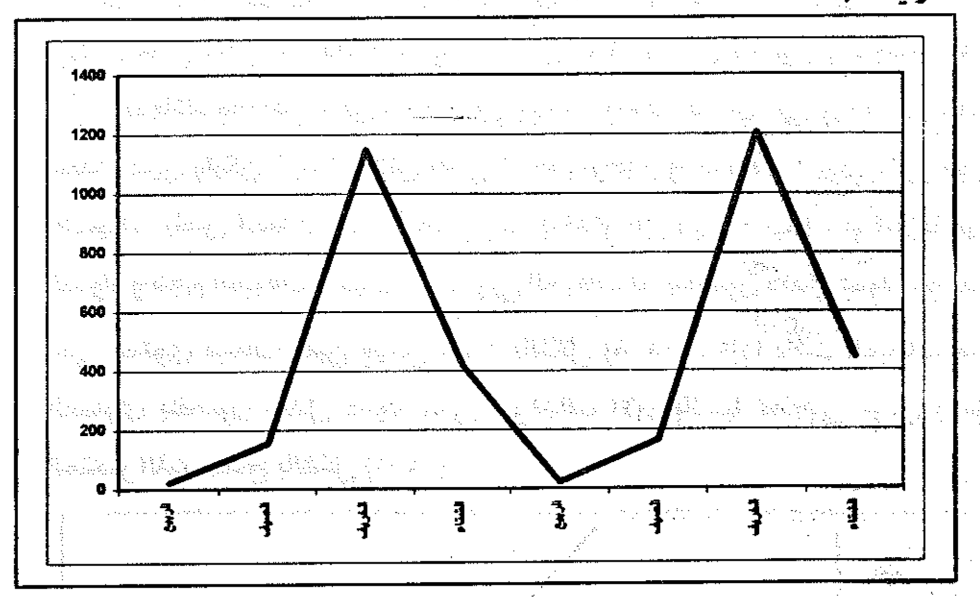
وبالتعويض عن ز ، و$_{\text{ز}}$ نحصل على التوقعات المطلوبة في الجدول (٨-٥) .

جدول (٨-٥)

المسار الزمني للمبيعات في فصول السنتين ١ ، ٢

السنة	الفصل	الرمز	القيمة المتوقعة للمبيعات	ملاحظات
١	الربيع	$\text{ص}_{١١}$	٢١,٠٢٥	ز=١، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٣}=\text{و}_{٤}=٠$
١	الصيف	$\text{ص}_{٢١}$	١٥٥,٣٢٥	ز=١، $\text{و}_{٢}=١$ ، $\text{و}_{٣}=\text{و}_{٤}=٠$
١	الخريف	$\text{ص}_{٣١}$	١١٤٧,٤٦٧	ز=١، $\text{و}_{٣}=١$، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٤}=٠$
١	الشتاء	$\text{ص}_{٤١}$	٤٢٢,١٧٣	ز=١، $\text{و}_{٤}=٠$ ، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٣}=٠$
٢	الربيع	$\text{ص}_{١٢}$	٢٢,١٠٣	ز=٢، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٣}=\text{و}_{٤}=٠$
٢	الصيف	$\text{ص}_{٢٢}$	١٦٣,٢٨٨	ز=٢، $\text{و}_{٢}=١$، $\text{و}_{٣}=\text{و}_{٤}=٠$
٢	الخريف	$\text{ص}_{٣٢}$	١٢٠٦,٢٩٣	ز=٢، $\text{و}_{٣}=١$، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٤}=٠$
٢	الشتاء	$\text{ص}_{٤٢}$	٤٤٣,٨١٦	ز=٢، $\text{و}_{٤}=١$، $\text{و}_{٢}=\text{و}_{٣}=٠$

ويعبر الشكل (٨–١٧) عن الجدول (٨–٥) . ووفقا للصيغة (٨–٢٦) يبلغ معدل النمو السنوي للمبيعات ٥ ٪ .

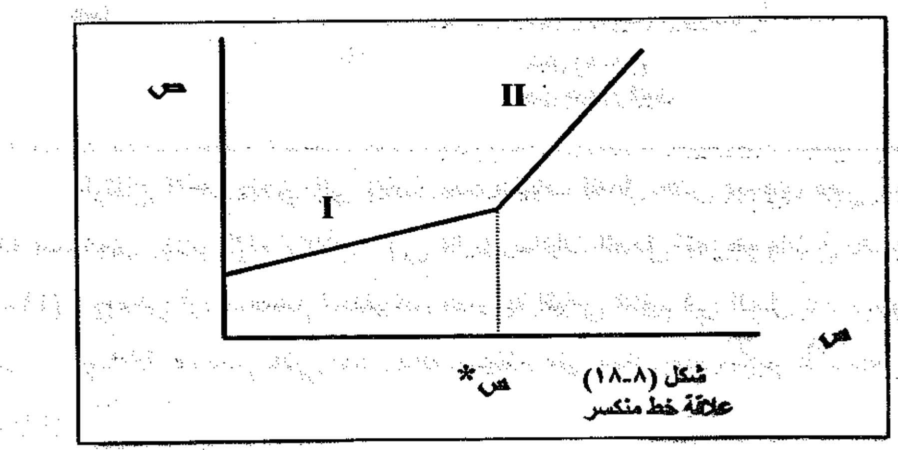


شكل (٨–١٧)

المسار الزمني للمبيعات وفقا للصيغة الضربية

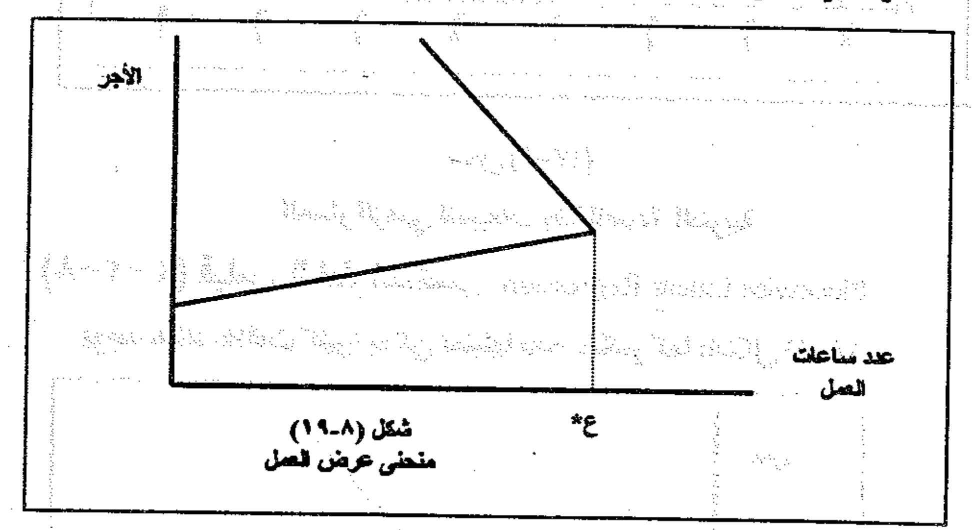
(٨–٢–٤) قياس الخط المنكسر Piecewise Linear Regression

يوجد هناك علاقات كثيرة يمكن تمثيلها بخط منكسر كما بالشكل (٨–١٨) .



شكل (٨-١٨)
علاقة خط منكسر

وتشير مثل هذه العلاقات إلى أن المتغير التابع أكثر مرونة في الاتجاه الصعودي منه في الاتجاه النزو لي ، أو أنه يزداد بمعدل منخفض حتى يصل لمستوى معين ، ثم يزداد بمعدل أعلى بعد هذا المستوى . ومن الحالات التي قد توصف بذلك العلاقة بين الاستهلاك والدخل . فزيادة الدخل بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الاستهلاك بمقدار معين وليكن "ب١ "، ولكن نقص الدخل بوحدة واحدة قد لا يؤدي إلى نقص الاستهلاك بنفس المقدار "ب١ " ولكن ربما بمقدار أقل (ب١ – ب٢) . أو العلاقة بين العمولة وحجم المبيعات ، حيث أن مسئولي المبيعات قد يتقاضون معدل عمولة منخفض حتى مستوى مبيعات معين وليكن س * بالشكل (٨–١٨) ، فإذا فاقت المبيعات هذا المستوى يتقاضون معدل عمولة أعلى . وكذلك الأمر بالنسبة لمنحنى عرض العمل المنكسر الذي يتضح بالشكل (٨–١٩) .



شكل (٨-١٩)
منحنى عرض العمل

فارتفاع الأجر يؤدي إلى زيادة عدد ساعات العمل حتى مستوى معين وبعد هذا المستوى يؤدي ارتفاع الأجر إلى تقليل ساعات العمل كما هو واضح بالشكل (٨–١٩) . ويمكن أن نستخدم المتغيرات الصورية لقياس التغير في الميل بعد مستوى معين . وعلاقة الانحدار التي تصف دالة استهلاك على شكل خط منكسر تأخذ الصيغة (٨–٢٧) .

ص ر = أ١ + ب١ س ر + ب٢ س ر و٢ + ع ر ....(٨-٢٧)

$$Y_i = a_1 + b_1 X_i + b_2 X_i D_2 + u_i$$

حيث : ص ر (Y_i) = الإنفاق الاستهلاكي ، س ر (X_i) = الدخل .

و٢ (D_2) = ١ إذا كانت س ر ≤ س *

و٢ (D_2) = صفر إذا كانت س ر > س *

س * = قيمة محددة ومعلومة .

ومن ثم فان دالة الاستهلاك للمقطع I بالشكل (٨-١٨) تأخذ الصيغة التالية :

ص ر = أ١ + ب١ س ر

وللمقطع II تأخذ الصيغة التالية :

ص ر = أ١ + (ب١ + ب٢) س ر .

وهذا يعني أن ب٢ تشير إلى التغير في الميل الحدي للاستهلاك بعد مستوى الدخل س*. ومن ثم يمكن القول أن زيادة الدخل تؤدي إلى زيادة الاستهلاك وفقا للميل الحدي للاستهلاك (ب١ + ب٢) ، ونقص الدخل يؤدي إلى نقص الاستهلاك وفقا للميل الحدي للاستهلاك (ب١) . وللتأكد مما إذا كان التغير في الميل الحدي جوهريا أم غير جوهري نختبر الفرض : ب٢ = صفر ، في مواجهة الفرض البديل ب٢ > صفر .

(٨-٢-٥) مؤشر للمتغيرات الرقمية :

من الممكن استخدام المتغيرات الصورية كمؤشر لبعض المتغيرات الرقمية وذلك في الحالات التي لا تتاح فيها بيانات كافية عن هذه المتغيرات ، أو في الحالات التي يكون من الملائم فيها عمل ذلك . فإذا أردنا تقدير دالة الادخار من بيانات قطاعية لعدد من الأفراد ، فإن العمر يعتبر أحد المتغيرات التفسيرية التي تؤثر في الادخار . ومن المعتقد أنه كلما كبر سن الفرد كلما زادت حكمته وبالتالي زادت مقدرته على الادخار . وبالرغم من أن السن يعتبر متغير كمي إلا أنه من الملائم استخدام متغير صوري كمؤشر

له ، ذلك لأن اختلاف السن بعام أو عامين قد لا يكون ذو تأثير كبير في اتخاذ قرارات الادخار ، وإنما الاختلافات الكبيرة في السن هي التي تؤثر . فإذا كانت العينة تحتوي على أفراد تتراوح أعمارهم بين ١٥ إلى ٦٠ سنه فقد يكون من الملائم تقسيمهم إلى ثلاث مجموعات :

مجموعة أولي : تحتوي على الأفراد الذين تتراوح أعمارهم بين ١٥ - ٢٥ سنه

مجموعة ثانية : تحتوي على الأفراد الذين تتراوح أعمارهم بين ٢٦ - ٤٠ سنه .

مجموعة ثالثة : تحتوي على الأفراد الذين تتراوح أعمارهم بين ٤١ - ٦٠ سنه

فإذا افترضنا أن الادخار يتأثر بكل من مستوى الدخل وعمر الفرد فإن دالة الادخار يمكن صياغتها على النحو التالي

خ ر = أ١ + أ٢ ع٢ + أ٣ ع٣ + ب١ ل ر + ب٢ ل ر ع٢ + ب٣ ل ر ع٣ + ى ر ..(٨–٢٨)

$$Y_i = a_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + b_1 X_i + b_2 D_2 X_i + b_3 D_3 X_i + u_i$$

حيث : خ ر = الادخار ، ل ر = الدخل .

ع٢ (D_2) = ١ إذا كان الفرد من المجموعة الثانية .

ع٢ (D_2) = صفر إذا كان الفرد من أي مجموعة أخرى .

ع٣ (D_3) = ١ إذا كان الفرد من المجموعة الثالثة .

ع٣ (D_3) = صفر إذا كان الفرد من أي مجموعة أخرى

ومن ثم فان فئة الأساس هي الفئة الأولي ويتضح من صياغة دالة الادخار السابقة أن السن يؤثر ليس فقط على مستوى الادخار ولكن أيضا على الميل الحدي للادخار . ومن المعادلة (٨–٢٨) نجد أن :

متوسط الادخار للمجموعة الأولي = ق (خ ر / ل ر ، ع٢ = ع٣ = صفر) = أ١ + ب١ ل ر

$$E(Y_i / X_i , D_2=D_3=0) = a_1 + b_1 X_i$$

متوسط الادخار للمجموعة الثانية = ق (خ ر / ل ر ، ع٢ = ١ ، ع٣ = صفر) = (أ١ + أ٢) + (ب١ + ب٢) ل ر

$$E(Y_i / X_i , D_2=1, D_3=0) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) X_i$$

متوسط الادخار للمجموعة الثالثة = ق (خ ر / ل ر ، ع٣ = ١ ، ع٢ = صفر) = (أ١ + أ٣) + (ب١ + ب٣) ل ر

$$E(Y_i / X_i , D_3=1, D_2=0) = (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3) X_i$$

وهكذا فان مستوى الادخار والميل الحدي للادخار يختلفان من مجموعة عمرية لأخرى

(٨-٢-٦) استخدام بيانات سلسلة قطاعية Cross-Series Data

يساعد أسلوب المتغيرات الصورية على استخدام بيانات السلسلة القطاعية .
فإذا افترضنا أن لدينا بيانات عن متوسط الدخل ومتوسط الإنفاق الاستهلاكي في خمس محافظات عبر أربع سنوات ، وكان لدينا اعتقاد بأن تأثير الدخل على الاستهلاك يختلف عبر الزمن وعبر المحافظات فان أسلوب المتغيرات الصورية يمكننا من أخذ ذلك في الاعتبار . وفي هذه الحالة يلاحظ أن لدينا متغيراً تفسيرياً كمياً واحداً هو الدخل ، وعدد من المتغيرات الصورية أو الثنائية = (٥ +٤) -٢= ٧ وبالتالي يمكن اختبار أثر الدخل على الاستهلاك باستخدام الصيغة (٨-٢٩).

ص ر ر = أ١ + ب س ر ر + أ٢و٢ + أ٣و٣ + أ٤و٤ + أ٥و٥ + حـ٢ع٢ + حـ٣ع٣ + جـ٤ع٤ + خ ر ر .....(٨-٢٩)

$$Y_{it} = a_1 + b X_{it} + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + a_5 D_5 + c_2 H_2 + c_3 H_3 + c_4 H_4 + u_{it}$$

حيث :

ص ر ر (Y_{it}) = متوسط الاستهلاك في المحافظة ر (i) في السنة ر (t)

س ر ر (X_{it}) = متوسط الدخل في المحافظة ر (i) في السنة ر (t)

و ر (D_i) = متغير صوري يشير للمحافظة

ع ر (H_i) = متغير صوري يشير إلى الزمن

و٢ (D_2) = ١ إذا كانت المحافظة رقم ٢

و٢ (D_2) = صفر لغير ذلك من المحافظات

ع٢ (H_2) = ١ إذا كانت السنة ٢

ع٢ (H_2) = صفر لغير ذلك من السنوات

ووفقا لما سبق تعتبر المحافظة ١ هي محافظة الأساس والسنة ١ هي سنة الأساس . ومن ثم فإن :

القيمة المتوقعة للاستهلاك بالمحافظة ١ في السنة ١ =

ق(ص رز / س رز، و ر = ع ر = ٠) = أ١ +ب س رز

$$E(Y_{it} = X_{it}, D_i = H_i = 0) = a_1 + b X_{it}$$

القيمة المتوقعة للاستهلاك بالمحافظة ٣ في السنة ٢ =

ق(ص رز / س رز، و٣ = ع٢ = ١ ، و٢=و٤=و٥=ع٣=ع٤=٠) = (أ١ + أ٣ +جـ٢) +ب س رز

$$E(Y_{it} = X_{it}, D_3 = H_2 = 1, D_2 = D_4 = D_5 = H_3 = H_4 = 0) = (a_1 + a_3 + c_2) + b X_{it}$$

وهكذا بالنسبة لباقي المحافظات في مختلف السنوات .

وتكتب مصفوفة البيانات في هذه الحالة على النحو التالي :

ص رز	ص٠	ص رز	و٢	و٣	و٤	و٥	ع٢	ع٣	ع٤
ص ١١	١	ص ١١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ص ٢١	١	ص ٢١	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠
ص ٣١	١	ص ٣١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠
ص ٤١	١	ص ٤١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١
ص ١٢	١	ص ١٢	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ص ٢٢	١	ص ٢٢	١	٠	٠	٠	١	٠	٠
ص ٣٢	١	ص ٣٢	١	٠	٠	٠	٠	١	٠
ص ٤٢	١	ص ٤٢	١	٠	٠	٠	٠	٠	١
ص ١٣	١	ص ١٣	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
ص ٢٣	١	ص ٢٣	٠	١	٠	٠	١	٠	٠
ص ٣٣	١	ص ٣٣	٠	١	٠	٠	٠	١	٠
ص ٤٣	١	ص ٤٣	٠	١	٠	٠	٠	٠	١
ص ١٤	١	ص ١٤	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠
ص ٢٤	١	ص ٢٤	٠	٠	١	٠	١	٠	٠
ص ٣٤	١	ص ٣٤	٠	٠	١	٠	٠	١	٠
ص ٤٤	١	ص ٤٤	٠	٠	١	٠	٠	٠	١
ص ١٥	١	ص ١٥	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠
ص ٢٥	١	ص ٢٥	٠	٠	٠	١	١	٠	٠
ص ٣٥	١	ص ٣٥	٠	٠	٠	١	٠	١	٠
ص ٤٥	١	ص ٤٥	٠	٠	٠	١	٠	٠	١

وتكتب الصيغة (٨-٢٩) عادة للتبسيط كما يلي :

ص رز = أ. + ب س رز + أر + جـ ز + ع ز ....(٨-٣٠)

$$Y_{it} = a_0 + b\,X_{it} + a_i + c_t + u_{it}$$

(٨-٢-٧) تقدير دالة الشرائح Spline Function

إذا افترضنا أننا بصدد تقدير العلاقة بين مستوى الدخل س ر (X_i) وضريبة الدخل صر (Y_i) ، وكان المعدل الحدي للضريبة يتزايد مع زيادة الدخل (الضريبة التصاعدية)، وكانت شرائح الضريبة على النحو الموضح بالجدول (٨- ٦) ، فمن الممكن استخدام المتغير الثنائي للتعبير عن هذا التدرج في التأثير . وطالما لدينا ٣ شرائح للدخل تخضع للضريبة يمكن استخدام متغيرين ثنائيين في التعبير عنها .

جدول (٨-٦)

شرائح الضريبة

مدى الدخل بالألف جنيه	معدل الضريبة
أقل من ١٠	لا ضريبة
١٠ وأقل من ٢٠	منخفض
٢٠ وأقل من ٥٠	متوسط
٥٠ وأعلى	مرتفع

فإذا كان ٢٠ ≤ الدخل < ٥٠ فان و٢ (D_2) = ١

وإذا كان الدخل في غير ذلك المدى فان و٢ (D_2) = صفر

وإذا كان الدخل ≤ ٥٠ فان و٣ (D_3) = ١

وإذا كان الدخل في غير ذلك المدى فان و٣ (D_3) = صفر

ويتضمن ما سبق أن شريحة الأساس هي مدى الدخل ١٠-٢٠ .

وإذا أردنا إتباع الطريقة العادية في تقدير العلاقة بين الدخل والضريبة عبر هذه الشرائح الثلاثة فسوف تكون الصيغة المراد تقديرها على النحو التالي :

ص = أ، + أ٢و٢ + أ٣ و٣ + ب، س + ب٢ س و٢ + ب٣ س و٣ + ح ....(٨-٣١)

$$Y = a_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + b_1X + b_2 XD_2 + b_3XD_3 + u$$

ومن ثم :

القيمة المتوقعة للضريبة لفئة الأساس (١٠ ≥ س < ٢٠) = ق(ص / س، و٢=و٣=٠) أ،+ب، س

$$E(Y/X, D_2=D_3=0) = a_1 + b_1X$$

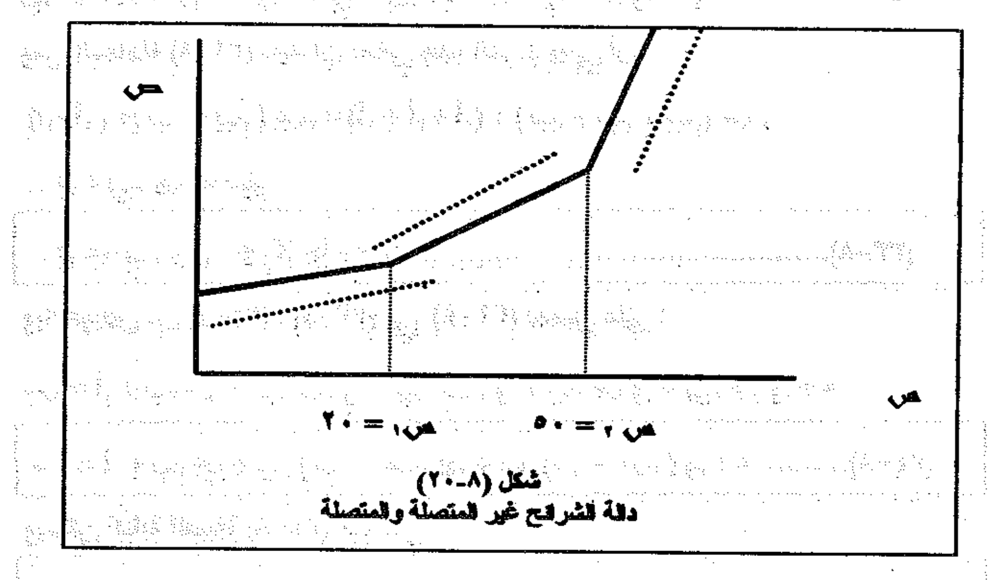
القيمة المتوقعة للضريبة للفئة الثانية (٢٠ ≥ س < ٥٠) = ق(ص / س ، و٢=١، و٣=٠)=(أ،+أ٢)+ (ب، +ب٢) س

$$E(Y/X, D_2=1, D_3=0) = (a_1 +a_2) + (b_1+b_2) X$$

القيمة المتوقعة للضريبة للفئة الثالثة (٥٠ ≥ س) = ق(ص / س ، و٢=٠، و٣=١)=(أ،+أ٣)+ (ب، +ب٣) س

$$E(Y/X, D_2=0, D_3=1) = (a_1 +a_3) + (b_1+b_3) X$$

ولكن استخدام الصيغة السابقة لا يضمن اتصال أجزاء العلاقة المقدرة ، حيث قد تأتي على النحو المنقط في الشكل (٨-٢٠) .



شكل (٨-٢٠)
دالة الشرائح غير المتصلة والمتصلة

وللحصول على علاقة متصلة كما في الخط المتصل بالشكل (٨-٢٠) نعيد صياغة المتغيرات الثنائية كما يلي :

لو أن : س ≤ س،   و٢ = ١   ، ولو أنها في أي مدى آخر و٢ = صفر

لو أن : س ≤ س٢   و٣ = ١   ، ولو أنها في أي مدى آخر و٣ = صفر

ومن ثم فإن اتصال علاقتي الشريحة الأولى والثانية عند القيمة المفصلية س$_1$ يتطلب تساوي :

ق(ص / س$_1$ ، و$_2$=و$_3$ =صفر) = ق(ص / س$_1$ ، و$_2$=١ ، و$_3$ =صفر)

ومن المعادلة (٨-٣١) نجد أن هذا الشرط يعني أن :

أ$_1$+ ب$_1$ س$_1$ = (أ$_1$ + أ$_2$) + (ب$_1$ + ب$_2$) س$_1$

∴ أ$_2$ + ب$_2$ س$_1$ = صفر

∴ أ$_2$ = − ب$_2$ س$_1$ ← $a_2 = -b X_1$ **..(٨-٣٢)**

كما أن اتصال علاقتي الشريحة الثانية والثالثة عند القيمة المفصلية س$_2$ يتطلب تساوي :

ق(ص / س$_2$ ، و$_2$=١ ، و$_3$ =صفر) = ق(ص / س$_2$ ، و$_2$=١ = و$_3$=١)

ومن المعادلة (٨-٣١) نجد أن تحقق هذا الشرط يعني أن :

(أ$_1$+أ$_2$) +(ب$_1$ + ب$_2$) س$_2$ = (أ$_1$ + أ$_2$ + أ$_3$) + (ب$_1$ + ب$_2$ + ب$_3$) س$_2$

∴ أ$_3$ + ب$_3$ س$_2$ = صفر

∴ أ$_3$ = − ب$_3$ س$_2$ ← $a_3 = - b_3 X_2$ **.............. ....(٨-٣٣)**

وبالتعويض من (٨-٣٢) ، (٨-٣٣) في (٨-٣١) نحصل على :

ص = أ$_1$ + ب$_1$ س − ب$_2$ س$_1$ و$_2$ − ب$_3$ س$_2$ و$_3$ + ب$_2$ س و$_2$ + ب$_3$ س و$_3$ + ع

ص = أ$_1$ + ب$_1$ س + ب$_2$ (س − س$_1$)و$_2$ + ب$_3$ (س − س$_2$) و$_3$ + ع ....(٨-٣٤)

ويمكن كتابة الصيغة (٨-٣٤) كما يلي :

ص = أ$_1$ + ب$_1$ س + ب$_2$ ف$_2$ + ب$_3$ ف$_3$ + ع ....(٨-٣٥)

$$Y = a_1 + b_1 X + b_2 Z_2 + b_3 Z_3 + u$$

حيث :

ف$_2$ = (س − س$_1$)و$_2$ ← $Z_2 = (X - X_1) D_2$

ف٣ = (س − س٢)و٣ ← $Z_3 = (X-X_2)D_3$

ومن الصيغة (٨-٣٥) يمكن القول أن المتغيرات التفسيرية هي :

س = الدخل

ف٢ = (س − س١)و٢ بالنسبة للدخل ≤ س١

ف٢ = صفر لغير ذلك

ف٣ = (س − س٢)و٣ بالنسبة للدخل ≤ س٢

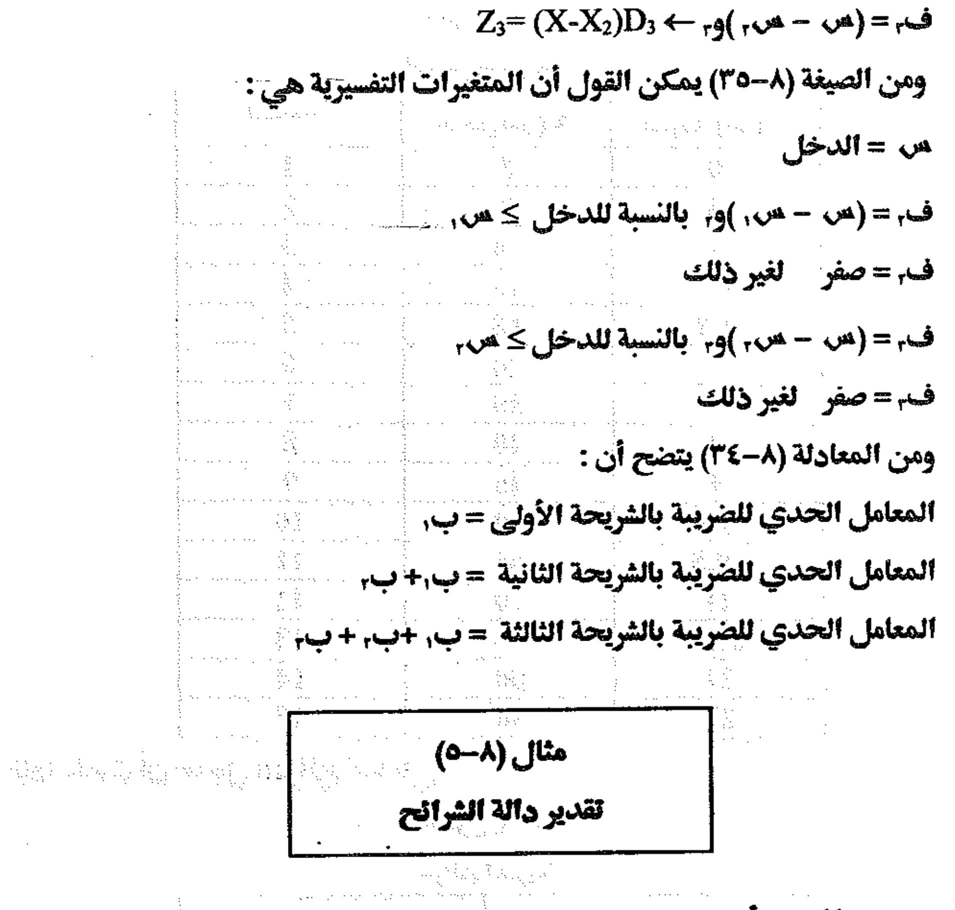
ف٣ = صفر لغير ذلك

ومن المعادلة (٨-٣٤) يتضح أن :

المعامل الحدي للضريبة بالشريحة الأولى = ب١

المعامل الحدي للضريبة بالشريحة الثانية = ب١+ ب٢

المعامل الحدي للضريبة بالشريحة الثالثة = ب١ +ب٢ + ب٣



مثال (٨-٥)
تقدير دالة الشرائح

افترض أن البيانات بالجدول (٨-٧) تشير إلى ضريبة الدخل ص والدخل س بالألف جنيه لعينة من الأفراد .

جدول(٨-٧)

الدخل والضريبة

المشاهدة	الدخل (س) X	الضريبة (ص) Y
1	5	0
2	7	0
3	10	1
4	15	1.5
5	18	1.8
6	20	4
7	35	7
8	40	8
9	45	9
10	50	15
11	65	19.5
12	70	21
13	75	22.5
14	80	24
15	90	27

فإذا علمت أن جدول الشرائح كما يلي :

جدول (٨-٨)

شرائح الضريبة

مدى الدخل	معدل الضريبة
أقل من ١٠	لا ضريبة
١٠ وأقل من ٢٠	منخفض
٢٠ وأقل من ٥٠	متوسط
٥٠ وأعلى	مرتفع

فالمطلوب هو تقدير المعدل الحدي للضريبة للشرائح المختلفة ، واختبار ما إذا كان هناك اختلاف جوهري بين المعاملات الحدية للضريبة بالشرائح المختلفة أم لا ؟

وفقا للجدول (٨-٨) توجد هناك قيمتين مفصليتين للدخل هما $س_١$ = ٢٠ ، $س_٢$ = ٥٠ . ولتقدير الصيغة (٨-٣٥) يتعين استحداث متغيرين هما :

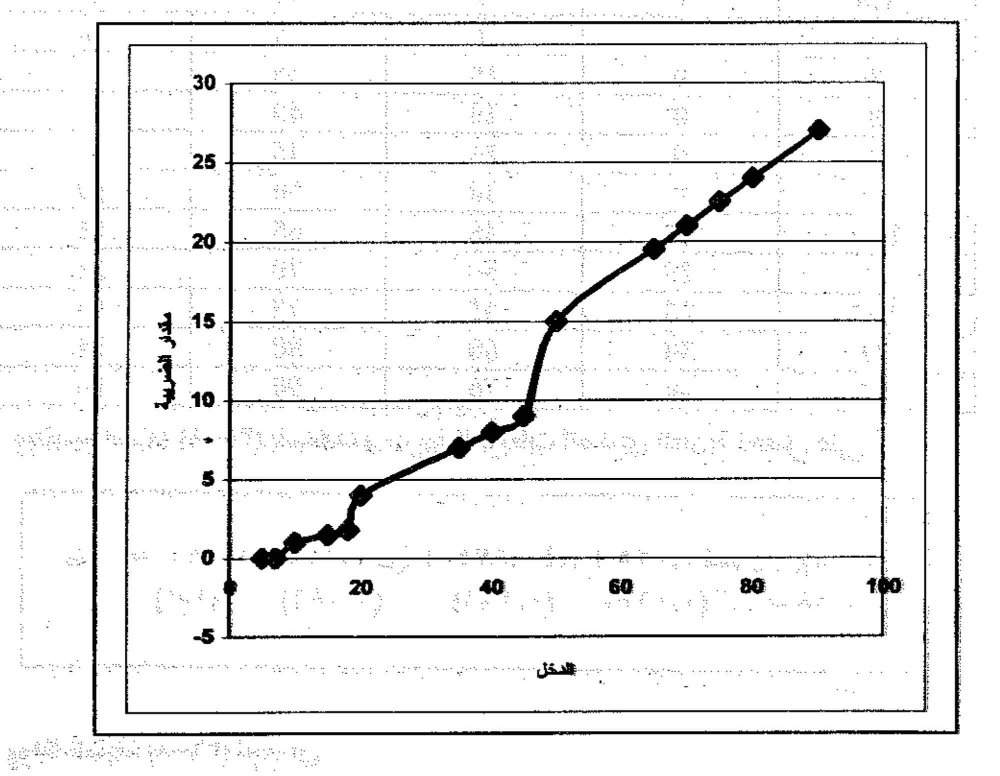
$ف_{٢}$ = (س − $س_{١}$) $و_{٢}$ بالنسبة للدخل ≤ $س_{١}$ (حيث $و_{٢}$ = ١ ، $و_{٣}$=٠)

$ف_{٢}$ = صفر   لغير ذلك

$ف_{٣}$ = (س − $س_{٢}$) $و_{٣}$ بالنسبة للدخل ≤ $س_{٢}$ (حيث $و_{٢}$ = ٠ ، $و_{٣}$=١)

$ف_{٣}$ = صفر   لغير ذلك

وبعمل ذلك نحصل على الجدول (٨−٩) . ويوضح الشكل (٨−٢١) دالة الشرائح .



شكل (٨-٢١)

جدول (٨-٩)

حسابات دالة الشرائح

المشاهدة	الدخل السنوي(س)	ف ٢	ف٣	مقدار الضريبة (ص)
1	5	0	0	0
2	7	0	0	0
3	10	0	0	1
4	15	0	0	1.5
5	18	0	0	1.8
6	20	0	0	4
7	35	15	0	7
8	40	20	0	8
9	45	25	0	9
10	50	30	0	15
11	65	45	15	19.5
12	70	50	20	21
13	75	55	25	22.5
14	80	60	30	24
15	90	70	40	27

وبتقدير الصيغة (٨-٣٥) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على :

$\hat{ص}$ = -٠,٩٨٦ + ٠,١٧٤ س + ٠,١٧٤ $ف_٢$ + ٠,٠٢٥ $ف_٣$ ......(٨-٣٦)

(١,٢) (٠,٠٨٦) (٠,١١٦) (٠,٠٦٥) $\bar{ر}^٢$ = ٠,٩٨

ووفقا للصيغة (٨-٣٦) نجد أن :

المعامل الحدي لضريبة الشريحة الأولى (١٠ - ٢٠)=١٧,٤ ٪

المعامل الحدي لضريبة الشريحة الثانية (٢٠-٥٠) = ١٧,٤ ٪ + ١٧,٤ ٪ = ٣٤,٨ ٪

المعامل الحدي لضريبة الشريحة الثالثة (أكبر من ٥٠) = ٣٤,٨ ٪ + ٢,٥ ٪ = ٣٧,٣ ٪

ولاختبار مدى جوهرية الاختلاف بين المعاملات الحدية للضريبة بالشرائح المختلفة نختبر : فرض العدم : $ب_٢$ = صفر ، $ب_٣$ =صفر ، في مواجهة الفرض البديل : $ب_٢ \neq$ صفر ،

ب$_3$ ≠ صفر . ومن الواضح من اختبار الخطأ المعياري أن كل من $\hat{ب}_2$ ، $\hat{ب}_3$ ليست لها معنوية إحصائية ، مما يشير إلى عدم جوهرية الاختلاف بين المعاملات الحدية للضريبة بالنسبة للشرائح المختلفة .

وعموما يوجد هناك بعض المشاكل المتعلقة باستخدام المتغيرات الصورية عند تقدير علاقات الانحدار المختلفة نوجز أهمها فيما يلي :

(۱) يلاحظ أن التوسع في استخدام المتغيرات الصورية بنموذج الانحدار مع ثبات حجم العينة يقلل من درجات الحرية ، ولاشك أن هذا يقلل من معنوية المعلمات المقدرة .

(۲) يوجد هناك عديد من المتغيرات النوعية التي تؤثر في أي ظاهرة اقتصادية وفي اتجاهات متضادة. فالاستهلاك يتأثر ليس فقط بالدخل ولكن أيضا بالجنس (ذكر أو أنثى)، والديانة ، والمستوى التعليمي ، والحالة الاجتماعية (متزوج أو أعزب) ، والموطن الجغرافي وغيرها من العوامل . ويلاحظ أن مثل هذه المتغيرات النوعية من الممكن أن يلغي أثر بعضها البعض على الاستهلاك تاركة الدخل كأهم عنصر من العناصر المحددة للاستهلاك ، وذلك كما أثبتت عديد من الدراسات . ومن ثم فإنّ عدم إدراج هذه المتغيرات النوعية بمعادلة الانحدار قد لا يؤثر بدرجة كبيرة على المقدرة التفسيرية للنموذج عند استخدام بيانات قطاعية أو بيانات سلسلة قطاعية.

المبحث الثالث

استخدام المتغيرات الصورية كمتغيرات تابعة

بالرغم من التوسع في استخدام المتغيرات الصورية (الثنائية) كمتغيرات تفسيرية إلا أن استخدامها كمتغيرات تابعة مازال محدوداً . ولعل هذا يرجع للمشاكل العديدة التي تنجم عند استخدام هذه المتغيرات كمتغيرات تابعة . ومن الأمثلة على استخدام المتغيرات الصورية كمتغيرات تابعة محاولة تفسير الملكية الخاصة للمنازل ببعض المتغيرات الكمية كالدخل . وعندئذ إذا كانت الأسرة تملك منزلاً خاصا فإن قيمة المتغير الصوري =١ ، وإذا كانت الأسرة لا تملك منزلاً خاصاً فإن قيمة المتغير الصوري = صفر . ومن الأمثلة الأخرى محاولة تفسير فاعلية بعض الأدوية بعدد من المتغيرات التفسيرية الكمية ، وعندئذ إذا كان الدواء فعالاً في علاج بعض الأمراض يأخذ المتغير الصوري قيمة ١ ، وإذا كان غير فعال يأخذ المتغير الصوري القيمة صفر . ومن بين النماذج التي تستخدم في تقدير علاقة متغيرها التابع متغير صوري :

(١) نموذج الاحتمال الخطي The Linear Probability Model (LPM) .

(٢) نموذج Logit Model .

(٣) نموذج Probit Model .

(٤) نموذج Tobit Model .

وسوف نركز على النوعين (١) ، (٢) في هذا المبحث .

(٨-٣-١) نموذج الاحتمال الخطي LPM :

افترض أننا بصدد تقدير النموذج التالي :

ص ر = أ + ب س ر + ع ر ....(٨-٣٧)

$$Y_i = a + bX_i + u_i$$

حيث : $ص_ر = 1$ إذا كانت الأسرة تملك منزلاً خاصاً

$ص_ر =$ صفر إذا كانت الأسرة لا تملك منزلاً خاصاً

$س_ر =$ دخل الأسرة "ر" بالألف دولار

ومن الواضح أن هذا النموذج يحاول اختبار أثر الدخل كمتغير كمي على الملكية الخاصة للمنازل كمتغير نوعي أو ثنائي . ويسمى النموذج السابق بنموذج الاحتمال الخطي . وإذا كانت البيانات المتوفرة عن عشرة أسر مثلاً كما هي موضحة بجدول مثال (٨-٦) يمكن تحديد قيمة متغير الملكية كما هو موضح بنفس الجدول .

مثال (٨-٦)

نموذج الاحتمال الخطي في تقدير العلاقة بين الملكية الخاصة والدخل

الأسرة (١)	الموقف من الملكية (٢)	قيمة المتغير النوعي $ص_ر$ (٣)	الدخل $س_ر$ ألف دولار
1	تملك	1	10
2	تملك	1	15
3	لا تملك	0	5
4	تملك	1	20
5	لا تملك	0	6
6	لا تملك	0	4
7	تملك	1	25
8	تملك	1	25
9	لا تملك	0	7
10	تملك	1	23

ويلاحظ أن المتغير التابع في هذه الحالة يعتبر متغيراً احتمالياً ذو طبيعة خاصة. فهو أولا متغير ذو طبيعة خاصة لأن قيمته تتراوح بين الصفر والواحد ، ولذلك فإن القيمة المتوقعة له أو متوسط قيمه تقع بين الصفر والواحد . أي أن :

١ ≤ [ق(ص ر / س ر)] ≤ صفر ◄ $0 \leq E(Y_i / X_i) \leq 1$

ومن ناحية أخرى فهو متغير احتمالي ، حيث أن احتمالات قيمه أقل من الواحد . ففي مثالنا السابق نجد أن التوزيع الاحتمالي للمتغير التابع يظهر كما بالجدول (٨–١٠) .

جدول (٨–١٠)

احتمالات ملكية منزل خاص

قيمة ص (Y)	احتمال (P)
1	0.6
0	0.4
مجموع الاحتمالات	1.0

ويمكن كتابة التوزيع الاحتمالي في صورة عامة كما بالجدول (٨–١١) .

جدول (٨–١١)

التوزيع الاحتمالي لمتغير صوري

قيمة ص (Y)	احتمال (P)
1	ح (P)
0	(١–ح) (1-p)
مجموع الاحتمالات	1.0

ومن ثم فإن :

القيمة المتوقعة للمتغير ص = Σ ص ر ح ر ◄ $E(Y_i) = \Sigma P_i Y_i$

ق (ص ر/ س ر) = ١ (ح) + صفر (١-ح) = ح ....(٨-٣٨)

ومن المعادلة (٨-٣٧) نجد أن :

ق (ص ر / س ر) = أ + ب س ر ....(٨-٣٩)

حيث : ق (ي) = صفر

ومن (٨-٣٨) ، (٨-٣٩) نجد أن :

ق (ص ر / س ر) = أ + ب س ر = ح ر ....(٨-٤٠)

ومن ثم فإن القيمة المقدرة لكل ص ر تساوي احتمال هذه القيمة . أي أن :

ص^ ر = ح ر ⟵ $\hat{Y}_i = P_i$ ....(٨-٤١)

ومن أهم المشاكل التي تنجم عند استخدام المتغير الصوري كمتغير تابع ما يلي :

(١) الإخلال بأحد افتراضات طريقة المربعات الصغرى وهو أن الحد العشوائي له توزيع معتدل . فيلاحظ في هذه الحالة أن الحد العشوائي لا يكون له توزيع معتدل ، ذلك لأنه يأخذ قيمتين فقط . ويتضح هذا مما يلي :

ي ر = ص ر – أ - ب س ر ⟵ $u_i = Y_i - a - b X_i$

ومن ثم فإن قيم ي ر تصبح كما بالجدول (٨-١٢) .

جدول (٨-١٢)

العلاقة بين ي ر ، ص ر

قيمة ص	قيمة ي ر
1	١–أ–ب س ر
0	– أ – ب س ر

وفي حالة أن يكون توزيع ع ر غير معتدل يصعب علينا اختبار معنوية المعلمات المقدرة بواسطة المربعات الصغرى العادية لأنه لا يمكن استخدام جداول (t) أو (Z) والتي هي قائمة أساساً على افتراض اعتدالية التوزيع . ولكن لا يعتبر اختلال هذا الافتراض أمراً خطيراً لأن المعلمات المقدرة بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة ، ومع كبر حجم العينة يصبح التوزيع معتدلاً .

(٢) كما يترتب أيضا على استخدام المتغير الصوري كمتغير تابع وجود ارتباط بين الحد العشوائي والمتغير المستقل ، وهذا يخل مرة أخرى بأحد افتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية القائلة بعدم وجود ارتباط بين "ع ر" ، "س ر" حتى يمكن تحديد أثر كل واحد منهما بصورة مستقلة على المتغير التابع . وتسمى هذه المشكلة بعدم ثبات التباين Heteroscedasticity. وللتخلص من هذه المشكلة نقوم بتعديل البيانات من خلال قسمة طرفي النموذج (٨-٣٧) على حد جديد تعبر عنه الصيغة (٨-٤٢) .

ى ر = √ ح ر (١ - ح ر) $k_i = \sqrt{P_i(1-P_i)}$ ....(٨-٤٢)

وحيث أنه من الصعب تحديد الاحتمال (ح ر) في المجتمع فإننا نستعيض عنه بالاحتمال المقدر من عينة . و بالتعويض من المعادلة (٨-٤١) نحصل على :

ىَ ر = √ سَ ر (١ - سَ ر) $\hat{k}_i = \sqrt{\hat{Y}_i(1-\hat{Y}_i)}$ .....(٨-٤٣)

وبقسمة طرفي المعادلة (٨-٣٧) على ىَ نحصل على :

$$\frac{ص_ر}{\hat{ى}} = \frac{أ}{\hat{ى}} + ب + \frac{س_ر}{\hat{ى}} + \frac{ع_ر}{\hat{ى}} \quad \text{.......................(٨-٤٤)}$$

وبتحويل البيانات وفقا للمعادلة (٨-٤٤) نعيد التقدير مرة أخرى باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . ولعمل ذلك نتتبع الخطوات التالية :

(أ) نقوم بتقدير المعادلة (٨-٣٧) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية من خلال البيانات المعطاة في المثال (٨-٦) فنحصل على :

$$ص_ر = -٠,١١ + ٠,٠٥ س_ر + د_ر \quad \text{.......................(٨-٤٥)}$$
$$(٠,١٨) \quad (٠,٠١)$$

ويلاحظ أن ما تعنيه المعادلة (٨-٤٥) هو أنه لكي تكون $ص_ر = ١$ ، أي :

$-٠,١١ + ٠,٠٥ س_ر = ١$ ، فإن $٠,٠٥ س_ر = ١,١١$ ، ومن ثم فإن :

$س_ر = ١,١١ \div ٠,٠٥ = ٢٢,٢$

أي أنه حتى يصبح الفرد مالكا لمنزل خاص يتعين أن يكون دخله في المتوسط ٢٢ ألف ومائتين دولار . ومن المعادلة (٨-٤٥) نجد أن :

$$\hat{ص}_ر = -٠,١١ + ٠,٠٥ س_ر \quad \text{.......................(٨-٤٦)}$$

وبالحصول على $\hat{ص}_ر$ لكل القيم بالتعويض في المعادلة (٨-٤٦) عن $س_ر$ يمكن استخدامها في الحصول على $\hat{ى}$ كما هو موضح بالمعادلة (٨-٤٣) .

(ب) نقوم بتعديل قيم $ص_ر$ المشاهدة ، $س_ر$ بقسمتها على $\hat{ى}$ ، ثم نعيد تقدير الدالة مرة أخرى باستخدام البيانات المعدلة . ونكون بذلك قد تخلصنا من

مشكلة وجود ارتباط بين $د_ر$ ، $س_ر$ وذلك على النحو الموضح بالجدول (٨-١٣) .

جدول (٨-١٣)

حساب $\hat{ى}$

(١) $ص_ر$	(٢) $س_ر$	(٣) $\hat{ص}_ر$	(٤) $1-\hat{ص}$	(٥) $\hat{ص}(1-\hat{ص})$	(٦) $\hat{ى}$	(٧) $\hat{ص}_ر$ المعدلة	(٨) $1-\hat{ص}$ المعدلة	(٩) $\hat{ص}(1-\hat{ص})$ المعدلة	(١٠) $\hat{ى}$ المعدلة
1	10	0.39	0.61	0.238	0.49	0.39	0.61	0.238	0.49
1	15	0.64	0.36	0.230	0.48	0.64	0.36	0.230	0.48
0	5	0.14	0.86	0.120	0.35	0.14	0.86	0.120	0.35
1	20	0.89	0.11	0.098	0.31	0.89	0.11	0.098	0.31
0	6	0.19	0.81	0.154	0.39	0.19	0.81	0.154	0.39
0	4	0.09	0.91	0.089	0.30	0.09	0.91	0.089	0.30
0	25	1.14	-0.14	-0.160	?	0.99	0.01	0.0099	0.10
1	25	1.14	-0.14	-0.160	?	0.99	0.01	0.0099	0.10
0	7	0.24	0.76	0.1824	0.43	0.24	0.76	0.1824	0.43
1	23	1.04	-0.04	-0.042	?	0.99	0.01	0.0099	0.10

(جـ) قد تظهر هناك مشكلة أخرى مؤداها أنه بالرغم من أن قيم $ص_ر$ تتراوح بين الواحد والصفر لطبيعتها الخاصة فإن قيم $\hat{ص}$ قد تقل عن الصفر أو تزيد عن الواحد . فلا يوجد هناك ما يضمن تراوحها بين الصفر والواحد ، وهذا واضح من العمود (٣) بالجدول (٨-١٣) . ويترتب على ذلك أننا عندما نحصل على القيمة $\hat{ص}_ر(1-\hat{ص}_ر)$ فإنها قد تكون قيمة سالبة لا يمكن الحصول على جذرها التربيعي للتوصل للقيمة $\hat{ى}$ وذلك كما يتضح من العمودين (٥) ، (٦) بالجدول (٨-١٣) . وللتغلب على هذه المشكلة يتعين تحويل كل قيمة لـ $\hat{ص}$ أقل من الصفر إلى قيمة موجبة قريبة من الصفر ولتكن ٠,٠١ ، وتحويل كل قيمة لها أكبر من الواحد إلى أقرب قيمة للواحد ولتكن ٠,٩٩ ، ثم نحسب $\hat{ى}$ المعدلة كما بالعمود (١٠) بالجدول (٨-١٣). ومن ثم يمكن الحصول على القيمتين : $(ص_ر / \hat{ى})$ ، $(س_ر / \hat{ى})$ كما بالجدول (٨-١٤) .

جدول (٨-١٤)

حساب قيم ص*ر ، س*ر المعدلة

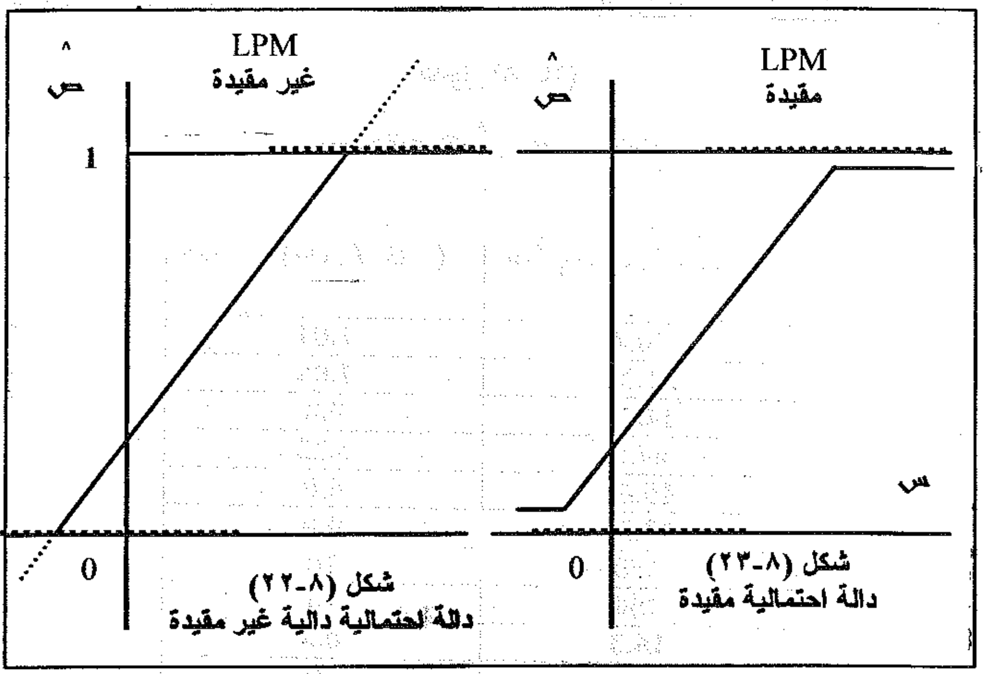
ص*ر = (ص ر / ىَ)	س*ر = (س ر / ىَ)
2.04	20.4
2.08	31.25
0.0	14.28
3.22	64.5
0.0	15.38
0.0	13.33
10	250
10	250
0.0	16.3
10	230

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على معادلة انحدار عن العلاقة بين القيم المعدلة ص*ر ، س*ر ، ونكون قد تخلصنا بذلك من مشكلة الارتباط بين س ر ، د ر . وتسمى هذه الطريقة بطريقة المربعات الصغرى المرجحة . وتتمثل هذه المعادلة في :

ص*ر = - ٠,٠٠٩٦ + ٠,٠٠٤١ س*ر + د ر ....(٨-٤٧)

(٠,٣١) (٠,٠٠٢) ر‾² = ٠,٩٧

(٣) ومن المشاكل الأخرى التي تظهر في حالة استخدام المتغير الصوري كمتغير تابع هو أن معامل التحديد ر² لا يعبر بدقة عن جودة التوفيق . فشكل الانتشار في هذه الحالة يشبه أحد الشكلين التاليين (٨-٢٢) ، (٨-٢٣) .



شكل (٨-٢٢)
دالة احتمالية دالية غير مقيدة

شكل (٨-٢٣)
دالة احتمالية مقيدة

وحيث أن خط الانحدار المقدر يمر بقيم متطرفة فقط فإنه من المتوقع أن يكون معامل التحديد في هذه الحالة منخفضاً . ولقد أوضحت معظم الدراسات التطبيقية التي تمت في هذا الصدد أن معامل التحديد الذي يتراوح بين ٠,٢ – ٠,٦ يعتبر معاملاً مرتفعاً في حالة المتغير التابع الثنائي . وإذا قمنا بتقدير النموذج (٨–٣٧) وجاء على النحو التالي :

$$\hat{ص}_ر = -٠,٩٥ + ٠,٠٩ \, س_ر \quad (٨\text{-}٤٨)$$

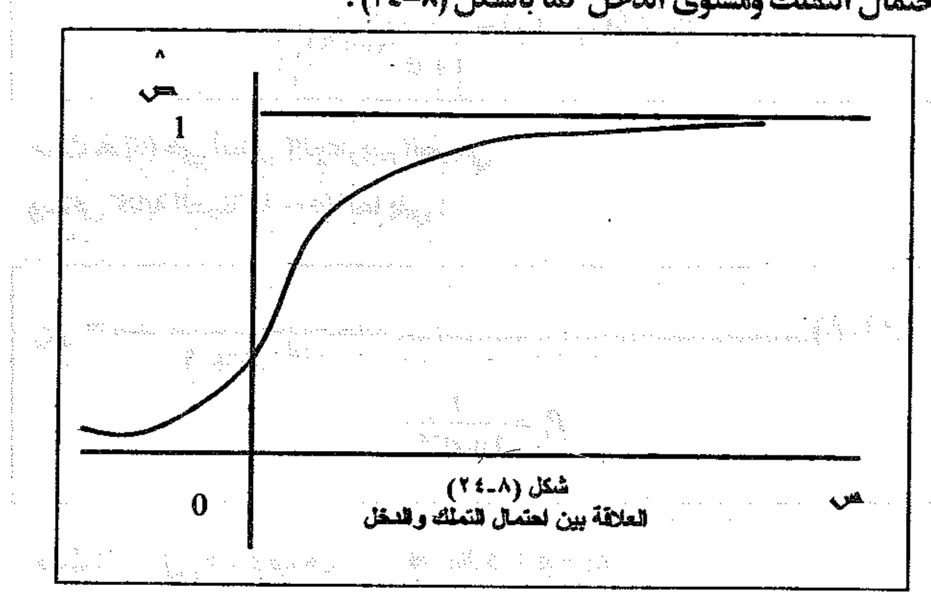
$$(٠,٠١) \quad (٠,٠٠٠٢) \qquad ر^٢ = ٠,٨٠$$

فإن هذا يعني أنه إذا كان الدخل مساوياً للصفر، فإن احتمال أن يملك الفرد منزلاً خاصاً = – ٠,٩٥ ، وحيث أن الاحتمال لا يكون سالباً ، فإن هذه القيمة تقرب إلى الصفر. ويعني هذا في هذه الحالة أنه إذا كان الدخل مساوياً للصفر فإن احتمال أن يملك الفرد منزلاً خاصاً = صفر . ومن ناحية أخرى إذا زاد الدخل بمقدار وحدة واحدة (ألف دولار) فإن احتمال أن يمتلك الفرد منزلاً خاصاً يزداد بمقدار ٩ نقاط (٩ ٪) . ولو أن دخله كان ٢٠ ألف دولار فإن احتمال أن يملك هذا الفرد منزلاً خاصاً هو :

ص^ = –٠,٩٥ + ٠,٠٩ (٢٠) = –٠,٩٥ + ١,٨ = ٨٥ ٪

وعند تقدير الاحتمالات باستخدام النموذج الخطي فإن هناك إمكانية أن يكون الاحتمال سالباً أو أكبر من الواحد . ولذا فإن استخدام هذا النموذج غير مفضل .

(٤) يضاف إلى ما سبق أن نموذج الاحتمال الخطي يفترض أن العلاقة بين احتمال المتغير التابع وقيم المتغير المستقل علاقة خطية . فإذا كان مستوى الدخل منخفضاً جداً فإن زيادته بمقدار طفيف تزيد من احتمال أن يمتلك الفرد منزلاً ، وإذا كان مستوى الدخل مرتفعاً جداً فإن انخفاضه بمقدار طفيف يقلل من احتمال أن يمتلك الفرد منزلاً بنفس المقدار السابق . ولاشك أن هذا لا يتفق مع الواقع . فالعلاقة بين احتمال المتغير التابع وقيم المتغير المستقل غالبا ما تكون غير خطية في الواقع . فعند مستويات الدخل المنخفضة جداً يترتب على زيادة الدخل بمقدار طفيف زيادة احتمال تملك الفرد منزلاً خاصاً بدرجة طفيفة ، وكذلك الأمر عند مستويات الدخل المرتفعة جداً ، حيث يكون الفرد غالباً مالكاً لمنزل خاص . ومن ثم فإن تأثير الدخل على احتمال تملك الفرد لمنزل خاص ليس ثابتاً وإنما غير خطي . ومن المتوقع أن تكون العلاقة بين احتمال التملك ومستوى الدخل كما بالشكل (٨–٢٤) .



شكل (٨-٢٤)
العلاقة بين احتمال التملك والدخل

(٨-٣-٢) نموذج Logit :

لقد اتضح مما سبق أنه في حالة نموذج الاحتمال الخطي نحصل على العلاقة التالية :

ح ر = ق (ص=١/ س ر) = أ + ب س ر ....(٨-٤٩)

$$P_i = E(Y = 1/X_i) = a + bX_i$$

هذا يعني أن احتمال ص =١ ، أي احتمال تملك الأسرة منزلاً خاصاً بشرط (/) مستوى دخل معين س ، يساوي : أ + ب س ر . وعلاقة الاحتمال تلك هي علاقة خطية . أما في حالة نموذج Logit فإن العلاقة بين الاحتمال والمتغير التفسيري تعتبر علاقة غير خطية ، كما تتراوح قيم الاحتمال بين الصفر والواحد . وتأخذ هذه العلاقة الصيغة التالية :

ح ر = ق (ص ر = ١ / س ر) = ١ / (١ + هـ -(أ+ب س ر)) ....(٨-٥٠)

$$P_i = E(Y_i / X_i) = \frac{1}{1 + e^{-(a + bX_i)}}$$

حيث هـ (e) هي أساس اللوغاريتم الطبيعي .

ويمكن كتابة الصيغة (٨-٥٠) كما يلي :

ح ر = ١ / (١ + هـ -ل ر) ....(٨-٥١)

$$P_i = \frac{1}{1 + e^{-z_i}}$$

حيث : ل ر = أ + ب س ر ⟵ $Z_i = a + b X_i$

وتمثل المعادلة (٨-٥١) دالة التوزيع التراكمي Cumulative (Logistic)Distribution Function . ومن الملاحظ أنه عندما تتراوح لر (Z_i) بين − ∞ ، + ∞ فإن حر (P_i) تتراوح بين الصفر والواحد ، كما أن لر(Z_i) [ومن ثم سر] على علاقة غير خطية مع حر (P_i) .

وحيث أن (P_i) تعني احتمال امتلاك منزل خاص ، فإن $(1-P_i)$ تعني احتمال عدم امتلاك منزل خاص . ومن ثم فإن :

$$(1-P_i)=\frac{1}{1+e^{zi}}$$

$$\frac{P_i}{1-P_i}=\frac{1+e^{zi}}{1+e^{-zi}}$$

وبضرب كل من البسط والمقام في e^{2zi} نحصل على :

$$\frac{P_i}{1-P_i}=\frac{(1+e^{zi})e^{2zi}}{e^{2zi}+e^{zi}}$$

$$\frac{P_i}{1-P_i}=\frac{(1+e^{zi})e^{2zi}}{(1+e^{zi})e^{zi}}=e^{zi}$$

أي أن :

حر / ١-حر = هـ^لر ....(٨-٥٢)
$$\frac{P_i}{1-P_i}=e^{zi}$$

وتشير النسبة السابقة إلى نسبة احتمال أن تملك أسرة منزلاً خاصاً إلى احتمال ألا تملك منزلاً خاصاً. فلو أن حر = ٠,٦ ، فإن احتمال أن تملك أسرة منزلاً خاصاً يكون

ضعف احتمال ألا تملك الأسرة منزلاً خاصا مرة ونصف ، حيث (ا–ح ر) = ١–ح ر)=٠,٤.

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغة (٨–٥٢) نحصل على :

ج ر = لو (ح ر / ١ – ح ر) = ل ر = أ + ب س ر ....(٨-٥٣)

$$L_i = Ln(\frac{P_i}{1-P_i}) = a + bX_i$$

وبفحص الصيغة (٨–٥٣) نجد أن نموذج Logit يتصف بما يلي :

(١) إذا زاد الاحتمال من صفر إلى الواحد ، فإن "ج ر" (L_i) تتغير بين – ∞ ، + ∞ .

(٢) من الواضح أن "ج ر" (L_i) على علاقة خطية مع المتغير التفسيري س ر (X_i) ، ولكن الاحتمال "ح ر" (P_i) على علاقة غير خطية معه . وتختلف هذه الخاصية عن النموذج الاحتمالي الخطي .

(٣) من الممكن إثبات أن :

ء ح ر / ء س ر = ب ح ر (١-ح ر) ....(٨-٥٤)

$$\frac{dP}{dX} = bP_i(1-P_i)$$

وهو ما يعني أن التغير في الاحتمال نتيجة لتغير الدخل يتأثر بالمعلمة الانحدارية "ب" b وبمستوى الاحتمال نفسه "ح ر"(P_i) . ولذا فإن العلاقة بين الدخل واحتمال امتلاك منزل هي علاقة غير خطية تتغير مع تغير مستوى الاحتمال .

ويلاحظ أن تأثير التغير في الدخل على احتمال التملك ليس ثابتاً ، ويصل لحده الأقصى عندما ح = ٠,٥ ، ويصل لحده الأدنى عندما يقترب "ح" إما من الصفر أو الواحد .

(٤) يمكن تحديد احتمال أن يمتلك فرداً منزلاً خاصاً عند مستوى دخل معين س* بالتعويض عن قيمة س* في الصيغة (٨-٥٠) وذلك بعد تقدير المعلمات أ̂ ، ب̂

(٨-٣-٣) كيفية تقدير نموذج Logit :

لعل السؤال الذي يثور هنا : كيف يمكن تقدير نموذج الذي يأخذ الصيغة (٨-٥٣) ؟ بادئ ذي بدء إذا كان لدينا عينة من الأسر ثم أعطينا القيمة واحد لكل أسرة تملك منزلاً خاصاً والقيمة صفر لكل أسرة لا تملك منزلاً ، فسوف يكون من الصعب تقدير النموذج السابق ، حيث :

ج ر = لو (١ ÷ صفر) في حالة الأسرة التي تملك منزلاً خاصاً

ج ر = لو (صفر ÷ ١) في حالة الأسرة التي لا تملك منزلاً

وهي قيم غير محددة .

ولكن إذا تم عرض البيانات بصورة معينة يصبح من الممكن تقدير النموذج السابق . فكل فئة دخل يمكن تحديد متوسط س ر (X_i) لها ، كما يمكن تحديد عدد المفردات التي تملك منزلاً داخل كل فئة ن ر (n_i) ، وعدد مفردات كل الفئة ن ز (n_j) . وعندئذ يمكن تحديد احتمال لكل متوسط ، حيث :

ح̂ ر = ن ر / ن ز ....(٨-٥٥)

$$\hat{P}_i = \frac{n_i}{n_j}$$

وهو ما يسمى بالتكرار النسبي . وبهذه الطريقة يتوفر لدينا لكل س ر (Xi) احتمال ح̂ ر ($\hat{P}_i$) . ولكن يلاحظ أن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير الصيغة السابقة لا يعطي نتائج دقيقة في كل الحالات ، وذلك لأن الحد العشوائي ء ر (ui) وإن كان له توزيع طبيعي له متوسط حسابي و تباين على النحو التالي :

$$u_i \rightarrow N\left[0, \frac{1}{N_i P_i (1-P_i)}\right]$$

أي أن وسطه الحسابي صفر ، إلا أن تباينه يتأثر بالمتغير التابع والذي هو P_i . ولذا توجد هنا مشكلة عدم ثبات التباين المعروفة بـ Heteroscedasticity . وتعتبر طريقة المربعات الصغرى المرجحة WLS أكثر للتقدير في هذه الحالة . ولاستخدام هذه الطريقة يتعين تتبع الخطوات التالية :

(١) نحسب لكل مستوى دخل س ر (X_i) الاحتمال الخاص به ح̂ ر ($\hat{P}_i$) .

(٢) ثم نحسب لكل مستوى دخل س ر (X_i) القيمة ج ر (L_i) كما هي موضحة في الصيغة (٨-٥٣) .

(٣) لحل مشكلة عدم ثبات التباين نحصل على القيمة المرجحة للمتغيرات محل الاعتبار، حيث :

√ى ر ج ر = أ √ى ر + ب √ى ر س ر + √ى ر ء ر ....(٨-٥٦)

$$\sqrt{w_i}L_i = a\sqrt{w_i} + b\sqrt{w_i}X_i + \sqrt{w_i}u_i$$

أي أن :

ج*ر = أ √ى + ب س*ر + و ر ....(٨-٥٧)

$$L_i^* = a\sqrt{w_i} + bX_i^* + v_i$$

حيث :

ى ر = ن ز حˆ ر (١-حˆ ر) ← $w_i = n_j \hat{P}_i (1-\hat{P}_i)$

ج* ر = √ى ج ر ← $L_i^* = \sqrt{w_i L_i}$

س* ر = √ى س ر ← $X_i^* = \sqrt{w_i} X_i$

(٤) نستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة (٨-٥٧) والتي تعرف عندئذ بطريقة المربعات الصغرى المرجحة . ويلاحظ أنه لا يوجد هناك حد ثابت في هذه المعادلة ولذا يتعين مراعاة ذلك في التقدير .

(٥) كلما زاد حجم العينة كلما كانت المعلمات المقدرة أكثر دقة .

مثال (٨-٧)

تقدير نموذج Logit

افترض أن البيانات المعطاة بالجدول (٨-١٥) تتمثل فيْ ن ز = عدد الأسر الذين يحصلون على دخل س ر ، ن ر = عدد الأسر الذين يملكون منزلاً خاصاً ، س ر = الدخل .

جدول (٨-١٥)

الدخل والملكية الخاصة لمنزل

الدخل (ألف دولار) س ر	عدد الأسر لكل مستوى دخل (ن ز)	عدد الأسر المالكة لمنزل خاص (ن ر)
3	20	4
4	25	6
8	30	9
6	40	14
7	50	22
10	35	18
12	32	19
15	25	16
17	20	15
20	12	10

ولتقدير العلاقة بين الدخل والملكية الخاصة باستخدام نموذج Logit نجريُ الخطوات الموضح سابقا فنحصل على الجدول (٨-١٦) .

جدول (٨-١٦)

$X_i^* = X_i\sqrt{w_i}$	$L_i^* = L_i\sqrt{w_i}$	$\sqrt{w_i}$	$w_i = n_j\hat{P}_i(1-\hat{P}_i)$	$L_i = \ln(\hat{P}_i/1-\hat{P}_i)$	$\frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i}$	$(1-\hat{P}_i)$	$\hat{P}_i$	obs
5.3666	-2.4798	1.7889	3.2000	-1.386	0.2500	0.8000	0.2000	1
8.5417	-2.4615	2.1354	4.5600	-1.153	0.3158	0.7600	0.2400	2
20.0798	-2.1267	2.5099	6.3000	-0.847	0.4286	0.7000	0.3000	3
18.0997	-1.8674	3.0166	9.0999	-0.619	0.5385	0.6500	0.3500	4
24.5699	-0.8465	3.5099	12.320	-0.241	0.7857	0.5600	0.4400	5
29.5683	-0.1690	2.9568	8.7428	0.057	1.0588	0.4857	0.5143	6
33.3392	1.0543	2.7783	7.7187	0.379	1.4615	0.4062	0.5938	7
36.000	1.3809	2.4000	5.7600	0.5754	1.7778	0.3600	0.6400	8
32.92036	2.12745	1.9365	3.7500	1.0986	3.0000	0.2500	0.7500	9
25.8198	2.0778	1.2910	1.6667	1.6094	5.0000	0.1667	0.8333	10

وبتقدير العلاقة (٨-٥٧) نحصل على :

ج ر = - ١,٦٤ √ ى + ٠,١٦ س ر ....(٨-٥٨)

$$L_i^* = -1.64\sqrt{w_i} + 0.16X_i^*$$
$$S_{bi} \quad (0.19) \quad (0.019)$$
$$t \quad (-8.58) \quad (8.49)$$

ويمكن تفسير العلاقة المقدرة (٨-٥٨) :

(أ) كل زيادة في الدخل المرجح س*ر (X*) بمقدار وحدة واحدة تؤدي إلى زيادة اللوغاريتم المرجح لنسبة احتمال التملك إلى عدم التملك بمقدار ٠,١٦ . وإذا حصلنا على مقابل اللوغاريتم للمعلمة الانحدارية (٢,٧١٨)^٠,١٦ = ١,١٧ ، وطرحنا منها واحد نحصل على ٠,١٧ . وهذا يعني أن كل زيادة في الدخل المرجح بمقدار وحدة واحدة (ألف دولار) تؤدي إلى زيادة نسبة احتمال التملك إلى احتمال عدم التملك بمقدار ١٧ ٪ .

(ب) إذا أردنا تحديد احتمال أن يمتلك فرداً دخله ٢٠ ألف دولار منزلا خاصا ، نقوم بقسمة طرفي المعادلة (٨-٥٨) على √ى فنحصل على :

$\hat{ج}_ر$ = - ١,٦٤ + ٠,١٦ س ر

وبالتعويض عن قيمة س ر بالمقدار ٢٠ نحصل على :

$\hat{ج}_ر$ = لو ($\hat{ح}_ر$ / ١- $\hat{ح}_ر$) = - ١,٦٤ + ٠,١٦ (٢٠) = ١,٥٦

ومن ثم فإن مقابل لوغاريتم $\hat{ج}_ر$ = ($\hat{ح}_ر$ / ١- $\hat{ح}_ر$) = (٢,٧١٨)^{١,٥٦} = ٤,٧٥٨

$\hat{ح}_ر$ = ٤,٧٥٨ (١- $\hat{ح}_ر$) = ٠,٨٢٦

أي أن احتمال أن يمتلك فرداً دخله ٢٠ ألف دولار منزلاً خاصاً = ٨٢,٦ ٪ .

(جـ) حيث أن (ء ح / ء س) = ب ح ر (١ - ح ر) = (٠,١٦) (٠,٨٢٦) (٠,١٧٤) = ٠,٠٢

فإن هذا يعني أنه إذا زاد الدخل عن ٢٠ ألف دولار بمقدار وحده واحدة (ألف دولار) فإن احتمال أن يمتلك الفرد منزلا يزداد بمقدار ٢ ٪ .

الفصل التاسع

تحليل التباين

Analysis of Variance (ANOVA)

يهدف تحليل التباين إلى اختبار مدى أهمية المتغيرات المختلفة في تأثيرها على سلوك الظواهر الاقتصادية ، وذلك من خلال تحديد النسبة التي يعتبر كل متغير مسئول عنها في تغير الظاهرة . فإذا أردنا مثلاً أن نحدد أهم العوامل التي تؤثر في إنتاجية فدان القمح فتجعله مرتفعاً في بعض المناطق ومنخفضاً في بعض المناطق الأخرى فإننا نقوم باختبار أثر بعض العوامل التي يعتقد فيها أنها تؤثر على إنتاجية الأرض مثال : (أ) نوع السماد ، (ب) نوع البذور ، (حـ)نظام الري . ويساعدنا تحليل التباين في هذه الحالة على تحديد العوامل ذات التأثير الجوهري على إنتاجية الأرض من بين العوامل السابقة ، كما يساعدنا على تحديد الأهمية النسبية لكل عامل منها في تأثيره على هذه الإنتاجية .

ويركز هذا الفصل على عدد من النقاط الأساسية التي تتعلق بمفهوم التباين وأهم استخداماته في ثلاثة مباحث مستقلة ، وذلك على النحو التالي :

المبحث الأول : مفهوم تحليل التباين .

المبحث الثاني : اختبار مدى أهمية المتغيرات في تفسير الظاهرة .

المبحث الثالث : استخدامات تحليل التباين .

المبحث الأول

مفهوم تحليل التباين

حتى يمكن استيضاح فكرة تحليل التباين دعنا نأخذ المثال التالي :

افترض أن لدينا عينة من ٣٠ قطعة أرض مزروعة في مناطق متفرقة، وافترض أن وجه الاختلاف بين هذه القطع هو نوع السماد المستخدم ، حيث كانت موزعة كالآتي :

ثمانية قطع لا تستخدم سماد [ن ١ = ٨] .... (n_1)

وعشرة قطع تستخدم سماد " أ " [ن ٢ = ١٠] .... (n_2)

واثنتي عشرة قطعة تستخدم سماد " ب " [ن ٣ = ١٢] ...... (n_3)

حيث ن = ن ١ + ن ٢ + ن ٣ = ٨ + ١٠ + ١٢ = ٣٠ ...... (n)

أي أن :

ن = حجم العينة الكلية = n

ن و (n_i) = حجم العينة الفرعية و (i) ، حيث و (i) = ١ ، ٢ ، ٣... م (m) .

م (m) = عدد العينات الصغيرة [٣ في هذا المثال] .

والمطلوب هو اختبار ما إذا كان نوع السماد يعتبر أحد العوامل التي تؤثر على إنتاجية الأرض تأثيراً جوهرياً أم لا .

لإجراء هذا الاختبار باستخدام تحليل التباين يتعين كخطوة أولى القيام بتقسيم العينة الكبيرة إلى مجموعات أو عينات صغيرة وفقاً للمتغير المستقل الذي يراد اختبار تأثيره وهو نوع السماد في هذه الحالة . ويتضح هذا بالجدول (٩-١) ، حيث أن المجموعة " ١ " تحتوي على قطع الأرض التي لا تستخدم سماد ، والمجموعة " ٢ " تحتوي على قطع الأرض التي تستخدم سماد من النوع (أ) ، والمجموعة " ٣" تحتوي على قطع الأرض التي تستخدم سماد من النوع (ب) .

وليس من الضروري في هذه الحالة أن تتساوى أحجام العينات الصغيرة حيث ن ١ = ٨ ≠ ن ٢ = ١٠ ≠ ن ٣ = ١٢ . كما ليس من الضروري أن تتساوى مساحات

جميع القطع ، ذلك لأن وحدة القياس هنا هي إنتاجية الفدان وليس إنتاج القطعة ككل. فإذا افترضنا أن إنتاجية الفدان في القطع المختلفة كانت كما بالجدول (٩-١) ، فإننا نلاحظ أن إنتاجية فدان القمح تختلف من قطعة لأخرى كما هو واضح بالعمود (١) في الجدول (٩-١) . والسؤال الذي نبحث لجواب عنه الآن هو: هل لنوع السماد تأثير جوهري على إنتاجية الفدان من القمح ؟

وللإجابة على هذا السؤال يتعين أن نقيس أولاً مقدار الاختلاف أو التغير في إنتاجية الفدان بين القطع المختلفة . ولعله من الممكن عمل ذلك من خلال حساب مجموع مربعات انحرافات قيم الإنتاجية بالقطع الزراعية المختلفة عن الوسط الحسابي للعينة الكلية . فإذا رمزنا إلى إنتاجية الفدان بالرمز ص ر ، ومتوسط الإنتاجية للفدان بالعينة الكلية بالرمز $\overline{ص}$ حيث :

$$\overline{ص} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}$$

∴ التغير الكلي = غ ر = $\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^2$ .... (٩-١)

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

ويلاحظ في هذا الصدد أن التغير الكلي في الإنتاجية يحتوى على عنصرين :

(١) تغير عشوائي يرجع لعوامل عشوائية .

(٢) تغير حقيقي يرجع لاختلاف نوعية السماد .

وسوف نفرق بين هذين التغيرين فيما يلي .

جدول (٩-١)- إنتاجية الفدان في القطع المختلفة

رقم القطعة	(١) إنتاجية الفدان بالإردب لكل العينة	(٢) إنتاجية الفدان بالمجموعة ١ (لا سماد)	(٣) إنتاجية الفدان بالمجموعة ٢ سماد (أ)	(٤) إنتاجية الفدان بالمجموعة ٣ سماد (ب)	Σ س$_{ور}$ ΣY_{ji}
	س$_{ر}$ (Y_i)	س$_{1ر}$ (Y_{1i})	س$_{2ر}$ (Y_{2i})	س$_{3ر}$ (Y_{3i})	
١	١٠	س$_{١١}$ = ١٠			$\Sigma Y_1 i =$ $\sum_{ر=1}^{8}$ س$_{1ر}$ = ٨٠
٢	١٠	س$_{٢١}$ = ١٠			
٣	١٠	س$_{٣١}$ = ١٠			
٤	١٢	س$_{٤١}$ = ١٢			
٥	١١	س$_{٥١}$ = ١١			
٦	٨	س$_{٦١}$ = ٨			
٧	١٠	س$_{٧١}$ = ١٠			
٨	٩	س$_{٨١}$ = ٩			
٩	١٥		س$_{١٢}$ = ١٥		$\Sigma Y_2 i =$ $\sum_{ر=1}^{10}$ س$_{2ر}$ = ١٥٠
١٠	١٧		س$_{٢٢}$ = ١٧		
١١	١٣		س$_{٣٢}$ = ١٣		
١٢	١٤		س$_{٤٢}$ = ١٤		
١٣	١٦		س$_{٥٢}$ = ١٦		
١٤	١٥		س$_{٦٢}$ = ١٥		
١٥	١٧		س$_{٧٢}$ = ١٧		
١٦	١٥		س$_{٨٢}$ = ١٥		
١٧	١٣		س$_{٩٢}$ = ١٣		
١٨	١٥		س$_{١٠،٢}$ = ١٥		
١٩	٢٠			س$_{١٣}$ = ٢٠	$\Sigma Y_3 i =$ $\sum_{ر=1}^{12}$ س$_{3ر}$ = ٢٤٠
٢٠	١٨			س$_{٢٣}$ = ١٨	
٢١	٢٢			س$_{٣٣}$ = ٢٢	
٢٢	٢٣			س$_{٤٣}$ = ٢٣	
٢٣	١٧			س$_{٥٣}$ = ١٧	
٢٤	٢٠			س$_{٦٣}$ = ٢٠	
٢٥	٢٣			س$_{٧٣}$ = ٢٣	
٢٦	١٩			س$_{٨٣}$ = ١٩	
٢٧	١٧			س$_{٩٣}$ = ١٧	
٢٨	٢١			س$_{١٠،٣}$ = ٢١	
٢٩	٢٠			س$_{١١،٣}$ = ٢٠	
٣٠	٢٠			س$_{١٢،٣}$ = ٢٠	

(٩-١-١) التغير العشوائي :

عندما نقسم العينة الكبيرة إلى مجموعات أو عينات صغيرة فإن المفردات الخاصة بكل مجموعة صغيرة تكون متماثلة من حيث نوع السماد المستخدم ، فكل قطع المجموعة ١ لا يستخدم فيها سماد ، وكل قطع المجموعة ٢ يتم استخدام نوع واحد من السماد فيها هو النوع (أ) ، وكل قطع المجموعة ٣ يتم استخدام نوع واحد من السماد فيها هو النوع (ب) . ومن ثم فإن اختلاف إنتاجية الفدان بين قطع المجموعة الواحدة لا يمكن أن يرجع لاختلاف نوع السماد ، وإنما يرجع لعوامل عشوائية . فيلاحظ بالجدول (٩-١) أن إنتاجية الفدان تختلف بين قطع كل مجموعة . ومثل هذا الاختلاف يرجع لعوامل عشوائية كالتقلبات الجوية ، طالما أن جميع العوامل الموضوعية كنوع السماد متماثلة بين مفردات كل مجموعة . ولذلك فإن التغير الداخلي Within Group Variation يسمى بالتغير العشوائي ويمكن قياسه بصفة مستقلة على النحو التالي :

نقوم بحساب الوسط الحسابي لكل عينة جزئية حيث :

$$\bar{ص}_و = \frac{\sum_{ر=1}^{ن_و} ص_{ور}}{ن_و} \quad \longrightarrow \quad \bar{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}}{n_j}$$

$\bar{ص}_و$ = الوسط الحسابي للعينة الجزئية و .

$\sum ص_{ور}$ = مجموع الإنتاجيات بالمجموعة و .

$ن_و$ = حجم العينة الجزئية و.

ثم نقوم بحساب مقدار تشتت القيم حول الوسط الحسابي $\bar{ص}_و$ داخل كل مجموعة أو عينة جزئية من العينات كما يلي :

$غ_{د١}$ = التغير الداخلي بالمجموعة ١ = $\sum_{ر=1}^{ن_١} (ص_{١ر} - \bar{ص}_١)^٢ = ESS_1$

غ د٢ = التغير الداخلي بالمجموعة ٢ = $\sum_{ر=1}^{ن_2} (ص_{2ر} - \overline{ص}_2)^2$ = ESS_2

غ د٣ = التغير الداخلي بالمجموعة ٣ = $\sum_{ر=1}^{ن_3} (ص_{3ر} - \overline{ص}_3)^2$ = ESS_3

وبجمع هذه القيم الثلاثة نحصل على مقياس للتغير العشوائي والذي نرمز له :

$$غ_د = \sum_{و=1}^{م} غ_{دو} = \sum_{و=1}^{م} \sum_{ر=1}^{ن_و} (ص_{ور} - \overline{ص}_و)^2 \quad ..(٩-٢)$$

$$ESS = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{nj} \left(Y_{ji} - \bar{Y}_j\right)^2$$

(٩-١-٢) التغير الحقيقي

إذا قارنا متوسط الإنتاجية بالمجموعة ١ ومتوسط الإنتاجية بالمجموعة ٢ و متوسط الإنتاجية بالمجموعة ٣ نجد أن هناك اختلافاً بينهم حيث :

$$\overline{ص}_1 = \frac{\sum_{ر=1}^{8} ص_{1ر}}{ن_1} = ٨٠ \div ٨ = ١٠ = \overline{Y_1}$$

$$\overline{ص}_2 = \frac{\sum_{ر=1}^{10} ص_{2ر}}{ن_2} = ١٥٠ \div ١٠ = ١٥ = \overline{Y_2}$$

$$\overline{ص}_3 = \frac{\sum_{ر=1}^{12} ص_{3ر}}{ن_3} = ٢٤٠ \div ١٢ = ٢٠ = \overline{Y_3}$$

ومثل هذا الاختلاف بين متوسطات المجموعات المختلفة يمكن إرجاعه لاختلاف نوع السماد ، ولذا فإنه يسمى " التغير الحقيقي " ويطلق عليه أيضاً التغير بين المجموعات Across Group Variation . ومن الممكن الحصول على قيمة التغير الحقيقي عن طريق قياس انحرافات المتوسطات $\bar{ص}_1$ ، $\bar{ص}_2$ ، $\bar{ص}_3$ عن المتوسط العام للعينة $\bar{ص}$ حيث :

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص_ر}{ن} = \frac{\sum_{و=1}^{م} \sum_{ر=1}^{ن_و} ص_{ر و}}{ن} = \frac{٢٤٠ + ١٥٠ + ٨٠}{٣٠}$$

$$\therefore \bar{ص} = ٤٧٠ \div ٣٠ = ١٥{,}٧$$

ولقياس التغير الحقيقي الكلي نحسب التغير الحقيقي الجزئي لكل مجموعة كما يلي:

$$غ_{ق1} = \text{التغير الحقيقي بالمجموعة ١} = \sum_{1}^{ن_1} (\bar{ص}_1 - \bar{ص})^2 = ن_1 (\bar{ص}_1 - \bar{ص})^2$$

$$RSS_1 = n_1 (\bar{Y}_1 - \bar{Y})^2$$

ويلاحظ في هذه الحالة أن الانحراف ($\bar{ص}_1 - \bar{ص}$) يعتبر واحد لجميع قيم العينة الفرعية ولذلك فإن مجموع مربعات هذه الانحرافات لكل قيم العينة يمكن الحصول عليه بضرب عدد القيم ($ن_1$) في مربع انحرافات واحد ، وكذلك الأمر بالنسبة للقيمتين الفرعيتين ٢ ، ٣ :

$$غ_{ق2} = \text{التغير الحقيقي بالمجموعة ٢} = \sum_{1}^{ن_2} (\bar{ص}_2 - \bar{ص})^2 = ن_2 (\bar{ص}_2 - \bar{ص})^2 = RSS_2$$

$$غ_{ق3} = \text{التغير الحقيقي بالمجموعة ٣} = \sum_{1}^{ن_3} (\bar{ص}_3 - \bar{ص})^2 = ن_3 (\bar{ص}_3 - \bar{ص})^2 = RSS_3$$

وبجمع هذه القيم نحصل على مقياس للتغير الحقيقي بالعينة ككل كما يلي :

$$\text{غ}_{\text{ق}} = \text{التغير الحقيقي} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{غ}_{\text{ق و}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^{2} \quad .\ (\text{٩-٣-أ})$$

أي أن :

$$\text{غ}_{\text{ق}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{و}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^{2} \quad \ldots\ldots\ (\text{٩-٣-ب})$$

Σ

$$RSS = \sum_{j=1}^{m} n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2$$

(٩-١-٣) التغير الكلى :

من الممكن إثبات أن :

التغير الكلى في الإنتاجية = التغير العشوائي + التغير الحقيقي

$$\text{غ}_{\text{د}} = \text{غ}_{\text{ه}} + \text{غ}_{\text{ق}}$$

$$TSS = ESS + RSS$$

فمن المعادلة (٩-١) نجد أن :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\text{ص}_{\text{و ر}} - \bar{\text{ص}})^{2}$$

وبإضافة $\bar{\text{ص}}_{\text{و}}$ وطرحه في نفس الوقت من الطرف الأيسر نحصل على :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} [(\text{ص}_{\text{و ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}}) + (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})]^{2}$$

وبحل ما بداخل القوس الأكبر نحصل على :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\text{ص}_{\text{و ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}})^{2} + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^{2}$$

$$+ 2 \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\text{ص}_{\text{و ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}})(\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})$$

ويلاحظ أن الحد الأخير من هذه المعادلة يمكن كتابته على النحو التالي:

$$٢ \left[\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}}) \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}}) \right]$$

وحيث أن :

$$\sum (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}}) = \sum \text{ص}_{\text{ر}} - \sum \bar{\text{ص}} \,,$$

$$= \sum \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ن} \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ص}_{\text{ر}} = \text{صفر}$$

∴ الحد الأخير كله = صفر ومن ثم فإن :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}}_{\text{و}})^2 + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{و}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^2 \quad \text{.............. (٩-٤)}$$

ومما سبق يمكن القول أن :

النسبة التي يفسرها نوع السماد من التغير في الإنتاجية = $\frac{\text{غ}_{\text{ف}}}{\text{غ}_{\text{د}}} = \frac{RSS}{TSS}$

والنسبة التي تعزى للعوامل العشوائية = $\frac{\text{غ}_{\text{ه}}}{\text{غ}_{\text{د}}} = \frac{ESS}{TSS}$

وبنفس الطريقة يمكن استخدام تحليل التباين في تحديد النسبة من التغير الكلى في الإنتاجية التي ترجع لنوع البذور أو نظام الري أو غيرها . كما يمكن تحديد الأهمية النسبية لكل متغير في تفسيره الظاهرة بناءاً على ذلك . ومن أهم استخداماته :

(١) اختبار مدى أهمية المتغيرات في تفسير الظاهرة .

(٢) اختبار معنوية معادلة الانحدار ككل .

(٣) اختبار معنوية التحسن في المقدرة التفسيرية الناجم عن إضافة متغير جديد .

(٤) اختبار معنوية الاختلاف بين معلمات تم الحصول عليها من عينات مختلفة .

(٥) اختبار مدى استقرار معاملات الانحدار عند زيادة حجم العينة .

(٦) اختبار القيود المفروضة على معاملات دالة ما .

وسوف نتعرض لهذه الاستخدامات بالتفصيل في المباحث التالية .

المبحث الثاني

اختبار مدى أهمية المتغيرات في تفسير الظاهرة

يتعين أن نفرق منذ البداية بين نوعين من تحليل التباين :

(١) تحليل التباين ذو الاتجاه الواحد One-way ANOVA وهو يختص باختبار أثر متغير تفسيري واحد على الظاهرة محل البحث .

(٢) تحليل التباين ذو الاتجاهين Two-way ANOVA وهو يختص باختبار أثر متغيرين تفسيريين على الظاهرة محل البحث ، كما أنه نموذج للحالات التي يوجد فيها أكثر من متغير تفسيري واحد .

ويلاحظ أن المتغيرات التفسيرية في حالة تحليل التباين غالباً ما تكون متغيرات نوعية كنوع السماد مثلاً أو نوع البذور . وإن كان هذا لا يمنع أن تكون المتغيرات التفسيرية كمية .

(٩-٢-١) تحليل التباين ذو الاتجاه الواحد

دعنا نفترض أن لدينا بيانات عن الادخار الخاص بعينه من الأسر تتماثل في الحجم والدخل والموطن ولكنها تختلف في المستوى التعليمي لرب الأسرة . وافترض أننا نريد اختبار مدى تأثير المستوى التعليمي على مستوى الادخار السنوي وذلك باستخدام تحليل التباين .

فإذا كانت البيانات المعطاة هي كما بالجدول (٩-٢) ، فلكي نختبر مدى تأثير المستوى التعليمي لرب الأسرة على مستوى الادخار يتعين إتباع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقسيم قيم الادخار بالعينة ككل إلى عينات أو مجموعات صغيرة وفقاً للمتغير التفسيري وهو المستوى التعليمي في هذه الحالة . فإذا كان هناك ثلاث مستويات تعليمية بين أفراد العينة هي : بدون تعليم ، وتعليم متوسط ، وتعليم عالي ، فمن الممكن تقسيم هذه العينة إلى ثلاث مجموعات صغيرة وذلك كما يتضح بالجدول (٩-٢) .

مثال (٩-١)

أثر المستوى التعليمى على الادخار

جدول (٩-٢)

رقم الأسرة	ادخار الأسرة (بالمائة جنيه) ص ر	ادخار الأسرة بالمجموعة / بدون تعليم ص ١ر	ادخار الأسرة بالمجموعة / تعليم متوسط ص ٢ر	ادخار الأسرة بالمجموعة / تعليم عالي ص ٣ر	$\sum$ ص ر
١	١٠	١٠			
٢	١١	١١			$\sum Y_{1j} = \sum_{ر=1}^{ه}$ ص ١ر $= ٥٠$
٣	٩	٩			
٤	١٢	١٢			
٥	٨	٨			
٦	١٥		١٥		
٧	١٦		١٦		$\sum Y_{2j} = \sum_{ر=1}^{ه}$ ص ٢ر $= ٧٥$
٨	١٤		١٤		
٩	١٣		١٣		
١٠	١٧		١٧		
١١	٢٠			٢٠	
١٢	١٨			١٨	
١٣	٢٢			٢٢	$\sum Y_{3j} = \sum_{ر=1}^{ه}$ ص ٣ر $= ١٠٠$
١٤	٢١			٢١	
١٥	١٩			١٩	

(٢) نقوم بحساب متوسط الادخار لكل عينة صغيرة فنحصل على $\bar{ص}_1$ ، $\bar{ص}_2$ ، $\bar{ص}_3$. ويلاحظ في هذه الحالة أنه إذا كان مستوى التعليم ذو تأثير جوهري على متوسط الادخار يتعين أن تكون الفروق بين متوسطات الادخار الخاصة بالمجموعات الثلاثة ذات المستويات التعليمية المختلفة كبيرة وجوهرية . أما إذا كانت هذه المتوسطات

الفرعية متساوية فيما بينها ومن ثم مساوية للمتوسط العام ص ، أو كانت الفروق بينها صغيرة وغير جوهرية رغم اختلاف المستويات التعليمية للمجموعات المختلفة ، فإن هذا يعني أن مستوى التعليم لا يؤثر على الادخار ، وأن الاختلافات بين مستويات الادخار إن وجدت ترجع لعوامل عشوائية . ومن ثم فإن الفرض الذي يتعين اختباره في هذه الحالة هو : فرض العدم :

$$\bar{\text{ص}}_1 = \bar{\text{ص}}_2 = \bar{\text{ص}}_3 = \bar{\text{ص}} \longrightarrow \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = \bar{Y}_3 = \bar{Y}$$

في مواجهة :

الفرض البديل : المتوسطات غير المتساوية

فإذا تم قبول فرض العدم الذي يعني أن $\bar{\text{ص}}_1 - \bar{\text{ص}} = \bar{\text{ص}}_2 - \bar{\text{ص}} = \bar{\text{ص}}_3 - \bar{\text{ص}}$ = صفر ، ورفض الفرض البديل ، فإن هذا يعني أن المستوى التعليمي ليس له تأثير جوهري على مستوى الادخار . أما إذا تم رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل الذي يعني أن : $\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}} \neq$ صفر ، فإن هذا يتضمن أن المستوى التعليمي لرب الأسرة له تأثير جوهري على مستوى الادخار .

(٣) والسؤال الآن هو : كيف نختبر ما إذا كان الاختلاف بين متوسطات المجموعات الفرعية اختلافاً جوهرياً يعبر عن تغير حقيقي ولا يرجع لمجرد الصدفة أم لا ؟

يمكن قياس الفروق بين متوسطات المجموعات الفرعية عن طريق تباين هذه المتوسطات حول المتوسط العام . وهذا المقياس يتمثل في :

$$\text{م}_{\text{غ ق}} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_{\text{و}}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{م}-1} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{و}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{م}-1} \quad \text{....(٩-٥-أ)}$$

$$\text{أي أن : م}_{\text{غ ق}} = \frac{\text{غ ق}}{\text{م} - 1} \quad \text{.........................(٩-٥-ب)}$$

$$VRSS \quad \frac{RSS}{m - 1}$$

حيث :

م غ ق = متوسط مربعات انحرافات المتوسطات الفرعية عن المتوسط العام .

م = عدد العينات الفرعية ، م – ١ بمثابة درجات حرية .

غ ق = التغير الحقيقي المعرف بالمعادلتين (٩–٣–أ) ، (٩–٣–ب) .

وحتى يكون الاختلاف بين المتوسطات جوهرياً يتعين أن يفوق المستوى الراجع للعوامل العشوائية بمقدار معين . والاختلاف الراجع للعوامل العشوائية يمكن قياسه بالتباين التالي :

$$\text{م}_{\text{غ د}} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_\text{و}} (\text{ص}_{\text{و ر}} - \overline{\text{ص}}_\text{و})^2}{\text{ن} - \text{م}} \quad \text{.............. (٩–٦–أ)}$$

أي أن :

$$\text{م}_{\text{غ د}} = \frac{\text{غ}_\text{د}}{\text{ن} - \text{م}} \quad \text{.............................(٩–٦–ب)}$$

$$VESS = \frac{ESS}{n - m}$$

حيث :

م غ د = متوسط مربعات انحرافات قيم المتغير التابع داخل المجموعات عن متوسطها الفرعي.

ن – م = درجات الحرية حيث $\text{ن} = \sum \text{ن}_\text{و}$

م = عدد المعلمات بالعينات الفرعية (عدد المتوسطات) .

غ د = التغير العشوائي كما هو معرف بالمعادلة (٩–٢) .

وبمعنى آخر فإن النسبة $\frac{\text{م}_{\text{غ ق}}}{\text{م}_{\text{غ د}}}$ يتعين أن تفوق حد أدنى معين حتى يكون الاختلاف بين المتوسطات الفرعية جوهرياً . وتسمى هذه النسبة (ف) المحسوبة ويشار لها "ف *" .

$$ف^* = \frac{م\,غ_ق}{م\,غ_د} = \frac{\sum_{و=1}^{م} ن_و \left(\bar{ص}_و - \bar{ص}\right)^2 \Big/ م-1}{\sum_{و=1}^{م} \sum_{ر=1}^{ن_و} \left(ص_{ور} - \bar{ص}_و\right)^2 \Big/ ن-م} \quad ..(٩-٧-أ)$$

$$F^* = \frac{VRSS}{VESS}$$

أي أن :

$$ف_{\text{المحسوبة}} = \frac{\text{التباين المقدر من متوسطات العينات الفرعية}}{\text{التباين المقدر من القيم داخل العينات الفرعية}} = \frac{\text{تباين ما بين المجموعات}}{\text{تباين ما بداخل المجموعات}} \quad ....(٩-٧-ب)$$

ويرمز الحرف " ف " إلى اسم العالم Fisher الذي يرجع إليه الفضل في التوصل لتحليل التباين .

أما عن الحد الأدنى الذي يتعين أن تفوقه النسبة (ف *) فهي (ف) الجدولية التي يمكن الحصول عليها من جداول (ف) عند مستوى معنوية معين ٥ ٪ أو ١ ٪ ، ودرجات حرية : $ن_ق = م - ١$ ، $ن_د = ن - م$.

وبمقارنة (ف *) ، (ف) الجدولية نصل إلى ما يلي :

(أ) إذا كانت ف * > ف نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ومن ثم يعتبر المتغير التفسيري في هذه الحالة (وهو المستوى التعليمي) ذو تأثير جوهري على مستوى الادخار . أي أن الفروق بين متوسطات العينات الفرعية تكون جوهرية في هذه الحالة . ويمكن تحديد النسبة التي يفسرها المستوى التعليمي من التغير في الادخار باستخدام النسبة $\frac{غ_ق}{غ_ك}$. أما النسبة التي ترجع للعوامل العشوائية فهي : $\frac{غ_د}{غ_ك}$

(ب) إذا كانت ف * < ف نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل . ومن ثم فإن المتغير التفسيري محل الاهتمام يكون تأثيره غير جوهري على المتغير التابع . أي أن الفروق بين متوسطات العينات الفرعية تكون غير جوهرية .

(٤) يمكن تبسيط الحسابات السابقة بإجراء بعض الاختصارات كما يلي :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} (\text{ص}_{\text{ور}} - \bar{\text{ص}})^2$$

$$= \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} (\text{ص}_{\text{ور}}^2 - \bar{\text{ص}}^2 - 2\,\text{ص}_{\text{ور}}\,\bar{\text{ص}})$$

$$= \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ص}_{\text{ور}}^2 + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \bar{\text{ص}}^2 - 2\,\bar{\text{ص}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ص}_{\text{ور}}$$

$$= \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ص}_{\text{ور}}^2 + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{و}}\,\bar{\text{ص}}^2 - 2\,\bar{\text{ص}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}$$

ومع ملاحظة أن الحد الثاني $= \bar{\text{ص}}^2 \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{و}} = \text{ن}\,\bar{\text{ص}}^2$

وبضرب الحد الثالث في ن وقسمته على ن نحصل على :

$$\text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ص}_{\text{ور}}^2 + \text{ن}\,\bar{\text{ص}}^2 - 2\,\text{ن}\,\bar{\text{ص}}^2$$

$$\therefore \text{غ}_{\text{د}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ص}_{\text{ور}}^2 - \text{ن}\,\bar{\text{ص}}^2 \quad \text{.................... (٩-٨)}$$

$$TSS = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{nj} Y_{ji}^2 - n\bar{Y}^2$$

ومن ناحية أخرى :

$$\text{غ}_{\text{ق}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} (\bar{\text{ص}}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})^2$$

$$\therefore \text{غ}_{\text{ق}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \bar{\text{ص}}_{\text{و}}^2 + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \text{ن}_{\text{و}}\,\bar{\text{ص}}^2 - 2 \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن و}} \bar{\text{ص}}_{\text{و}}\,\bar{\text{ص}}$$

$$غ_ق = \sum_{و=1}^{م} ن_و \bar{ص}_و^2 + \sum_{و=1}^{م} ن_و \bar{ص}^2 - 2 \sum_{و=1}^{م} ن_و \bar{ص}_و \bar{ص}$$

$$غ_ق = \sum_{و=1}^{م} ن_و \left(\sum_{ر=1}^{ن_و} \frac{ص_{ور}}{ن_و} \right)^2 + ن \bar{ص}^2 - 2 \bar{ص} \sum ص_{ور}$$

$$غ_ق = \sum_{و=1}^{م} \frac{(\sum ص_{ور})^2}{ن_و} - ن \bar{ص}^2 \quad ....\quad (9-9)$$

$$RSS = \sum_{j=1}^{m} \frac{(\sum Y_{ji})^2}{n_j} - n \bar{Y}^2$$

ومن الممكن الحصول على غ $_د$ كما يلي :

$$غ_د = غ_د - غ_ق \quad ....\quad (9-10)$$

$$ESS = TSS - RSS$$

ومن ثم يمكن حساب ف * كما سبق وأوضحنا .

(٥) وبتطبيق هذا التحليل على مثالنا المعطى عن الادخار كما هو موضح في جدول (٩-٢) نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٩-٣) .

ووفقاً للمعادلة (٩-٨) نجد أن :

$$غ_د = (٥١٠ + ١١٣٥ + ٢٠١٠) - ١٥ (١٥ \times ١٥) = ٣٦٥٥ - ٣٣٧٥ = ٢٨٠$$

ووفقاً للمعادلة (٩-٩)نجد أن :

$$غ_ق = \left(\frac{(٥٠)^2}{٥} + \frac{(٧٥)^2}{٥} + \frac{(١٠٠)^2}{٥} \right) - ٣٣٧٥ = ٥٠٠ + ١١٢٥ + ٢٠٠٠ - ٣٣٧٥ = ٢٥٠$$

$$غ_د = غ_د - غ_ق = ٢٨٠ - ٢٥٠ = ٣٠$$

$$\therefore م غ_ق = \frac{غ_ق}{م-١} = \frac{٢٥٠}{٣-١} = \frac{٢٥٠}{٢} = ١٢٥$$

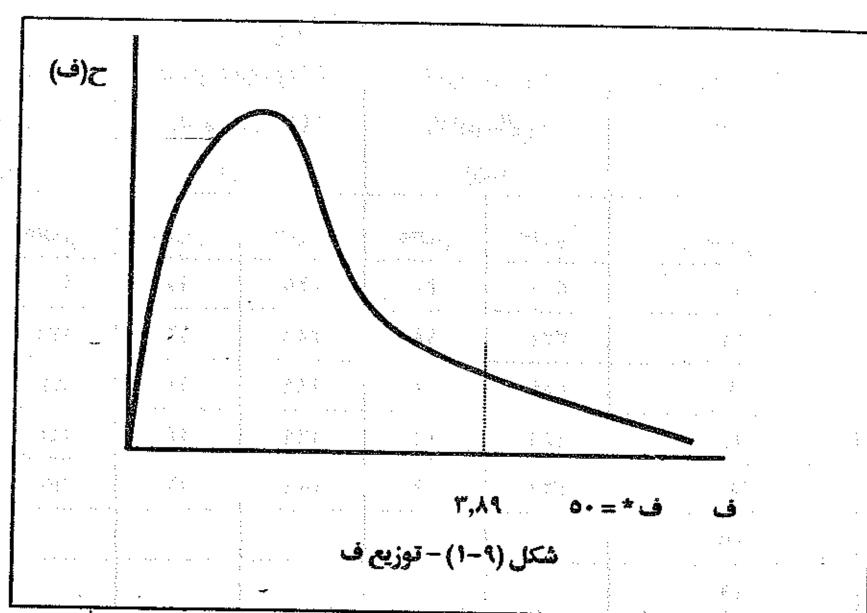
$$م غ_د = \frac{غ_د}{ن-م} = \frac{٣٠}{١٥ - ٣} = \frac{٣٠}{١٢} = ٢,٥$$

$$\text{ف}^* = \frac{\overline{\text{م غ}}_{\text{ق}}}{\overline{\text{م غ}}_{\text{د}}} = \frac{125}{2,5} = 50$$

جدول (٩-٣)

ادخار المجموعة ١ (بدون تعليم) (ن_1)		ادخار المجموعة ٢ (تعليم متوسط) (ن_2)		ادخار المجموعة ٣ (تعليم عالي) (ن_3)		ادخار العينة ككل (ن)
$\text{ص}_{1\text{ر}}$	$\text{ص}_{1\text{ر}}^2$	$\text{ص}_{2\text{ر}}$	$\text{ص}_{2\text{ر}}^2$	$\text{ص}_{3\text{ر}}$	$\text{ص}_{3\text{ر}}^2$	$\text{ص}_{\text{ور}}$
١٠	١٠٠	١٥	٢٢٥	٢٠	٤٠٠	١٠
١١	١٢١	١٦	٢٥٦	١٨	٣٢٤	١١
٩	٨١	١٤	١٩٦	٢٢	٤٨٤	٩
١٢	١٤٤	١٣	١٦٩	٢١	٤٤١	١٢
٨	٦٤	١٧	٢٨٩	١٩	٣٦١	٨
						١٥
						١٦
						١٤
						١٣
						١٧
						٢٠
						١٨
						٢٢
						٢١
						١٩
$\sum \text{ص}_{1\text{ر}}$ = ٥٠ ن_1 = ٥ $\bar{\text{ص}}_1$ = ١٠	$\sum \text{ص}_{1\text{ر}}^2$ = ٥١٠	$\sum \text{ص}_{2\text{ر}}$ = ٧٥ ن_2 = ٥ $\bar{\text{ص}}_2$ = ١٥	$\sum \text{ص}_{2\text{ر}}^2$ = ١١٣٥	$\sum \text{ص}_{3\text{ر}}$ = ١٠٠ ن_3 = ٥ $\bar{\text{ص}}_3$ = ٢٠	$\sum \text{ص}_{3\text{ر}}^2$ = ٢٠١٠	$\sum\sum \text{ص}_{\text{ور}}$ = ٢٢٥ ن = ١٥ $\bar{\text{ص}}$ = ٢٢٥ ÷ ١٥ = ١٥

(٦) بالبحث عن ف الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ ودرجات حرية ن ق = ٢ ، ن د = ١٢ نجدها ف = ٣,٨٩ .



شكل (٩-١) – توزيع ف

وحيث ف * > ف نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ومن ثم فإن الاختلاف بين المتوسطات الفرعية جوهري مما يتضمن أن المستوى التعليمي يؤثر على مستوى الادخار تأثيراً جوهرياً عند مستوى معنوية ٥ ٪ .

وبالبحث عن ف الجدولية عند مستوى معنوية ١ ٪ ، ودرجات حرية ن ق = ٢ ، ن د = ١٢ نجد ف = ٦,٩٣ . ومن ثم فإن ف * > ف الجدولية مما يتضمن أن المستوى التعليمي يؤثر على مستوى الادخار تأثيراً جوهرياً عند مستوى معنوية ١ ٪ .

(٧) يمكن تحديد النسبة التي يفسرها المستوى التعليمي من التغير في الادخار من خلال النسبة التالية :

$$\frac{غ_ق}{غ_د} = \frac{٢٥٠}{٢٨٠} = \frac{٢٥٠}{٢٨٠} = ٨٩,٣ ٪$$

وهي نسبة عالية نسبياً . أما عن النسبة التي ترجع إلى الحد العشوائي فهي :

$$\frac{غ_د}{غ_د} = \frac{٣٠}{٢٨٠} = ١٠,٧ ٪$$

(٨) يمكن تلخيص النتائج السابقة فيما يسمى بجدول تحليل التباين (٩-٤) .

جدول (٩-٤)

جدول تحليل التباين

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	ف* ، ف
ما بين ما بداخل	غ ن = ٢٥٠ غ د = ٣٠	م - ١ = ٢ ن - م = ١٢	م غ ن = ١٢٥ م غ د = ٢,٥	ف* = ١٢٥ / ٢,٥
الكلي	غ ي = ٢٨٠	(ن - م) + (م-١) = (ن - ١) = ١٤		ف٠,٠٥ ، ٢ ، ١٢ = ٣,٨٩ ف٠,٠١ ، ٢ ، ١٢ = ٦,٩٣

(٩-٢-٢) تحليل التباين ذو الاتجاهين :

يهتم تحليل التباين ذو الاتجاهين باختبار أثر متغيرين تفسيريين على متغير تابع ما . فإذا كان لدينا عينة من الأسر التي تتماثل في الحجم والدخل وتختلف في المستوى التعليمي لرب الأسرة وفي الموطن ، فإن تحليل التباين ذو الاتجاهين يمكننا من اختبار أثر المستوى التعليمي والموطن كمتغيرين تفسيريين على مستوى الادخار بالنسبة لهذه العينة . فإذا رمزنا للمستوى التعليمي بالرمز " أ " (A) حيث " أ " تشير لثلاثة مراتب تعليمية :

١ - بدون تعليم ، ٢ - تعليم متوسط ، ٣ - تعليم عالي (أي أن أ = ١ ، ٢ ، ٣) ، ورمزنا للموطن بالرمز " ب " (B) حيث " ب " تشير لموقعين هما : الريف (ى) ، الحضر (ح) (أي أن ب = ى ، ح) ، يمكن استخدام تحليل التباين في اختبار أثر (أ) ، (ب) على الادخار كما هو موضح بالمثال (٩-٢) .

مثال (٩-٢)

أثر الموطن والمستوى التعليمي على الادخار

افترض أن البيانات المتوفرة عن عينة الأسر كانت كما بالجدول (٩-٥) .

جدول (٩-٥)

ادخار عينة من الأسر

رقم الأسرة	ادخار الأسرة السنوي بالألف جنيه	المستوى التعليمي لرب الأسرة	الموطن
١	١٠	بدون تعليم	حضر
٢	١١	بدون تعليم	حضر
٣	٩	بدون تعليم	ريف
٤	١٢	بدون تعليم	ريف
٥	٨	بدون تعليم	حضر
٦	١٥	تعليم متوسط	ريف
٧	١٦	تعليم متوسط	حضر
٨	١٤	تعليم متوسط	ريف
٩	١٣	تعليم متوسط	حضر
١٠	١٧	تعليم متوسط	حضر
١١	٢٠	تعليم عالي	ريف
١٢	١٨	تعليم عالي	ريف
١٣	٢٢	تعليم عالي	حضر
١٤	٢١	تعليم عالي	حضر
١٥	١٩	تعليم عالي	حضر

فمن الممكن اختبار مدى تأثير كلٍ من المستوى التعليمي والموطن على مستوى الادخار بإتباع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتصنيف بيانات العينة وفقاً لكلٍ من المستوى التعليمي والموطن كما بالجدول (٩-٦) :

جدول (٩-٦)

الادخار مصنف وفقاً للمستوى التعليمي والموطن

مستوى التعليم / الموطن	بدون تعليم ١	تعليم متوسط ٢	تعليم عالي ٣
حضر (ح) (U)	١٠ ١١ ٨	١٦ ١٣ ١٧	٢٢ ٢١ ١٩
ص حر (Y_{ui})	ص ح١ = ٢٩ (Y_{u1})	ص ح٢ = ٤٦ (Y_{u2})	ص ح٣ = ٦٢ (Y_{u3})
ريف (ى) (R)	٩ ١٢	١٥ ١٤	٢٠ ١٨
ص ىر (Y_{Ri})	ص ى١ = ٢١ (Y_{R1})	ص ى٢ = ٢٩ (Y_{R2})	ص ى٣ = ٣٨ (Y_{R3})

(٢) ثم نقوم بعد ذلك بتلخيص الجدول السابق في جدول آخر مختصر يأخذ الصيغة التالية كما هو موضح بالجدول (٩-٧) :

ومن الممكن القول في هذه الحالة أن :

التغير الكلي في الادخار = تغير حقيقي يرجع لاختلاف المستوى التعليمي + تغير حقيقي يرجع لاختلاف الموطن + تغير عشوائي

اي أن :

غ د = غ ق أ + غ ق ب + غ ء .... (٩-١١)

$$TSS = RSS_A + RSS_B + ESS$$

جدول (٩-٧)

أ = ١، ٢، ٣

المستوى التعليمي / الموطن	بدون	متوسط	عالي	مجموع = ب و (B_j)
حضر	ص ح ١ (Y_{u1})	ص ح ٢ (Y_{u2})	ص ح ٣ (Y_{u3})	$\sum_{ر=1}^{أ}$ ص ح ر = ب ح (B_U)
ريف	ص ى ١ (Y_{R1})	ص ى ٢ (Y_{R2})	ص ى ٣ (Y_{R3})	$\sum_{ر=1}^{أ}$ ص ى ر = ب ى (B_R)
مجموع = أ ر (A_i)	أ ١ = $\sum_{و=1}^{ب}$ ص و ١ $(\sum Y_{j1})$	أ ٢ = $\sum_{و=1}^{ب}$ ص و ٢ $(\sum Y_{j2})$	أ ٣ = $\sum_{و=1}^{ب}$ ص و ٣ $(\sum Y_{j3})$	$\sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ}$ ص ور $(\sum\sum Y_{ji})$

ومن معلوماتنا السابقة يمكن أن نستخلص المقاييس التالية :

$$غ_د = \sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ}(ص_{ور} - \bar{ص})^2 = \sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ} ص_{ور}^2 - ن\,\bar{ص}^2 \quad ....(٩-١٢)$$

وذلك كما أثبتنا سابقاً في المعادلة (٩-٨) . ويلاحظ في هذه الحالة أن :

ن = أ × ب = ٣ × ٢ = ٦

$$\bar{ص} = \sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ} \frac{ص_{ور}}{ن}$$

غ ق ١ = التغير الحقيقي الراجع للمستوى التعليمي

$$= \sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ}(\bar{أ}_ر - \bar{ص})^2 = ب \sum_{ر=1}^{أ}(\bar{أ}_ر - \bar{ص})^2$$

$$RSS_A = B\sum_{i=1}^{A}\left(\overline{A}_i - \overline{Y}\right)$$

وبنفس الطريقة المتبعة في إثبات المعادلة (٩-٩) يمكن إثبات أن :

غ ق أ = (مج ر=١ إلى أ أ² ر) / ب − ن ص̄ ² .... (٩-١٣)

$$RSS_A = \frac{\sum_{i=1}^{A} A_{ji}^2}{B} - n\overline{Y}^2$$

ويلاحظ في هذه الحالة أن أ̄ ر = متوسط الادخار للمستوى التعليمي ر . ويوجد لدينا ثلاث متوسطات في هذا الصدد :

متوسط الادخار للمجموعة بدون تعليم = أ̄ ١ = (مج و=١ إلى ب ص و ١) / ب

$$\overline{A}_1 = \frac{\sum Y_{j1}}{B}$$

متوسط الادخار للمجموعة تعليم متوسط = أ̄ ٢ = (مج و=١ إلى ب ص و ٢) / ب

$$\overline{A}_2 = \frac{\sum Y_{j2}}{B}$$

متوسط الادخار للمجموعة تعليم عالي= أ̄ ٣ = (مج و=١ إلى ب ص و ٣) / ب

$$\overline{A}_3 = \frac{\sum Y_{j3}}{B}$$

ونريد الآن اختبار ما إذا كان هناك اختلافاً جوهرياً بين هذه المتوسطات الثلاثة . فإذا ثبت أن هناك اختلافاً جوهرياً بينها فإن هذا يعد دليلاً على أن المستوى التعليمي يؤثر على مستوى الادخار . أما إذا ثبت أن الاختلاف بينها غير جوهري فإن هذا يعد دليلاً على أن المستوى التعليمي لا يؤثر على مستوى الادخار . ويلاحظ أن أ ر

(A_i) المذكورة بالمعادلة (٩-١٣) معرفة في الجدول (٩-٧) حيث يوجد هناك أ ١ ، أ ٢ ، أ ٣ . أما عن ب فهي = ٢ في هذه الحالة ، ذلك لأن متوسط الادخار هنا يحسب بالنسبة لمستوى تعليمي معين في كلٍ من الريف (ى) والحضر (ح) .

ومن ناحية أخرى نجد أن :

غ ق ب = التغير الحقيقي الراجع للموطن = $\sum\limits_{ر=١}^{أ} \sum\limits_{و=١}^{ب}$ (ب̄ و – ص̄) ٢ = أ $\sum$ (ب̄ و – ص̄) ٢

وبنفس الطريقة المتبعة في إثبات المعادلة (٩-٩) يمكن إثبات أن :

غ ق ب = $\dfrac{\sum\limits_{و=١}^{ب} ب_و^٢}{أ}$ – ن ص̄ ٢ .... (٩-١٤)

$$RSS_B = \frac{\sum B_j^2}{A} - n\bar{Y}^2$$

ويتعين مراعاة أن ب̄ و = متوسط الادخار في الموطن " و " بغض النظر عن المستوى التعليمي.

ويوجد لدينا في هذه الحالة متوسطين :

متوسط الادخار في الحضر = ب̄ ح = $\dfrac{\sum\limits_{ر=١}^{أ} ص_{حر}}{أ}$ $\bar{B}_u = \dfrac{\sum Y_{ui}}{A}$

متوسط الادخار في الريف = ب̄ ى = $\dfrac{\sum\limits_{ر=١} ص_{ىر}}{أ}$ $\bar{B}_R = \dfrac{\sum Y_{Ri}}{A}$

ونريد الآن أن نختبر ما إذا كان هناك اختلافاً جوهرياً بين هذين المتوسطين . فإذا ثبت أن هناك اختلافاً جوهرياً بينهما نستخلص أن الموطن يؤثر على مستوى الادخار والعكس صحيح . ويلاحظ أن ب و معرفة في الجدول (٩-٧) كما أن (A) أ = ٣ في هذه الحالة .

ومن المعادلة (٩-١١) يمكن القول أن :

غ د = التغير العشوائي = غ ك − غ ق أ − غ ق ب .... (٩−١٥)

$$ESS = TSS - RSS_A - RSS_B$$

وبقسمة طرفي المعادلة (٩−١١) على غ ك نحصل على :

$$\frac{غ_{قأ}}{غ_{ك}} + \frac{غ_{قب}}{غ_{ك}} + \frac{غ_{د}}{غ_{ك}} = ١ \quad (٩-١٦)$$

$$\frac{RSS_A}{TSS} + \frac{RSS_B}{TSS} + \frac{ESS}{TSS} = 1$$

حيث :

$\frac{غ_{قأ}}{غ_{ك}}$ = النسبة المفسرة من التغير في الادخار بدلالة المستوى التعليمي = $\frac{RSS_A}{TSS}$

$\frac{غ_{قب}}{غ_{ك}}$ = النسبة المفسرة من التغير في الادخار بدلالة الموطن = $\frac{RSS_B}{TSS}$

$\frac{غ_{د}}{غ_{ك}}$ = النسبة المفسرة من التغير في الادخار بدلالة عوامل عشوائية = $\frac{ESS}{TSS}$

(٣) والسؤال الآن هو : كيف نختبر مدى فاعلية كلٍ من المتغيرات السابقة في التأثير على مستوى الادخار ؟ .

تتمثل الإجابة في استخدام اختبار " ف " على النحو الذي تم من قبل وذلك على النحو التالي :

أ− لاختبار مدى فاعلية المستوى التعليمي في التأثير على مستوى الادخار علينا اختبار :

فرض العدم : $\bar{أ}_١ = \bar{أ}_٢ = \bar{أ}_٣ = \bar{ص}$ $\quad (\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \bar{Y})$

في مواجهة :

الفرض البديل : المتوسطات مختلفة .

ومن الممكن عمل ذلك من خلال حساب " ف * "

حيث :

$$\text{ف}^* = \frac{\text{م غ ق أ}}{\text{م غ د}} \longleftarrow F^* = \frac{VRSS_A}{VESS} \quad \text{.........(٩-١٧)}$$

$$\text{م غ ق أ} = \frac{\text{م غ ق}}{\text{أ - ١}} \longleftarrow VRSS_A = \frac{RSS_A}{A} \quad \text{........(٩-١٨)}$$

$$\text{م غ د} = \frac{\text{غ د}}{\text{ن - (أ + ب - ١)}} \qquad \frac{\text{غ د}}{\text{ن - أ - ب + ١}} \quad \text{......(٩-١٩)}$$

$$VESS = \frac{ESS}{n - A - B + 1}$$

فإذا كانت ف * > ف الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ أو ١ ٪ ودرجات حرية ن ق أ = أ – ١ ، ن د = ن – أ – ب + ١ ، فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل . ومن ثم فإن هذا يتضمن أن المستوى التعليمي ذو تأثير جوهري على مستوى الادخار والعكس صحيح .

ب- لاختبار مدى فاعلية الموطن في التأثير على مستوى الادخار ، علينا اختبار :

فرض العدم : $\bar{\text{ب}}_{\text{ح}} = \bar{\text{ب}}_{\text{ى}} = \bar{\text{ص}}$ $\qquad \bar{B}_U = \bar{B}_R = \bar{Y}$

في مواجهة :

الفرض البديل : المتوسطات غير متساوية

ولإتمام ذلك نقوم بحساب ف * حيث :

$$\text{ف}^* = \frac{\text{م غ ق ب}}{\text{م غ د}} \qquad F^* = \frac{VRSS_B}{VESS} \quad \text{.........(٩-٢٠)}$$

$$\text{م غ ق ب} = \frac{\text{غ ق ب}}{\text{ب - ١}} \qquad VRSS_B = \frac{RSS_B}{B-1} \quad \text{..........(٩-٢١)}$$

ثم نبحث عن " ف " الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ أو ١ ٪ ودرجات حرية ن ق ب = ب – ١ ، ن د = ن – أ – ب + ١ ونقارنها على النحو الذي سبق .

(٤) يمكن إجراء الحسابات المتعلقة باختبار " ف " باستخدام البيانات المعطاة بجدول (٩-٦) كما هو موضح بالجدول (٩-٨) :

جدول (٩-٨)

أ = ١، ٢، ٣

المستوى التعليمي / الموطن	بدون $ص_{و1}$	$ص_{و1}^2$	متوسط $ص_{و2}$	$ص_{و2}^2$	عالي $ص_{و3}$	$ص_{و3}^2$	مجموع = $ب_و$
$ص_{حر}$ (حضر)	٢٩	٨٤١	٤٦	٢١١٦	٦٢	٣٨٤٤	$ب_ح$ = ١٣٧
$ص_{ىر}$ (ريف)	٢١	٤٤١	٢٩	٨٤١	٣٨	١٤٤٤	$ب_ى$ = ٨٨
مجموع	$أ_1$ = ٥٠	$\sum ص_{و1}^2$ = ١٢٨٢	$أ_2$ = ٧٥	$\sum ص_{و2}^2$ = ٢٩٥٧	$أ_3$ = ١٠٠	$\sum ص_{و3}^2$ = ٥٢٨٨	$\sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ} ص_{ور}$ = مجموع ٢٢٥

(ب = ٢، ك)

ن = أ × ب = ٣ × ٢ = ٦

$$\bar{ص} = \frac{\sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ} ص_{ور}}{ن} = \frac{٢٢٥}{٦} = ٣٧,٥ = \text{المتوسط العام}$$

$$غ_د = \sum_{و=1}^{ب}\sum_{ر=1}^{أ} ص_{ور}^2 - ن\bar{ص}^2$$

$$غ_د = (١٢٨٢ + ٢٩٥٧ + ٥٢٨٨) - ٦(٣٧,٥)^2$$

$$غ_د = ٩٥٢٧ - ٨٤٣٧,٥ = ١٠٨٩,٥$$

$$غ_{ق1} = \frac{\sum_{ر=1}^{أ} أ_ر^2}{ب} - ن\bar{ص}^2$$

$$غ_{ق١} = \frac{(٥٠)^٢ + (٧٥)^٢ + (١٠٠)^٢}{٢} - ٨٤٣٧,٥$$

$$غ_{ق١} = ٩٠٦٢,٥ - ٨٤٣٧,٥ = ٦٢٥$$

$$غ_{قب} = \frac{\sum_{و=١}^{ب} ب_و^٢}{أ} - ن \bar{ص}^٢$$

$$غ_{قب} = \frac{(١٣٧)^٢ + (٨٨)^٢}{٢} - ٨٤٣٧,٥$$

$$غ_{قب} = ٨٨٣٧,٥ - ٨٤٣٧,٥ = ٤٠٠$$

$$غ_د = غ_ك - غ_{ق١} - غ_{قب}$$

$$غ_د = ١٠٨٩,٥ - ٦٢٥ - ٤٠٠ = ٦٤,٥$$

ولاختبار مدى فاعلية تأثير المتغيرين التفسيريين نتبع الخطوات التالية :

(١) حتى نختبر مدى فاعلية المستوى التعليمي نقوم بحساب :

$$م_{غق١} = \frac{غ_{ق١}}{أ - ١} = \frac{٦٢٥}{٣-١} = \frac{٦٢٥}{٢} = ٣١٢,٥$$

$$م_{غد} = \frac{غ_د}{ن - أ - ب + ١} = \frac{٦٤,٥}{٦ - ٣ - ٢ + ١} = \frac{٦٤,٥}{٢} = ٣٢,٣$$

$$\therefore ف^* = \frac{م_{غق١}}{م_{غد}} = \frac{٣١٢,٥}{٣٢,٣} = ٩,٦٧٥$$

وبالبحث عن ف الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ ودرجات حرية $ن_{ق١} = ٢$ ، $ن_د = ٢$ نحصل على ف ٠,٠٥ ، ٢ ، ٢ = ١٩ .

وبمقارنة " ف*" ، " ف " نجد أن ف * < ف ، ومن ثم نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل . ولعل هذا يتضمن أن المستوى التعليمي لا يؤثر تأثيراً جوهرياً على مستوى الادخار .

(٢) وحتى نختبر مدى فاعلية الموطن في التأثير على مستوى الادخار نقوم بحساب :

$$م_{غ ق ب} = \frac{غ_{ق ب}}{ب - ١} + \frac{٤٠٠}{٢ - ١} = ٤٠٠$$

$$م_{غ د} = ٣٢,٣$$

$$\therefore ف^* = \frac{م_{غ ق ب}}{م_{غ د}} = \frac{٤٠٠}{٣٢,٣} = ١٢,٣٨٤$$

وبالبحث عن ف الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ ودرجات حرية $ن_{ق ب} = ١$ ، $ن_{د} = ٢$ نجد أن ف ٠,٠٥ ، ١ ، ٢ = ١٨,٥ .

ومن ثم فإن ف * < ف ، مما يعني أننا نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل. ولعل هذا يتضمن أن الموطن هو الآخر لا يؤثر تأثيراً جوهرياً على مستوى الادخار.

(٩-٢-٣) تحليل التباين والانحدار

يمكن المقارنة بين تحليل التباين من ناحية وأسلوب الانحدار من ناحية أخرى كفنين قياسيين . ويلاحظ عموماً أن أسلوب الانحدار أكثر قوة ودقة من تحليل التباين في اختباره للعلاقات الاقتصادية . فالأول يعطى نفس القدر من المعلومات التي يعطيها الثاني وبدقة أكثر . ويمكن توضيح ذلك فيما يلي :

(١) يختبر أسلوب الانحدار معنوية المعلمات المقدرة باستخدام اختبارات المعنوية ليحدد أي المتغيرات التفسيرية ذات تأثير جوهري على المتغير التابع وأيها ذات تأثير غير جوهري . هذا في حين أن تحليل التباين يختبر معنوية النسبة التي يفسرها المتغير التفسيري من التغير الكلي في المتغير التابع ليحدد ما إذا كانت لها معنوية إحصائية أم لا مستخدماً اختبار " ف " . وهو يصل من خلال هذا الاختبار إلى نتيجة مشابهة لأسلوب الانحدار فيما يتعلق بتحديد أي المتغيرات التفسيرية ذات تأثير جوهري على المتغير التابع وأيها ذات تأثير غير جوهري . ويتعين ملاحظة أن $ف = ت^٢$ ، أي أن هناك علاقة قوية بين اختباري ت ، ف .

(٢) يمكن لأسلوب الانحدار أن يحدد النسبة التي يتم تفسيرها من التغيُّر في المتغير التابع بدلالة المتغيرات التفسيرية المدرجة بالدالة من خلال "ر ٢ " R^2، وهي نفس الميزة التي يتمتع بها تحليل التباين .

(٣) يتفوق أسلوب الانحدار على تحليل التباين في كونه يحدد مقدار التغير في المتغير التابع الناجم عن تغير كل متغير تفسيري بمقدار وحدة واحدة ، كما يساعد على تحديد مرونة المتغير التابع بالنسبة لكل متغير تفسيري . وهذه ميزة لا توجد في حالة تحليل التباين .

(٤) يمكن لأسلوب الانحدار أن يحدد اتجاه العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل وهذه ميزة لا يمكن لتحليل التباين أن يحددها . فكل ما يوضحه تحليل التباين هو ما إذا كان المتغير التفسيري ذو تأثير جوهري أم غير جوهري على المتغير التابع ، ولكنه لا يحدد اتجاه العلاقة ما إذا كان طردياً أم عكسياً .

(٥) يمكن لأسلوب الانحدار أن يحدد مدى تأثير المتغيرات النوعية على المتغيرات الكمية مثله في ذلك مثل تحليل التباين ، وذلك من خلال استخدام المتغيرات الصورية .

(٦) يعتبر أسلوب الانحدار أكثر مرونة من تحليل التباين ، ذلك لأن الأخير يصلح أساساً في حالة التجارب التي يتم التثبيت فيها لبعض العناصر المؤثرة في الظاهرة وتغيير البعض الآخر . أما أسلوب الانحدار فيمكنه قياس أثر كل المتغيرات دون تثبيت بعضها .

المبحث الثالث

استخدامات أخرى لتحليل التباين

بعدما تعرضنا في المبحث الثاني لاستخدام تحليل التباين في اختبار مدى أهمية المتغيرات في تفسير الظاهرة ، نتعرض في هذا المبحث لعدد من الاستخدامات الأخرى لتحليل التباين وذلك على النحو التالي :

(٩-٣-١) اختبار معنوية معادلة الانحدار ككل :

إذا كان لدينا معادلة انحدار تأخذ الصيغة التالية :

ص = أ̂ + ب̂ ، س، + ب̂٢ س٢ + ب̂٣ س٣ + د ....(٩-٢٢)

$$Y = \hat{a} + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_2 + \hat{b}_3 X_3 + e$$

فمن الممكن استخدام تحليل التباين في اختبار معنوية تأثير المتغيرات التفسيرية س ، ، س ٢ ، س ٣ مجتمعة على المتغير التابع ص . وبمعنى آخر من الممكن اختبار ما إذا كانت المتغيرات التفسيرية كمجموعة تُحدث تأثيراً جوهرياً على المتغير التابع ص أم لا.

ولعل الفرض المراد اختباره في هذه الحالة هو :

فرض العدم : ب ١ = ب ٢ = ب ٣ = صفر ← $(b_1 = b_2 = b_3 = 0)$

في مواجهة :

الفرض البديل : ليس كل المعلمات مساوية للصفر .

فإذا تم قبول فرض العدم فإن هذا يتضمن أن المتغيرات التفسيرية كمجموعة لا تؤثر تأثيراً جوهرياً على المتغير التابع . أما إذا تم رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل فإن هذا يتضمن أن المتغيرات التفسيرية كمجموعة تؤثر تأثيراً جوهرياً على المتغير التابع .

وحتى نجري هذا الاختبار يتعين علينا القيام بحساب القيم التالية :

١- التغير الكلى في المتغير التابع :

غ د = ∑ (ص - ص̄)٢ = ∑ ص٢ ← $TSS = \sum y^2$ .... (٩-٢٣)

٢ - التغير المفسر بدلالة المتغيرات التفسيرية مجتمعة

غ ق = ∑ (ص̂ ر - ص̄)٢ = ر٢ ∑ ص ر٢ = ∑ ص̂ ر٢ ..... (٩-٢٤)

$$RSS = \sum \hat{y}_i^2$$

٣ - التغير غير المفسر

غ ر = غ د - غ ق = ∑ د٢ .... (٩-٢٥)

$$ESS = TSS - RSS = \sum e_i^2$$

ويمكن أن نجرى اختبار المعنوية باستخدام اختبار " ف " ، وذلك مع الأخذ في الاعتبار أن درجات الحرية الخاصة بكل عنصر من العناصر السابقة كما يلي :

درجات الحرية الخاصة بالجزء المفسر ∑ ص̂٢ = ك - ١ $(k - 1)$

حيث ك تشير لعدد المعلمات المقدرة في نموذج الانحدار .

ودرجات الحرية الخاصة بالجزء غير المفسر ∑ د٢ = ن - ك $(n - k)$ حيث "ن" تشير لحجم العينة .

ودرجات الحرية الخاصة بالتغير الكلى ∑ ص٢ = (ن - ك) + (ك - ١) = ن - ١ $(n - 1)$

وبحساب ف* = (∑ ص̂٢ / ك - ١) / (∑ د٢ / ن - ك) .... (٩-٢٦)

$$F^* = \frac{\Sigma \hat{y}_i^2 \;/\; (k-1)}{\Sigma e_i^2 \;/\; (n-k)}$$

ومقارنتها مع "ف" الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجات حرية $ن_ق = ك - ١$ ، $ن_د = ن - ك$ ، يمكن الوصول لقرارٍ ما بشأن معنوية الانحدار ككل على النحو التالي :

(١) إذا كانت ف * > ف الجدولية نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ، ومن ثم فإن كل قيم المعلمات لا تساوى الصفر . ويمكن القول في هذه الحالة أن الانحدار ذو معنوية إحصائية .

(٢) إذا كانت ف * < ف الجدولية نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل ، ومن ثم فإن الانحدار لا تكون له معنوية إحصائية .

ومن الممكن استخدام " $ر^٢$ " في حساب ف * . فمن المعادلة (٩-٢٦) نجد أن :

$$ف^* = \frac{\sum \hat{ص}^٢}{\sum د^٢} \cdot \frac{ن - ك}{ك - ١}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\sum ص^٢$ نحصل على :

$$ف^* = \frac{\sum \hat{ص}^٢ / \sum ص^٢}{\sum د^٢ / \sum ص^٢} \cdot \frac{ن - ك}{ك - ١}$$

وحيث أن :

$$\frac{\sum \hat{ص}^٢}{\sum ص^٢} = ر^٢ \quad ، \quad \frac{\sum د^٢}{\sum ص^٢} = ١ - ر^٢$$

إذن :

$$ف^* = \frac{ر^٢ / (ك - ١)}{(١ - ر^٢) / (ن - ك)} \quad ..... (٩-٢٧)$$

$$F^* = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

ويمكن الإشارة إلى بعض الحقائق في هذا الصدد كما يلي :

(أ) عندما نختبر المعلمات المقدرة $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ ،$\hat{ب}_3$ بصورة مستقلة باستخدام اختبار " ت " ويتضح أنها معنوية ، ففي الغالب عند اختبار معنويتها مجتمعة باستخدام اختبار " ف " سوف تكون معنوية إحصائياً أيضاً .

(ب) ومن ناحية أخرى قد يثبت عند اختبار معنوية المعلمات المقدرة $\hat{ب}_1$ ، $\hat{ب}_2$ ، $\hat{ب}_3$ بصفة مستقلة من خلال اختبار " ت " أن كل واحدة منها غير معنوية ، ولكن عند اختبار معنوية الانحدار ككل من خلال اختبار " ف " يثبت أنه معنوي إحصائياً . ولقد اتضح أن هذا يحدث عندما تكون المتغيرات التفسيرية مرتبطة ارتباطاً قوياً فيما بينها .

(حـ) قد يحدث في بعض الحالات أن تكون كل معلمة مقدرة لها معنوية إحصائية عند اختبارها بصفة مستقلة ، ولكن يثبت من اختبار معادلة الانحدار ككل أن ليس لها معنوية إحصائية .

ويمكن أن نستوضح النقطة " ب " من المثال الخاص بدالة الطلب الخطية بالفصل السابع :

$ر^2 = ٠,٨٦٦٧$

$\therefore ١ - ر^2 = ١ - ٠,٨٦٦٧ = ٠,١٣٣٣$

$ك - ١ = ٣ - ١ = ٢$

$ن - ك = ٥٢ - ٣ = ٤٩$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٢٧) نحصل على :

$$ف^* = \frac{٠,٨٦٦٧ \div ٢}{٠,١٣٣٣ \div ٤٩} = \frac{٠,٤٣٣٣٥}{٠,٠٠٢٧٢} = ١٥٩,٣٢$$

وبالبحث عن " ف " الجدولية عند مستوى معنوية ٥ ٪ ودرجات حرية $ن_ق = ك - ١ = ٢$، $ن_د = ن - ك = ٥٢ - ٣ = ٤٩$ ، نجد أنها تساوي ٣,٣٣ . وبمقارنة ف * المحسوبة ، ف الجدولية نجد أن ف * > ف مما يشير إلى أن الانحدار ككل له معنوية إحصائية .

(٩-٣-٢) اختبار معنوية التحسن في المقدرة التفسيرية .

من الممكن اختبار مدى معنوية التحسن الذي يحدث في المقدرة التفسيرية لنموذج الانحدار نتيجة لإضافة بعض المتغيرات التفسيرية باستخدام تحليل التباين .

فإذا قمنا بتقدير دالة الطلب ذات الصيغة البسيطة التالية :

ص = أ + بَ̂ ١ س ١ + د ← $Y_i = \hat{a} + \hat{b}X_1 + e_i$

حيث ص = كمية المبيعات ، س ١ = سعر السلعة ، وجاءت نتائج القياس على النحو التالي : ص = ٥٣,٥ – ٤,٥ س ١ + د

(٠,٥١)

ر ٢ = ٠,٩٠٧ ، ن = ١٠

∑ص٢ = ∑ص̂٢ + ∑ د٢

٢٤٧٦ = ٢٢٤٦ + ٢٣٠

فإن هذا يعني أن السعر (س ١) يفسر ٩٠,٧ ٪ من التغير في كمية المبيعات، كما أن معلمته ب̂ ١ لها معنوية إحصائية .

وإذا قمنا بإضافة متغير تفسيري جديد ، وليكن الدخل (س ٢) ، فإن النموذج يصبح :

ص = أ̂ + ب̂١ س ١ + ب̂ ٢ س ٢ + د

وإذا تم تقدير هذا النموذج وجاء على النحو التالي:

ص = ٢٨,٨ – ٢,٩٦ س ١ + ١,٧٤ س ٢ + د

ر ٢ = ٠,٩٢

∑ ص٢ = ∑ ص̂٢ + ∑ د٢

٢٤٧٦ = ٢٢٧٧ + ١٩٩

يتضح أن المقدرة التفسيرية للنموذج تحسنت بإدخال متغير تفسيري جديد هو س ٢ ، حيث زاد معامل التحديد من ٩٠,٧ ٪ إلى ٩٢ ٪ . ولكن السؤال الآن: هل التحسن

الذي حدث في المقدرة التفسيرية يمكن وصفه بأنه تحسن جوهري يرجُع لعوامل حقيقية ، أم أنه تحسن غير جوهري يرجع لمجرد عوامل الصدفة ؟ وبمعنى آخر هل التحسن الذي حدث في المقدرة التفسيرية من ٩٠,٧ ٪ إلى ٩٢ ٪ له معنوية إحصائية ؟

ولاختبار ذلك نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بحساب مقدار التحسن في التغير الحقيقي غ$_{ق}$ حيث :

Δ غ$_{ق}$ = $\Delta \sum \hat{ص}^2$ = ٢٢٧٧ − ٢٢٤٦ = ٣١

(٢) ثم نقوم باختبار معنوية هذا التحسن باستخدام اختبار " ف " وذلك كما هو موضح بالجدول (٩-٩) .

ويتضح من الجدول (٩-٩) أن :

ك$_1$ = عدد المعلمات المقدرة بالنموذج البسيط ص = د (س$_1$)

ك$_2$ = عدد المعلمات المقدرة بالنموذج المتعدد ص = د (س$_1$ ، س$_2$)

جدول (٩-٩)

اختبار معنوية التحسن في المقدرة التفسيرية

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف *
س$_1$	$\sum$ ص$_1^2$ = ٢٢٤٦	ك$_1$ − ١ = ٢ − ١	Δ غ$_{ق}$ / ك$_2$ − ك$_1$ = ٣١ / ١ = ٣١	Δ غ$_{ق}$/ك$_2$−ك$_1$ ÷ $\sum$ د^2/ن−ك$_2$
س$_1$ ، س$_2$	$\sum \hat{ص}_2^2$ = ٢٢٧٧	ك$_2$ − ١ = ٣ − ١ = ٢		
التغير الحقيقي نتيجة لإضافة س$_2$	Δ غ$_{ق}$ = $\sum$ ص$_2^2$ − $\sum \hat{ص}_1^2$ = ٣١	ك$_2$ − ك$_1$ = ٢ − ١ = ١		
التغير العشوائي للمعادلة $\hat{ص}$ = $\hat{أ}$ + $\hat{ب}_1$ س$_1$ + $\hat{ب}_2$ س$_2$	$\sum$ د^2 = ١٩٩	ن − ك$_2$ = ١٠ − ٢ = ٨	$\sum$ د^2 / ن − ك$_2$ = ١٩٩ ÷ ٨ = ٢٤,٩	ف* = ٣١/٢٤,٩ = ١,٢٤
التغير الكلى	$\sum$ ص^2 = ٢٤٧٦			ف الجدولية = ٥,٣٢ مستوى معنوية = ٠,٠٥ ن$_{ق}$ = ١ ن$_{د}$ = ٨

كما يتضح من مقارنة ف * المحسوبة ، ف الجدولية أن التحسن الذي حدث في المقدرة التفسيرية نتيجة لإضافة المتغير التفسيري $س_٢$ غير جوهري وليس له معنوية إحصائية ، حيث ف * < ف .

ومن ثم يمكن القول أن إضافة المتغير التفسيري $س_٢$ لم تحسن من المقدرة التفسيرية للنموذج .

(٩-٣-٣) : اختبار معنوية الاختلاف بين معلمات من عينات مختلفة:

إذا قمنا بتقدير دالة الاستهلاك مثلاً من عينة مأخوذة من الريف ، ثم قدرنا نفس الدالة من عينة مأخوذة من الحضر ، وأردنا اختبار هل هناك اختلاف جوهري بين سلوك الاستهلاك في الريف وسلوك الاستهلاك في الحضر ، فإن تحليل التباين يساعدنا على إتمام ذلك . ومن ناحية أخرى إذا قمنا بتقدير دالة الاستهلاك في مصر مثلا خلال الفترة ما قبل الانفتاح الاقتصادي، ثم قمنا بتقديرها في فترة ما بعد الانفتاح ، وأردنا اختبار ما إذا كان هناك اختلاف جوهري في سلوك الاستهلاك بين الفترتين، فإن تحليل التباين يساعدنا على إتمام ذلك أيضاً . أي أن تحليل التباين يساعد على اختبار مدى استقرار دالة ما عبر الزمن . ولتوضيح كيفية إتمام ذلك من خلال ما يسمى باختبار " تشاو " Chow Test نتبع الخطوات التالية :

(أ) افترض أننا نريد اختبار الفرض القائل بأن سلوك الاستهلاك لم يتغير في مصر بعد الانفتاح الاقتصادي عنه قبل الانفتاح .

(ب) نقوم بتقدير دالة الاستهلاك في الفترة ما قبل الانفتاح ١٩٦٣-١٩٧٢ :

$$\hat{ص}_١ = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١$$

وذلك من عينه حجمها $ن_١ = ١٠$ ، ثم نحدد التغير العشوائي $\sum د_١^٢ = \sum ص_١^٢ - \sum \hat{ص}_١^٢$ بدرجات حرية $= ن_١ - ك_١ = ١٠ - ٢ = ٨$.

(حـ) ثم نقوم بتقدير دالة الاستهلاك في الفترة ما بعد الانفتاح ١٩٧٣-١٩٨٧

$$\hat{ص}_٢ = \hat{أ}_٢ + \hat{ب}_٢ س_٢$$

وذلك من عينة حجمها ن ٢ = ١٥ ، ثم نحدد التغير العشوائي ∑ د٢٢ = ∑ص٢٢ - ∑ ضَ٢٢ بدرجات حرية = ن ٢ - ك ٢ = ١٥ - ٢ = ١٣.

(د) نقدر دالة الاستهلاك لكل الفترة ١٩٦٣ - ١٩٨٧

ضَ = أَ + بَ س

وذلك من عينة حجمها ن = ن ١ + ن ٢ = ٢٥ ، ثم نحدد التغير العشوائي ∑د ٢ = ∑ص ٢ - ∑ ضَ ٢ بدرجات حرية = ن - ك = ٢٥ - ٢ = ٢٣ .

(هـ) نضيف التغير العشوائي للعينة الأولى إلى التغير العشوائي للعينة الثانية فنحصل على : ∑ د١ ٢ + ∑ د ٢ ٢ بدرجات حرية (ن١ - ك١) + (ن٢ - ك٢) = ن١ + ن٢ - ٢ ك حيث ك ١ = ك ٢ = ك = ٢ ، أي بدرجات الحرية = ٢٥ - ٤ = ٢١ .

(و) نقوم بحساب الفرق في التغير العشوائي بين الحالتين : حالة التقدير المنفصل لكل فترة ، وحالة التقدير الشامل لكل الفترة فنحصل على :

[∑ د ٢ -(∑ د ١ ٢ + ∑ د ٢ ٢)] بدرجات حرية تساوى :

(ن ١ + ن ٢ - ك) - (ن ١ + ن ٢ - ٢ ك) = - كَ + ٢ ك = ك = ٢

(ز) نقوم بحساب ف * المحسوبة باستخدام الصيغة التالية :

ف * = [∑ د ٢ - (∑ د ١ ٢ + ∑ د ٢ ٢)] / ك ÷ [∑ د ١ ٢ + ∑ د ٢ ٢] / (ن ١ + ن ٢ - ٢ك)

$$F^* = \frac{[\,\Sigma e_i^2 - (\Sigma e_{i1}^2 + \Sigma e_{i2}^2)\,] \;/\; K}{[\,\Sigma e_{i1}^2 + \Sigma e_{i2}^2\,] \;/\; (n_1 + n_2 - 2K)}$$

ومن الواضح أنه إذا كان التغير غير المفسر ، أي العشوائي ، غير مختلف تماماً بين الحالتين (حالة التقدير المنفصل وحالة التقدير الشامل) فإن ف * = صفر ، مما يعني عدم وجود أي اختلاف في المقدرة التفسيرية للنموذج بين الفترتين ، ومن ثم عدم وجود اختلاف في سلوك الاستهلاك .

(ح) نقوم بالبحث عن "ف " الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجات حرية ك ، ن – ك ، ثم نقارن ف * ، ف . فإذا كانت ف * > ف نرفض فرض العدم القائل أن :

ب ١ = ب ٢ ، أ ١ = أ ٢ . $(b_1 = b_2 , a_1 = a_2)$

ونقبل الفرض البديل القائل أن :

ب ١ ≠ ب ٢ ، أ ١ ≠ أ ٢ . $(b_1 \neq b_2 , a_1 \neq a_2)$

ونستخلص من ذلك أن دالة الاستهلاك لم تكن مستقرة عبر الزمن وإنما تغيرت جوهرياً ، إما لتغير حد الكفاف أو لتغير الميل الحدي للاستهلاك أو لتغيرهما معاً . وبالرغم من أن هذا الاختبار يوضح ما إذا كان هناك اختلاف جوهري أم لا بين العينتين ، إلا أنه لا يحدد مصدر الاختلاف على وجه التحديد : هل هو راجع لاختلاف المعلمة التقاطعية أم المعلمة الانحدارية . ويساعدنا في هذا الصدد أسلوب المتغيرات الصورية الذي يحدد على وجه الدقة مصدر الاختلاف .

مثال (٩–٣)

اختبار التغير في الاستهلاك بعد الانفتاح

افترض أنه بتقدير دالة الاستهلاك في مصر خلال الفترتين قبل وبعد الانفتاح كانت نتائج التقدير على النحو الموضح بالجدول (٩–١٠)

جدول (٩–١٠)

دالة الاستهلاك قبل وبعد الانفتاح (افتراضية)

الفترة	دالة الاستهلاك	التغير العشوائي	درجات الحرية	ف *
قبل الانفتاح ١٩٦٣–١٩٧٢	$\hat{ص}_1 = ٨٠ + ٠,٦ س_1$	$\sum د_1^2 = ٣٥٠$	$ن_1 - ك_1 = ١٠ - ٢ = ٨$	
بعد الانفتاح ١٩٧٣–١٩٨٧	$\hat{ص}_2 = ١٥٠ + ٠,٨ س_2$	$\sum د_2^2 = ١٥٠$	$ن_2 - ك_2 = ١٥ - ٢ = ١٣$	
مجموع		$\sum د_1^2 + \sum د_2^2 = ٣٥٠ + ١٥٠ = ٥٠٠$	$ن_1 + ن_2 - ٢ك = ١٠ + ١٥ - ٤ = ٢١$	
كل الفترة ١٩٦٣–١٩٨٧	$\hat{ص} = ١٢٠ + ٠,٧٥ س$	$\sum د^2 = ١١٠٠$	$ن_1 + ن_2 - ك = ١٠ + ١٥ - ٢ = ٢٣$	$ف^* = \frac{٦٠٠ \div ٢}{٥٠٠ \div ٢١} = \frac{٣٠٠}{٢٣,٨} = ١٢,٦$
الفرق بين التقديرين المنفصل والشامل		$\sum د^2 - (\sum د_1^2 + \sum د_2^2) = ١١٠٠ - ٥٠٠ = ٦٠٠$	$ك = ٢$	$ف = ٣,٤٧$ ، $\alpha = ٥\%$ ، $ن_ق = ٢$ ، $ن_د = ٢١$

وبفحص هذه النتائج يتضح لنا أن دالة الاستهلاك لم تكن مستقرة عُبر الزمن ، حيث ف * > ف ، ومن ثم فإن سلوك الاستهلاك كان مختلفاً اختلافاً جوهرياً في الفترة بعد الانفتاح عنها في الفترة قبل الانفتاح .

(٩–٣–٤) اختبار مدى استقرار معاملات الانحدار عند تغيير حجم العينة

يلاحظ في بعض الحالات أنه عند تقدير علاقة اقتصادية ما من عينة صغيرة واختبار معنوية معاملاتها ، يتضح أن لها معنوية إحصائية . هذا في حين إذا تم تكبير حجم العينة وأعيد تقدير العلاقة مرة أخرى منها بعد تكبيرها يتضح أن معاملات هذه العلاقة تصبح غير معنوية . ومن ثم نستخلص من هذا أن معلمات النموذج المستخدم في التقدير حساسة بالنسبة لحجم العينة ، ولذلك فإن النتائج التي نتوصل إليها يصبح من الصعب تعميمها على المجتمع، أو حتى استخدامها كأساس جيد للوصول لمعلمات

المجتمع . ولذا فمن المتعين اختبار مدى استقرار معاملات الانحدار عند تغيير حجم العينة ، فإذا اتضح أنها مستقرة ولا تختلف جوهرياً بزيادة حجم العينة، يصبح من الممكن تعميم النتائج التي يتم التوصل إليها على المجتمع. أما إذا اتضح أنها غير مستقرة فيصعب في هذه الحالة الاعتماد على نتائج العينة في التعميم على مستوى المجتمع ، أو التنبؤ بما يحدث في المستقبل . ونفرق في هذا الصدد بين حالتين :

(أ) إذا كان عدد المشاهدات التي تم إضافتها لتكبير العينة (ن_2) أكبر من عدد المعلمات المراد تقديرها بمعادلة الانحدار (ك) فمن الممكن استخدام " اختبار تشاو " السابق في اختبار مدى الاختلاف بين المعلمات المقدرة من العينة الأصلية " ن_1 " والعينة المضافة " ن_2 " بنفس الطريقة الموضحة آنفاً .

(ب) إذا كان عدد المشاهدات التي تم إضافتها أقل من عدد المعلمات المراد تقديرها فلن يمكن استخدامها كعينة منفصلة نظراً لأن درجات الحرية بالنسبة لها سوف تكون سالبة ($\text{ن}_2 - \text{ك} < \text{صفر}$) ، ومن ثم لن يمكن إجراء اختبارات معنوية مستقلة بشأنها .

وفي مثل هذه الحالة يتم إتباع الخطوات التالية في الاختبار:

١ – نقوم بتقدير معادلة الانحدار :

$$\hat{\text{ص}}_1 = \hat{\text{أ}}_0 + \hat{\text{أ}}_1 \text{س}_1 + \hat{\text{أ}}_2 \text{س}_2 + \dots\dots + \hat{\text{أ}}_{\text{ن}_1} \text{س}_{\text{ن}_1}$$

وذلك من العينة الأصلية ذات الحجم "ن_1 " ، ثم نحدد التغير العشوائي :

$$\sum \text{د}_1^2 = \sum \text{ص}_1^2 - \sum \hat{\text{ص}}_1^2 \quad \text{بدرجات حرية} = \text{ن}_1 - \text{ك}$$

٢ – ثم نقوم بتقدير نفس معادلة الانحدار من العينة بعد تكبيرها من خلال زيادة عدد المشاهدات بالمقدار "ن_2 " حيث $\text{ن}_2 < \text{ك}$. أي نقوم بتقدير معادلة الانحدار :

$$\hat{\text{ص}} = \hat{\text{ب}}_0 + \hat{\text{ب}}_1 \text{س}_1 + \hat{\text{ب}}_2 \text{س}_2 + \dots\dots + \hat{\text{ب}}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}}$$

من عينة حجمها $\text{ن} = \text{ن}_1 + \text{ن}_2$ ، ثم نحدد التغير العشوائي :

$$\sum \text{د}^2 = \sum \text{ص}^2 - \sum \hat{\text{ص}}^2 \quad \text{بدرجات حرية} = \text{ن} - \text{ك}$$

٣ – نحدد الفرق بين :

$$\sum \text{د}^2 - \sum \text{د}_1^2 \quad \text{بدرجات حرية} \; (\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - \text{ك}) - (\text{ن}_1 - \text{ك}) = \text{ن}_2$$

٤ – نقوم بحساب ف * حيث :

ف * = [∑ د ٢ - ∑ د ١ ٢] / ن ٢ ÷ ∑ د ١ ٢ / (ن ١ - ك)

$$F^* = \frac{[\,\Sigma e_i^2 - \Sigma e_{i1}^2\,]/n_2}{\Sigma e_{i1}^2/(n_1 - k)}$$

ثم نقارنها مع ف الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجات حرية ن ق = ن ٢ ، ن د = ن ١ – ك

٥ – إذا ثبت أن ف * > ف الجدولية فإن هذا يعنى أن معاملات الانحدار غير مستقرة وتتأثر بحجم العينة والعكس صحيح .

(٩–٣–٥) اختبار مدى صحة القيود المفروضة على معاملات الدوال

يفترض الاقتصاديون في بعض الحالات ثبات غلة الحجم والتي تعنى أن زيادة عناصر الإنتاج بنسبة معينة تؤدى إلى زيادة حجم الإنتاج بنفس النسبة .كما يفترضون توفر الرشد ا لاقتصادي للمستهلك والذي يعنى أن زيادة الدخل النقدي بنفس نسبة الزيادة في الأسعار لا تحمل المستهلك على تغيير طلبه على أي سلعة من السلع . ومثل هذه الافتراضات تمثل قيوداً على دوال الإنتاج أو الطلب ، و تحتاج لاختبار حتى يمكن التأكد من مدى صحتها .

ويمكن توضيح اختبار مدى صحة هذه الافتراضات أو القيود باستخدام تحليل التباين على النحو التالي :

(أ) اختبار مدى صحة افتراض ثبات غلة الحجم :

لاختبار مدى صحة افتراض ثبات غلة الحجم في حالة دالة إنتاج تأخذ صيغة كب–دوجلاس التالية :

ص = أ ع ^ب١^ س ^ب٢^ ⟵ $Y = A\,L^{b1}\,K^{b2}$

حيث : ص (Y) = حجم الإنتاج ، س (K) = رأس المال ، ع (L) = العمل ،

يجب تتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقدير دالة الإنتاج باستخدام البيانات المتاحة من خلال الصورة غير المقيدة السابقة .

فإذا افترضنا أن التقدير جاء على النحو التالي :

$\hat{ص} = ١٠ ع^{٠,٨} س^{٠,٥}$ ، $\sum د_ر^٢ = ٢٠٠$ ، ن = ٢٣ .

فإن هذا يعني أن $\hat{ب}_١ + \hat{ب}_٢ = ٠,٨ + ٠,٥ = ١,٣$ بما يشير إلى وجود غلة حجم متزايدة. ويصبح من المتعين علينا أن نختبر ما إذا كان المجموع $\hat{ب}_١ + \hat{ب}_٢$ ينحرف جوهرياً عن الواحد أم لا ؟ أي أننا نريد اختبار الفرض :

ب ١ + ب ٢ = ١ (غلة الحجم ثابتة) $b_1 + b_2 = 1$

في مواجهة الفرض

ب ١ + ب ٢ ≠ ١ غلة الحجم غير ثابتة $b_1 + b_2 \neq 1$

(٢) ثم نقوم بتقدير دالة الإنتاج كب-دوجلاس في ظل الافتراض ب ١ + ب ٢ = ١ والذي يعني أن غلة الحجم ثابتة . ومن هذا الافتراض نجد أن ب ٢ = ١ − ب ١ ، ومن ثم تصبح دالة الإنتاج المقيدة :

$ص = أ ع^{ب١} س^{١-ب١}$ $Y = A L^{b1} K^{1-b1}$

$$ص = \frac{أ س ع^{ب١}}{س^{ب١}}$$

وبقسمة الطرفين على س نحصل على :

$$\left(\frac{ص}{س}\right) = أ \frac{س}{س} \cdot \left(\frac{ع}{س}\right)^{ب١}$$

$$\therefore ص^* = أ^* \left(\frac{ع}{س}\right)^{ب١*} \qquad Y^* = A^*\left(\frac{L}{K}\right)^{b_1^*} \quad ..(٩-٢٨)$$

حيث :

ص * = كمية الإنتاج لوحدة رأس المال = (*Y)

$$\frac{ع}{س} = \text{كمية العمل لوحدة رأس المال} = \frac{L}{K}$$

إذا افترضنا أنه بعد تقدير دالة الإنتاج (٩-٢٨) المقيدة اتضح أن : أ * = ٨ ، إذن ب*٢ = ١ - ب*١ = ٠,٤ ، ومن ثم فإن دالة الإنتاج المقيدة تصبح كما

$$ص = ٨ ع^{٠,٦} س^{٠,٤}$$

(٣) نحسب $\sum$ د٢ ٢ فإذا اتضح أنها تساوى ٢٥٠ مثلاً ، نقوم باستخدامها في حساب ف * حيث :

$$ف^* = \left[\frac{\sum د_٢^٢ - \sum د_١^٢}{\sum د_١^٢}\right] (ن - ك) \qquad (٩-٢٩)$$

$$F^* = \left[\frac{(\sum e_2^2 - \sum e_1^2)}{\sum e_1^2}\right] n - k$$

وبالبحث عن ف الجدولية عند مستوى معنوية معين ، ودرجات حرية ن١ = ١ ، ن٢ = ن - ك ومقارنتها مع ف * ، فإذا اتضح أن ف * > ف فإننا نرفض الفرض القائل بأن : ب١ + ب٢ = ١ ، ونقبل الفرض البديل : ب١ + ب٢ ≠ ١ . ومن ثم يصبح افتراض ثبات غلة الحجم افتراض غير واقعي ، و العكس صحيح . وفى حالتنا هذه نجد أن :

$$ف^* = \left[\frac{٢٥٠ - ٢٠٠}{٢٠٠}\right] [٢٣ - ٣] = \frac{٥٠ \times ٢٠}{٢٠٠} = ٥$$

وبالبحث عن ف الجدولية نجد أنها تساوي :

$$ف_{٠,٠١ ، ٢٠} = ٤,٣٥ .$$

وبمقارنة ف * ، ف ، نجد أن ف * > ف مما يعنى أن افتراض ثبات غلة الحجم غير صحيح ، وأن هناك غلة حجم متزايدة ، حيث $ب_1 + ب_2 > 1$.

(ب) اختبار مدى صحة افتراض الرشد الاقتصادي :

إذا افترضنا أن دالة الطلب تأخذ الصيغة :

$$ص = أ\ ث^{ب_1} ل^{ب_2} \qquad (Y = A P^{b1} X^{b2}) \ .... \ (٩-٣٠)$$

حيث :

ص = كمية مبيعات السلعة (Y)

ث = سعر السلعة (P)

ل = الدخل النقدي (X)

فإن افتراض الرشد الاقتصادي يقتضي أن يكون المجموع ($ب_1 + ب_2$) = صفر .

ولاختبار مدى صحة هذا الافتراض نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقدير الصيغة غير المقيدة (٩-٣٠) السابقة مع حساب $\sum د_1^2$.

(٢) ثم نقوم بتقدير الصيغة المقيدة والتي تفترض أن :

$$ب_1 + ب_2 = صفر \quad ومنها \quad ب_1 = - ب_2$$

ومن ثم تصبح الصيغة المقيدة كما يلي :

$$ص = أ\ ث^{-ب_2} ل^{ب_2} .$$

$$\therefore ص = أ \left(\frac{ل}{ث} \right)^{ب_2} \qquad Y = A \left(\frac{X}{P} \right)^{b2} \ .... \ (٩-٣١)$$

وبتقدير الصيغة (٩-٣١) وتحديد $\sum د_2^2$ نستطيع إجراء الاختبار على نفس النحو الذي سبق .

(حـ) اختبار مدى صحة بعض القيود في الحالة العامة :

افترض أن لدينا معادلة انحدار تأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ص}_{ي} = \text{أ} + \text{ب}_{1}\text{س}_{1ي} + \text{ب}_{2}\text{س}_{2ي} + \text{ب}_{3}\text{س}_{3ي} + ... + \text{ب}_{ن}\text{س}_{ني} \quad ..... (٩-٣٢)$$

وتوفر لدينا بعض المعلومات من مصادر أخرى تشير إلى أن :

ب ١ = ١ ، ب ٢ = ب ٣ . فإذا أردنا اختبار مدى صحة هذه القيود من خلال العينة المتاحة لدينا نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقدير الصيغة (٩-٣٢) غير المقيدة ونحدد $\sum \text{د}_{1}^{2}$ بدرجات حرية ن - ك .

(٢) نقوم بالتعويض عن القيود في المعادلة (٩-٣٢) فنحصل على :

$$\text{ص} - \text{س}_{1} = \text{أ} + \text{ب}_{2}(\text{س}_{2} + \text{س}_{3}) + \text{ب}_{4}\text{س}_{4} + ... + \text{ب}_{ن}\text{س}_{ن} \quad (٩-٣٣)$$

ويصبح عدد المعلمات المراد تقديرها في هذه الحالة أقل = ك - ٢ حيث لا يوجد هناك ب ١ أو ب ٣.

ونقوم بتقدير الصيغة المقيدة (٩-٣٣) ونحدد $\sum \text{د}_{2}^{2}$ بدرجات حرية =

[ن - ك + ٢] = [ن - ك] + ٢

(٣) نقوم بتحديد الفرق بين $\sum \text{د}_{2}^{2} - \sum \text{د}_{1}^{2}$ بدرجات حرية تساوى:

[ن - ك + ٢] - [ن - ك] = ٢ = عدد القيود المفروضة .

(٤) نقوم بحساب ف* = $\dfrac{\left[\sum \text{د}_{2}^{2} - \sum \text{د}_{1}^{2}\right] / 2}{\sum \text{د}_{1}^{2} / (\text{ن} - \text{ك})}$

$$F^* = \frac{[\Sigma e_{i2}^2 - \Sigma e_{i1}^2]/2}{\Sigma e_{i1}^2 / (n-k)}$$

ثم نقارنها مع ف الجدولية بنفس الطريقة السابقة .

الجزء الثاني

المشاكل القياسية

Econometric problems

مقدمة

تقوم طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) على أساس عدد من الافتراضات التي أشرنا إليها في الجزء الأول . ولا شك أن هذه الافتراضات قد تتوفر في الواقع وقد لا تتوفر . وفي حالة توفرها تكون طريقة المربعات الصغرى العادية صالحة للاستخدام في قياس العلاقات الاقتصادية محل الاهتمام . أما في حالة عدم توافرها فإن طريقة المربعات الصغرى العادية لا تصبح هي الطريقة الملائمة لتقدير معلمات العلاقات الاقتصادية ، ويتعين البحث في هذه الحالة عن طرق قياسية أخرى أكثر ملائمة. وبمعنى آخر إذا لم تتوفر الافتراضات التي تقوم على أساسها طريقة المربعات الصغرى العادية في الواقع فإن هذا يترتب عليه ظهور بعض المشاكل القياسية التي تجعل من هذه الطريقة أسلوباً غير ملائم لتقدير العلاقات الاقتصادية .

وحتى نختبر مدى توفر هذه ا لافتراضات يتعين علينا إجراء بعض الاختبارات مستخدمين بعض المعايير القياسية . وسوف نعرض في هذا الجزء لأربعة مشاكل قياسية هي :

(١) مشكلة الارتباط الذاتي Autocorrelation .

(٢) مشكلة الامتداد الخطي المتعدد Multicollinearity .

(٣) مشكلة عدم ثبات التباين Heteroscedasticity .

(٤) مشكلة تقدير النماذج ذات الفجوات الزمنية Lagged variable models .

على أن نتناول كل مشكلة منها في فصل مستقل .

الفصل العاشر

الارتباط الذاتي

Autocorrelation

يعتبر الارتباط الذاتي أحد المشاكل التي يترتب على وجودها عدم دقة في قياس معاملات العلاقات الاقتصادية عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . وسوف يتم التركيز في هذا الفصل على عدد من النقاط الأساسية التي تتعلق بهذه المشكلة والتي من أهمها : تعريف الارتباط الذاتي ، وأشكال الارتباط الذاتي ، وأسباب الارتباط الذاتي ، واختبار الارتباط الذاتي ، ونتائج الارتباط الذاتي ، ثم علاج الارتباط الذاتي. وسوف يتم تناول هذه النقاط في مبحثين :

المبحث الأول : التعريف بمشكلة الارتباط الذاتي.

المبحث الثاني : اختبار الكشف عن الارتباط الذاتي وعلاجه .

المبحث الأول

التعريف بمشكلة الارتباط الذاتي

(١٠-١-١) تعريف الارتباط الذاتي :

يشير الارتباط الذاتي بوجهٍ عام إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير. وفى نماذج الانحدار عادةً ما تشير مشكلة الارتباط الذاتي إلى وجود ارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي " ع " . وفى هذه الحالة تكون قيمة معامل الارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي (أو معامل التغاير) (ر ع،ع) غير مساوية للصفر . ووجود مشكلة ارتباط ذاتي يخل بأحد الافتراضات التي تقوم عليها طريقة المربعات الصغرى العادية . وهى تعنى أن خطأ ما حدث في فترة ما ، ثم أخذ يؤثر في الأخطاء الخاصة بالفترات التالية بطريقة تؤدى لتكرار نفس الخطأ أكثر من مرة . أي أنه قد يوجد هناك خطأ واحد ولكنه يتكرر في كل الفترات التالية بما يؤدى لظهور قيم الحد العشوائي عند مستوى يختلف عن القيم الحقيقية .

(١٠-١-٢) أشكال الارتباط الذاتي :

قد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى " First order " أو الرتبة الثانية أو من رتبة أعلى . وفى حالة الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى نجد أن كلٍ قيمة من قيم الحد العشوائي مرتبطة بالقيمة التي تسبقها فقط . ويمكن تمثيل حالة الارتباط الذاتي من هذه الرتبة بمعادلة الانحدار التالية :

$$ع_ر = ذ ع_{ر-١} + و_ر \qquad u_t = \rho u_{t-1} + w_t \quad ......(١٠-١)$$

حيث $ع_ر$ = قيمة الحد العشوائي في الفترة الحالية ، $ع_{ر-١}$ = قيمة الحد العشوائي في الفترة السابقة ، $و_ر$ = الخطأ العشوائي في معادلة الحد العشوائي "ع" .

ويسمى " ذ " (ρ) بمعامل الارتباط الذاتي ، ويمكن قياسه باستخدام بيانات عينة باستخدام الصيغة التالية :

$$\hat{ذ} = \frac{\sum د_ر \, د_{ر-١}}{\sqrt{\sum د^٢_ر \sum د^٢_{ر-١}}} = \text{.................(١٠-٢)}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sqrt{\sum e^2_t \sum e^2_{t-1}}}$$

حيث " $د_ر$ " (e_t) تشير إلى الحد العشوائي المقدر باستخدام طريقة البواقي من عينة. وفى حالة العينات الكبيرة يلاحظ أن $\sum د^٢_ر = \sum د^٢_{ر-١}$. ومن ثم تصبح المعادلة (١٠-٢) كالتالي:

$$\hat{ذ} = \frac{\sum د_ر \, د_{ر-١}}{\sum د^٢_ر} \longrightarrow \hat{\rho} = \frac{\sum e_t \, e_{t-1}}{\sum e^2_t} \text{.(١٠-٣)}$$

أما في حالة الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية فإن كل قيمة من قيم الحد العشوائي تكون مرتبطة بالقيمتين السابقتين لها . ويمكن تمثيل هذه الحالة بمعادلة الانحدار التالية:

$$ع_ر = ذ_١ ع_{ر-١} + ذ_٢ ع_{ر-٢} + و_ر \text{ .... (١٠-٤)}$$

$$u_t = \rho_1 + u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + W_t$$

وهكذا بالنسبة للحالات الأخرى من الرتبة الأعلى .

و الارتباط الذاتي قد يكون ارتباطاً ذاتياً زمنياً Time series autocorrelation أو ارتباطاً ذاتياً قطاعياً Spatial autocorrelation . أما عن الارتباط الذاتي الزمني فهو يشير للارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي عبر فترات زمنية متعاقبة عند استخدام بيانات سلسلة زمنية . وفيما يتعلق بالارتباط الذاتي القطاعي فهو يشير إلى الارتباط بين القيم المختلفة للحد العشوائي الخاصة بمفردات العينة عند نقطة زمنية معينة، ويوجد عند استخدام بيانات قطاعية .

كما يلاحظ أن الارتباط الذاتي قد يكون موجباً أو سالباً . وهو يكون موجباً إذا كان معامل الارتباط الذاتي " ذ " أكبر من الصفر ، ويكون سالباً إذا كانت قيمته أقل من الصفر . ويلاحظ في هذا الصدد أن قيمة " ذ " تتراوح بين - ١ ، + ١ . وعندما ذ = ± ١ يكون الارتباط الذاتي تاماً وتكون مشكلة الارتباط الذاتي عند حدها الأقصى . أما إذا كان ذ = صفر فإن هذا يشير إلى انعدام وجود هذه المشكلة . وعموماً فإن شكل الانتشار للبواقي " $د_ر$ " التي هي مقدرات للقيم الحقيقية للمتغير العشوائي " ﻉ " يمكن أن يوضح لنا اتجاه الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى . فإذا قمنا بحساب القيم $د_ر$ ، $د_{ر-١}$ باستخدام دالة الانحدار المقدرة :

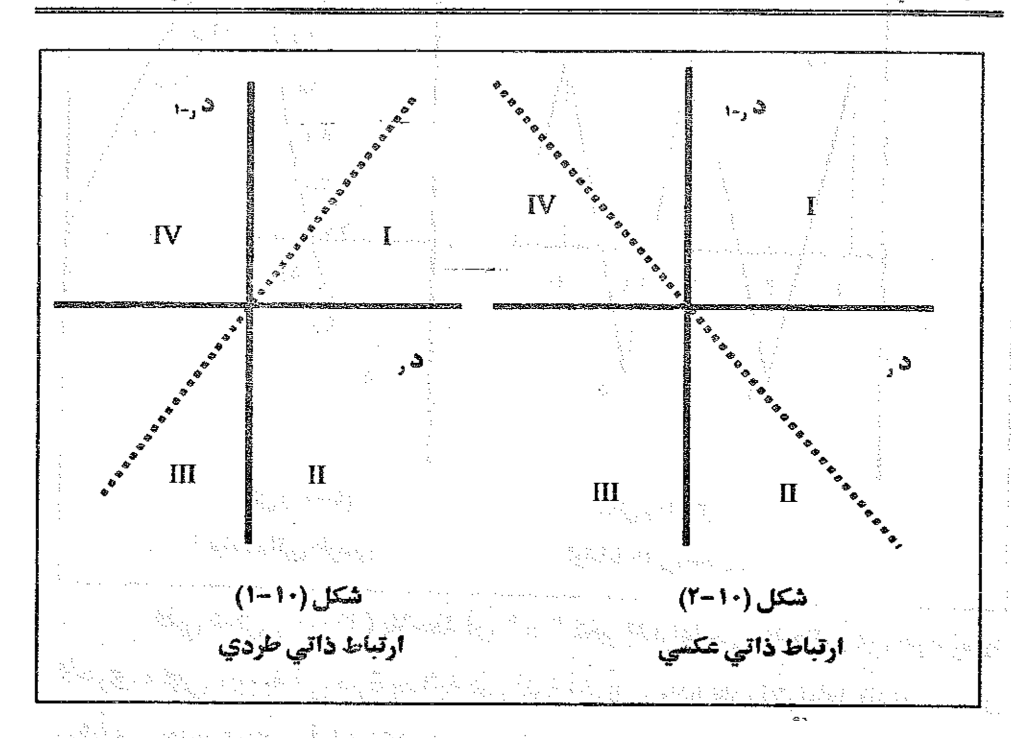
$$ص_ر = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١ + ... + د_ر$$

ثم صنفناها كما بالجدول (١٠-١) ، ورصدناها في شكل انتشار ، فمن الممكن أن نحصل على أحد الشكلين (١٠-١) أو (١٠-٢) .

جدول (١٠-١)

تصنيف القيم المقدرة للحد العشوائي لمتغيرين

المشاهدة	الحد العشوائي " د "	المتغير الأول " $د_ر$ "	المتغير الثاني " $د_{ر-١}$ "
١	$د_١$	$د_٢$	$د_١$
٢	$د_٢$	$د_٣$	د
٣	$د_٣$	$د_٤$	$د_٣$
٤	$د_٤$	$د_٥$	$د_٤$
٥	$د_٥$	$د_١$	$د_٥$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	$د_ن$	$د_{ن-١}$
ن	$د_ن$	–	–

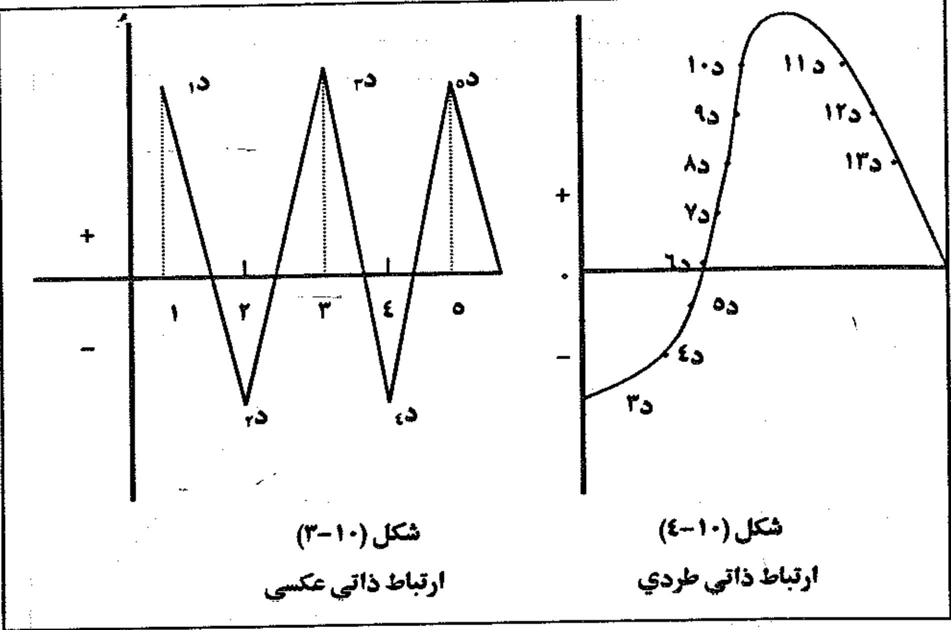


شكل (١٠-١)
ارتباط ذاتي طردي

شكل (١٠-٢)
ارتباط ذاتي عكسي

ويلاحظ أن الارتباط الذاتي في الشكل (١٠-١) موجب ، أما الارتباط الذاتي في الشكل (١٠-٢) فهو سالب . وحيث أن الوسط الحسابي لكلٍ من د ر ، د ر-١ يساوى صفر ، فإن الخطوط المتعامدة التي تمر بالأوساط الحسابية لهما ستكون هي نفسها المحاور الأصلية والتي تتقاطع عند نقطة الأصل . ومن ثم يمكن القول إذا كان شكل الانتشار للبواقي د ر ، د ر-١ يمر بالربعين I ، III فإن الارتباط الذاتي يكون طردياً . أما إذا كان يمر بالربعين II ، IV فإن الارتباط الذاتي يكون عكسياً .

كما يمكن الحكم على اتجاه الارتباط الذاتي من المسار الزمني للمتغير العشوائي ممثلاً في " د ر " بالشكلين (١٠-٣) ، (١٠-٤) .



شكل (١٠-٣)
ارتباط ذاتي عكسي

شكل (١٠-٤)
ارتباط ذاتي طردي

ففي شكل (١٠-٣) يلاحظ أن " د " تتغير إشارتها على التوالي من فترة زمنية لأخرى ، فهي موجبة في فترة وسالبة في فترة أخرى . ولذا فإن الارتباط الذاتي يكون سالباً في هذه الحالة . أما الشكل (١٠-٤) فهو يمثل حالة التقلب الدوري ، وفيه نجد أن قيم " د " لا تتغير إشارتها من فترة لأخرى ، وإنما تظل الإشارة واحدة لمجموعة قيم متتالية قد تكون موجبة أو سالبة ، وفي مثل هذه الحالة يكون الارتباط الذاتي موجباً .

(١٠-١-٣) أسباب الارتباط الذاتي :

يمكن تلخيص أهم أسباب الارتباط الذاتي فيما يلي :

(١) حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتياً . فمن المعروف أن حذف بعض المتغيرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف ، وهذا ينعكس بدوره في قيم الحد العشوائي " ء " . فإذا كانت قيم المتغير التفسيري المحذوف مرتبطة ذاتياً عبر الفترات المتتالية ، مثل الدخل الذي تتأثر قيمته في الفترة الحالية

بقيمته بالفترة السابقة ، فإن خطأ الحذف في الفترات المتتالية تكون قيمه مرتبطة ذاتياً أيضاً، وبالتالي يتولد هناك نوع من الارتباط الذاتي بين قيم " ع " .

فإذا قمنا بتقدير دالة الطلب باستخدام النموذج التالي :

ط ر = أ + ب ١ ث ١ + ب ٢ ث ٢ + ع ر

حيث : ط ر = الكمية المطلوبة ، ث ١ = سعر السلعة ، ث ٢ = سعر السلعة الأخرى ، في حين كانت الصيغة الصحيحة للنموذج هي :

ط ر = أ* + ب ١ ث ١ + ب* ٢ ث ٢ + ب* ٣ ل + ع ر

فإن هذا يعنى أننا حذفنا المتغير " ل " الذي يشير إلى الدخل من النموذج ، الأمر الذي قد ينعكس في قيمة الحد العشوائي " ع ر " ، حيث ع ر = ب* ٣ ل + ع ر في هذه الحالة على الأقل . فإذا كانت قيم الدخل مرتبطة عبر الفترات المتتالية فإن حذفه من النموذج يؤدى لارتباط قيم الحد العشوائي ع ر عبر الزمن . وتعرف هذه الحالة باسم " شبه الارتباط الذاتي " حيث أن الارتباط الذاتي لا يرجع لطبيعة المتغير العشوائي وإنما يرجع لوجود ارتباط ذاتي بين قيم متغير تفسيري ما .

ولكن يلاحظ أنه في حالة وجود أكثر من متغير تفسيري محذوف ذات قيم مرتبطة ذاتياً فإن قيم الحد العشوائي قد لا تكون مرتبطة ذاتياً ، حيث يحتمل أن تكون أنماط الارتباط الذاتي للمتغيرات التفسيرية المحذوفة في اتجاهات متضادة بحيث يلغى أثر بعضها البعض .

(٢) سوء تعيين الشكل الرياضي للنموذج . إذا تم استخدام صيغة رياضية تختلف عن الصيغة الحقيقية للعلاقة محل التقدير ، فإن قيم الحد العشوائي " ع " قد تظهر ارتباطاً ذاتياً . فعلى سبيل المثال إذا كانت العلاقة الحقيقية للتكلفة الحدية غير خطية بحيث تأخذ الصيغة التالية :

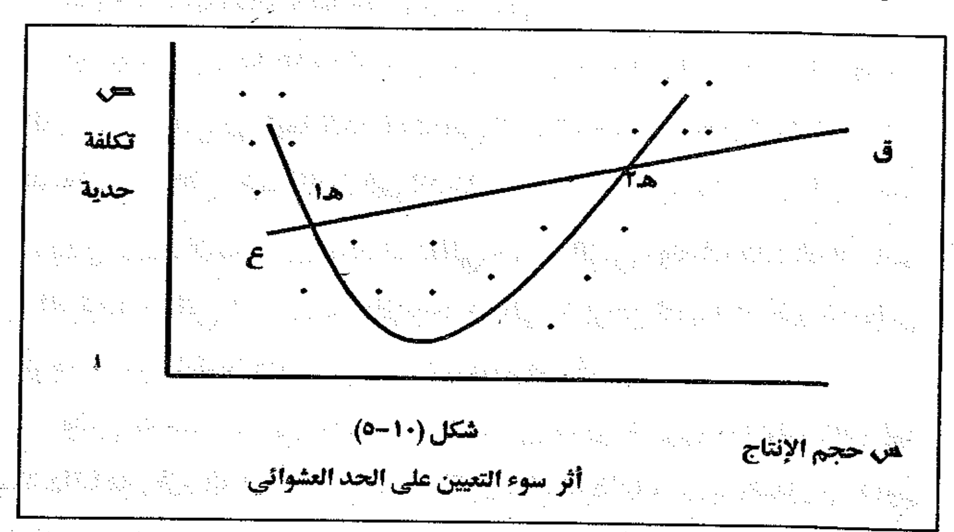
ص ر = أ + ب ١ س ر + ب ٢ س ٢ر + ع ر

حيث : ص = تكلفة حدية ، س = حجم الإنتاج .

غير أن الباحث قام باستخدام الصيغة الخطية التالية :

$$ص = أ^{*} + ب^{*}_{1} س + ع_{2}$$

فلاشك أن استخدام الصيغة الخطية بدلاً من غير الخطية ينطوي على نوع معين من الخطأ ينعكس في الحد العشوائي ، حيث $ع_{2} = ب_{2} س^{2} + ع_{1}$ على الأقل في هذه الحالة . ومثل هذا الخطأ في التعيين يتكرر بالنسبة لكل المشاهدات التي تحتوى عليها العينة ، الأمر الذي يؤدى لوجود ارتباط ذاتي بين قيم " ع " . ويتضح هذا الأمر من الشكل (١٠-٥) .



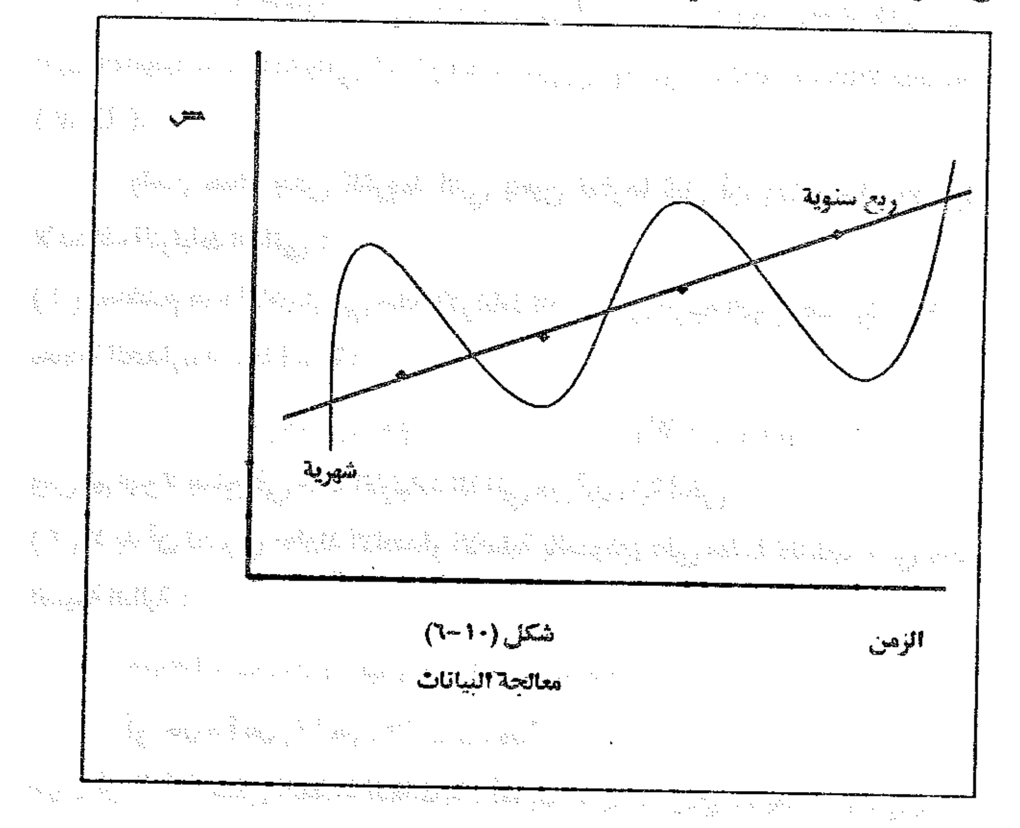
شكل (١٠-٥)
أثر سوء التعيين على الحد العشوائي

فاستخدام الصيغة الخطية الممثلة في الخط "ق ع" بالرغم من أن شكل الانتشار غير خطى يعني خطأ في التقدير يتكرر بالنسبة لكل المشاهدات المحصورة بين $هـ_{1}$ ، $هـ_{2}$ ، وهو يتمثل في كون القيم المقدرة تبالغ في القيم المشاهدة .

(٣) سوء تعيين المتغير العشوائي " ع " نفسه . فمن الممكن أن نتوقع في عديد من الحالات أن تكون القيم الحقيقية المتتالية للمتغير العشوائي " ع " مرتبطة ذاتياً دون سبب خارجي . فأثر العوامل العشوائية الصافية كالحروب والأوبئة والإضرابات العمالية

يمكن أن ه.م.د لأكثر من فترة على المتغير التابع ، مما يؤدى لوجود ارتباط ذاتي بين قيم " ع " وتسمى هذه الحالة بالارتباط الذاتي الحقيقي .

(٤) معالجة البيانات . ففي بعض الحالات قد تكون البيانات المنشورة شهرية ويريد الباحث بيانات على أساس ربع سنوي ، فيقوم بتجميع بيانات كل ثلاثة شهور ثم يحصل على متوسط لها . ولا شك أن تمثيل بيانات ثلاثة شهور بنقطة واحدة ينطوي على نوع من التقريب يظهر البيانات في صورة أقل تقلباً كما هو واضح في الشكل (١٠-٦) .



شكل (١٠-٦)
معالجة البيانات

ويتضح من الشكل (١٠-٦) أن تقريب البيانات الشهرية بأخذ متوسطات ربع سنوية ينطوي على نوع من الخطأ يتكرر من مشاهدة لأخرى نتيجة لعملية التقريب مما يودى لوجود ارتباط ذاتي .

المبحث الثاني

اختبارات الكشف عن الارتباط الذاتي وعلاجه

يتعين التفرقة بين نوعين من معايير اختبار الارتباط الذاتي ، الأول الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى ، والثاني الارتباط الذاتي من رتبة أعلى .

(١٠-٢-١) اختبار الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى :

من بين الاختبارات التي تستخدم في التحقق من وجود ارتباط ذاتي بين القيم الحقيقية للحد العشوائي " ع " (اختبار ديربن-واتسون Durbin-Watson test (D.W).

ولكن هناك بعض الشروط التي يتعين توفرها قبل أن يصلح هذا الاختبار لاكتشاف الارتباط الذاتي :

(١) يستخدم هذا الاختبار في حالة الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى فقط والتي تأخذ معادلة انحداره الصيغة التالية :

$$u_t = \rho u_{t-1} + W_t \qquad\qquad ع_ر = ذ ع_{ر-1} + و_ر$$

ومن ثم فهو لا يصلح في حالة الارتباط الذاتي من أي رتبة أعلى .

(٢) لا بد أن تحتوي معادلة الانحدار الأصلية بالنموذج على معلمة تقاطعية ، أي تأخذ الصيغة التالية :

$$ص = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + \text{..........} + ع$$

$$\text{أو} \quad ص = أ س_1^{ب_1} س_2^{ب_2} \text{........} هـ^{ع}$$

حيث أن " أ " تمثل المعلمة التقاطعية . أما إذا كان النموذج بطبيعته لا يحتوى على معلمة تقاطعية ، فيتعين إعادة تقديره مع وجود معلمة تقاطعية للتأكد من عدم وجود أو من وجود ارتباط ذاتي .

(٣) يتعين ألا يحتوى نموذج الانحدار الأصلي على المتغير التابع ذات الفجوة الزمنية كأحد متغيراته التفسيرية . فإذا افترضنا أن س ز هو الاستهلاك في الفترة ز ، س ز-١ هو الاستهلاك في الفترة السابقة ، ل ز هو الدخل فإن نموذج الانحدار التالي :

س ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ س ز-١ + ع ز

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$$

لا يمكن أن نجرى عليه اختبار ديربن-واتسون .

(٤) لا بد أن يكون حجم العينة أكبر من ١٤ حتى يمكن إجراء الاختبار لأن الجداول الخاصة به تبدأ من ن = ١٥ .

ومن مزايا اختبار ديربن-واتسون أنه يمكن إجراءه بسهولة باستخدام عنصر المتبقي " د " الذي يمكن حسابه من معادلة الانحدار .

ويعتمد اختبار ديربن-واتسون على إحصائيتين هما ى * (ى المحسوبة) ، ى الجدولية ، ويعرفان في الكتب الإنجليزية بالرمزين * d ، d . ويتم حساب ى * المحسوبة من بيانات العينة باستخدام : صر المتبقي " د " e . أما ى الجدولية فيتم الحصول عليها من جداول أعدت خصيصا لذلك .

ونستخدم هاتين الإحصائيتين في إجراء اختبارات على الفروض التالية :

فرض العدم : ف . : ذ = صفر $(\rho = 0)$

في مواجهة :

الفرض البديل ف ١ : ذ ≠ صفر - اختبار طرفين $(\rho \neq 0)$

ذ > صفر - ارتباط ذاتي طردي $(\rho > 0)$

ذ < صفر - ارتباط ذاتي عكسي $(\rho < 0)$

فإذا ما تمخض الاختبار عن قبول فرض العدم : ذ = صفر ، فإن هذا يعنى عدم وجود مشكلة ارتباط ذاتي بالنموذج ، أما إذا تمخض الاختبار عن رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل فإن هذا يعنى وجود مشكلة ارتباط ذاتي إما طردي أو عكسي . وسوف نوضح فيما يلي كيفية إجراء اختبار ديربن – واتسون :

أولاً : تحديد ى * المحسوبة (* d)

$$\text{ى}^{*} = \frac{\sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} (\text{د}_{\text{ر}} - \text{د}_{\text{ر}-\text{١}})^{\text{٢}}}{\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}^{\text{٢}}} \quad \text{........................} \quad (\text{١٠–٥})$$

$$d^{*} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وهي نسبة مجموع مربعات الفروق بين قيم البواقي المتتالية عن بعضها إلى مجموع مربعات قيم البواقي (د) . ويلاحظ أن البسط به " ن – ١ " مشاهدة حيث أن عدد الفروق أقل من عدد المشاهدات بواحد ، ذلك لأن القيمة الأولى لا تسبقها قيمة . وبفك الأقواس بالمعادلة (١٠–٥) نحصل على :

$$\text{ى}^{*} = \frac{\sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}^{\text{٢}} + \sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}-\text{١}}^{\text{٢}} - \text{٢} \sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}} \text{د}_{\text{ر}-\text{١}}}{\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}^{\text{٢}}} \quad \text{..} \quad (\text{١٠–٦})$$

ولقد ثبت أنه إذا كان حجم العينة كبيراً فإن :

$$\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}^{\text{٢}} = \sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}-\text{١}}^{\text{٢}} = \sum_{\text{ر}=\text{٢}}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}^{\text{٢}} \quad \text{..............................} \quad (\text{١٠–٧})$$

ومن ثم يمكن كتابة المعادلة (١٠–٦) كما يلي :

$$ى^* = \frac{2\sum_{ر=2}^{ن} د^2_{ر-1} - 2\sum_{ر=2}^{ن} د_ر د_{ر-1}}{\sum_{ر=1}^{ن} د^2_ر}$$

$$ى^* = 2\left[\frac{\sum_{ر=1}^{ن} د^2_{ر-1}}{\sum_{ر=1}^{ن} د^2_ر} - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} د_ر د_{ر-1}}{\sum_{ر=1}^{ن} د^2_ر}\right] \quad ......(١٠-٨)$$

وبالتعويض من (١٠-٣)، (١٠-٧) في (١٠-٨) نحصل على :

$$ى^* = ٢ (١ - \hat{ذ}) \qquad d^* = 2(1 - \hat{\rho}) \quad ....(١٠-٩)$$

وإذا قبلنا أن العلاقة (١٠-٩) تماثل علاقة المجتمع الحقيقية ، فمن الممكن كتابة الصيغة التالية :

$$ى = ٢ (١ - ذ) \qquad d = 2(1 - \rho) \quad ....(١٠-١٠)$$

حيث : ذ (ρ) = معامل الارتباط الذاتي للمجتمع .

ومن العلاقة (١٠-١٠) يمكن استخلاص النتائج التالية :

(أ) إذا كان ذ = صفر ، أي الارتباط الذاتي منعدم ، فإن ى = ٢ ، وهذا يعنى أن الفرض الصفري بشأن معامل الارتباط الذاتي الحقيقي للمجتمع ذ = صفر يكافئ الفرض ى = ٢ . ($d = 2$).

(ب) إذا كان ذ = + ١ ، أي أن الارتباط الذاتي الحقيقي تام موجب ، فإن ى = صفر . وهذا يعني أنه إذا كانت صفر < ى < ٢ فإن الارتباط الذاتي يكون موجباً، وكلما قلت قيمة ى مبتعدة عن ٢ ومقتربة من الصفر ، كلما زادت درجة الارتباط الذاتي الموجب .

(حـ) إذا كان ذ = - ١ ، أي أن الارتباط الذاتي الحقيقي تام سالب ، فإن ى = ٤ . وهذا يعني أنه إذا كانت ٢ < ى < ٤ فإن الارتباط الذاتي يكون سالباً ، وكلما زادت قيمة ى مبتعدة عن ٢ ومقتربة من ٤ كلما زادت درجة الارتباط الذاتي العكسي .

ومما سبق يلاحظ أنه إذا كانت قيمة معامل الارتباط الذاتي " ذ " تتراوح بين - ١ ، + ١، فإن قيمة ى تتراوح بين الصفر ، ٤ .

ويتضح من المعادلة (١٠-٩) أنه بحساب معامل الارتباط الذاتي المقدر " $\hat{ذ}$ " يمكن حساب ى * المحسوبة بدلالته . كما يلاحظ أن العلاقة بين ى ، ذ هي نفس العلاقة بين ى * ، $\hat{ذ}$.

ثانياً : تحديد " ى " الجدولية (d)

يوجد هناك جداول معدة خصيصاً للكشف عن " ى " وهي تسمى :
Durbin-Waston statistic tables

وتتحدد قيم ى بالجدول بعوامل ثلاثة :

(أ) عدد المشاهدات (ن) (n)

(ب) عدد المتغيرات التفسيرية (ك - ١) (K - 1)

(حـ) مستوى المعنوية (١ ٪ ، ٥ ٪) (α)

وتوجد هناك قيمتين لـ " ى " بالجدول :

$ى_{ق}$ حد أعلى ⟵ du-upper limit

$ى_{ر}$ حد أدنى ⟵ dL-lower limit

فعند عدد مشاهدات معين ، وعدد متغيرات تفسيرية معين ، ومستوى معنوية معين، يمكن تحديد القيمتين $ى_{ق}$ ، $ى_{ر}$ من الجدول . ويعطي الجدول (١٠-٢) صورة مبسطة لجدول ديربن-واتسون .

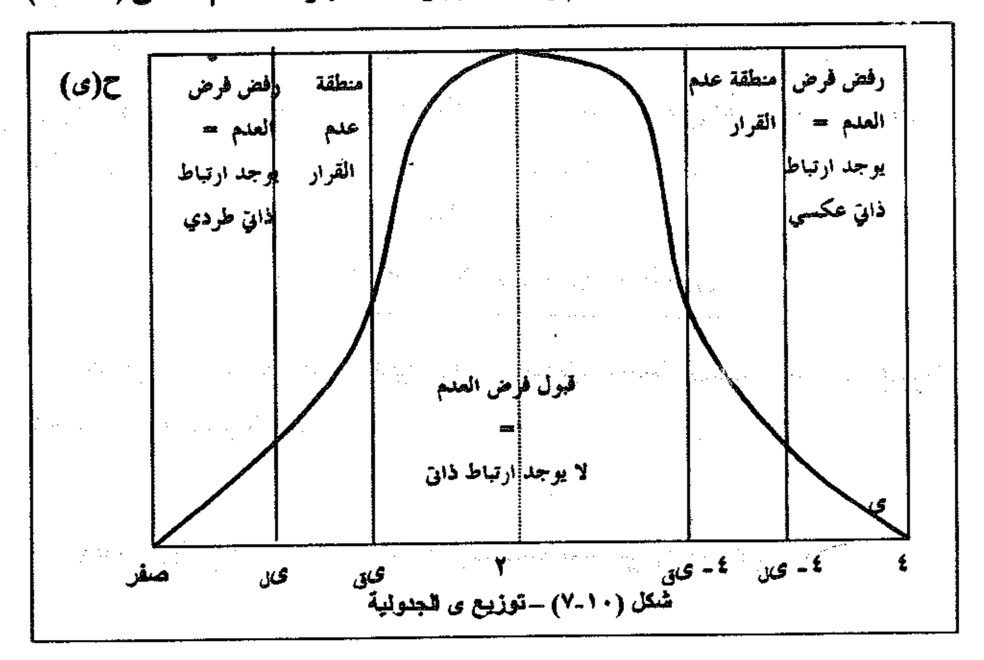
جدول (١٠-٢)

نموذج مبسط لجدول لجدول اختبار ديربن–واتسون

مستوى معنوية	٥٪								١٪							
ك-١	١		٢		٣		٤		١		٢		٣		٤	
ن	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل	ىق	ىل
١٥																
١٦																
١٧																
.																
.																
.																

ثالثاً : إجراء اختبار ديربن–واتسون :

يوجد هناك منطقتين حرجتين إذا وقعت في إحداهما ى * المحسوبة يمكن القول أن هناك ارتباطاً ذاتياً . ولتوضيح كيفية إجراء الاختبار نستخدم الشكل (١٠-٦) .



شكل (١٠-٧) –توزيع ى الجدولية

ويلاحظ من الشكل (١٠-٦) أن قيم " ى " تتراوح بين الصفر ، ٤ وهي توازى قيم معامل الارتباط الذاتي التي تتراوح بين + ١ ، - ١ . كما يلاحظ أن وسط توزيع " ى " هو القيمة ٢ التي توازي القيمة صفر لمعامل الارتباط الذاتي. وتعتبر " ى " توزيع معتدل .

وبمقارنة " ى * " المحسوبة مع أحد قيمتي " ى " الجدولية نجد أن هناك أكثر من احتمال :

(أ) إذا كانت ى * < ى ر نرفض فرض العدم ذ = صفر ونقبل الفرض البديل ذ > صفر ويكون هناك ارتباط ذاتي طردي .

(ب) وفى المقابل إذا كانت ى * > (٤ - ى ر) ، نرفض فرض العدم ذ = صفر. ونقبل الفرض البديل ذ < صفر ، ويكون هناك ارتباط ذاتي عكسي .

(حـ) إذا كانت ى ق < ى * < (٤ - ى ق) ، فإننا نقبل فرض العدم ومن ثم لا يوجد هناك مشكلة ارتباط ذاتي من أي نوع .

(د) إذا كانت ى ر < ى * < ى ق أو (٤ - ى ق) < ى * < (٤ - ى ر) فإن اختبار ديربن-واتسون لا يعطي نتيجة محددة بشأن قبول أو رفض فرض العدم ، وتسمى هذه بمنطقة عدم القرار .

مثال (١٠-١)

اختبار ديربن - واتسون للارتباط الذاتي

افترض أن باحثاً قام بتقدير دالة المبيعات لقطاع صناعي ما عبر الفترة ١٩٨٠ - ١٩٩٤ وفقاً للصيغة التالية :

ص = أ̂ + ب̂ ١ س ١ + ب̂ ٢ س ٢ + د

وكانت بواقي التقدير " د " كما هي موضحة بالجدول (١٠-٣) .

جدول (١٠-٣)

بواقي تقدير دالة المبيعات

سنة	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤
$\text{د}_{\text{ر}}$	١	٢	٤	٥	٦	٦	٧	-٢	-٤	-٦	-٥	-٧	-٨	-٨	-٩

والمطلوب هو اختبار مدى وجود مشكلة الارتباط الذاتي باستخدام إحصائية ديربن - واتسون .

ولإجراء الاختبار يتعين علينا أن نقوم بحساب معامل الارتباط الذاتي " ذ " كما هو موضح بالجدول (١٠-٤) . حيث :

$$\hat{\text{ذ}} = \frac{\sum_{\text{ر}=2}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}}\,\text{د}_{\text{ر}-1}}{\sum_{\text{ر}=1} \text{د}^{2}_{\text{ر}}} = \frac{٤١٣}{٥٠٦} = ٠{,}٨٢$$

ثم نقوم بحساب ى * المحسوبة حيث :

$$\text{ى}^{*} = ٢ (١ - \hat{\text{ذ}}) = ٢ (١ - ٠{,}٨٢) = ٠{,}٣٦$$

ونحدد قيمتي ى الجدولية عند :

(أ) مستوى معنوية ٥ ٪ .

(ب) عدد مشاهدات = ١٥

(حـ) عدد متغيرات تفسيرية = ٢

وبجداول اختبار ديربن-واتسون نجد أن :

$\text{ى}_{\text{ر}}$ = ٠,٩٥ .... حد أدنى .

$\text{ى}_{\text{ق}}$ = ١,٥٤ .... حد أقصى .

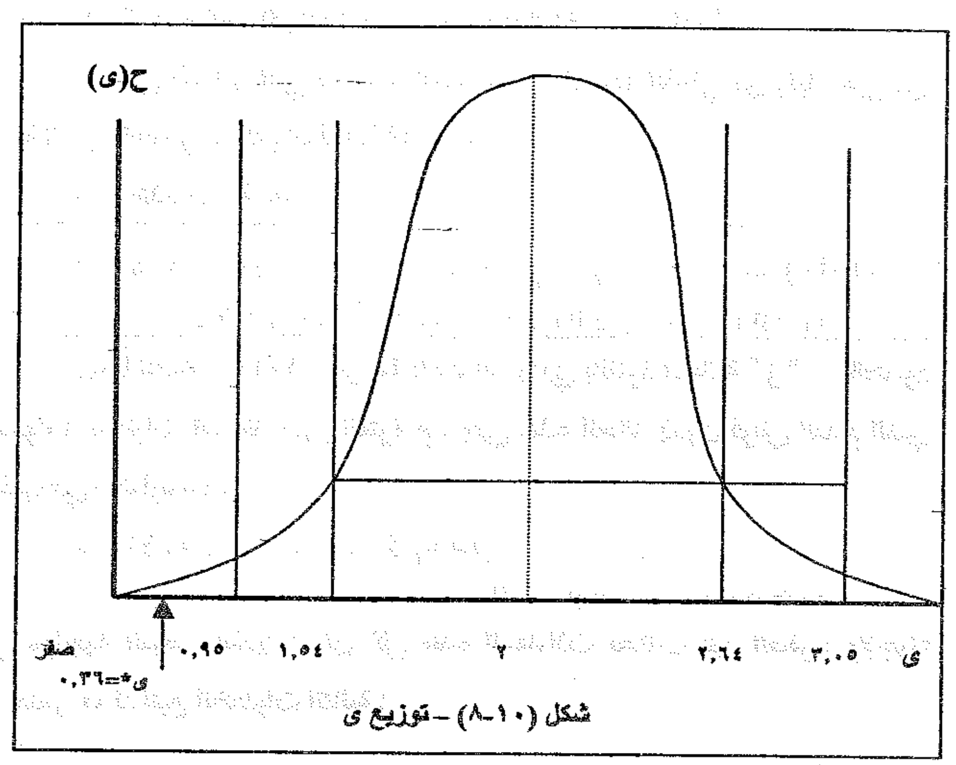
ومن ثم فإن : ٤ - $\text{ى}_{\text{ر}}$ = ٤ - ٠,٩٥ = ٣,٠٥

٤ - $\text{ى}_{\text{ق}}$ = ٤ - ١,٥٤ = ٢,٤٦

جدول (١٠-٤)

السنة	البواقي "د"	المتغير الأول $د_ر$	المتغير الثانى $د_{ر-1}$	$د_ر د_{ر-1}$	$د^2_ر$
١٩٨٠	١	٢	١	٢	١
١٩٨١	٢	٤	٢	٨	٤
١٩٨٢	٤	٥	٤	٢٠	١٦
١٩٨٣	٥	٦	٥	٣٠	٢٥
١٩٨٤	٦	٦	٦	٣٦	٣٦
١٩٨٥	٦	٧	٦	٤٢	٣٦
١٩٨٦	٧	٢-	٧	١٤-	٤٩
١٩٨٧	٢-	٤-	٢-	٨	٤
١٩٨٨	٤-	٦-	٤-	٢٤	١٦
١٩٨٩	٦-	٥-	٦-	٣٠	٣٦
١٩٩٠	٥-	٧-	٥-	٣٥	٢٥
١٩٩١	٧-	٨-	٧-	٥٦	٤٩
١٩٩٢	٨-	٨-	٨-	٦٤	٦٤
١٩٩٣	٨-	٩-	٨-	٧٢	٦٤
١٩٩٤	٩-				٨١
				$\sum د_ر د_{ر-1}$ = ٤١٣	$\sum د^2_ر$ = ٥٠٦

و باستخدام هذه البيانات يمكن رسم توزيع " ى " كما بالشكل (١٠-٧).



شكل (١٠-٨) - توزيع ى

وبمقارنة " ى * " المحسوبة و " ى " الجدولية نجد أن ى.* < ى ر ، ومن ثم فإننا نقبل الفرض البديل القائل بوجود ارتباط ذاتي طردي . ويعتبر الارتباط الذاتي في هذه الحالة من النوع السلسلي .

ويعاني اختبار ديربن-واتسون من بعض العيوب التي تتمثل في :

(أ) لا يعتبر هذا الاختبار صالحاً في حالة وجود متغير تابع ذات فجوة زمنية كمتغير مستقل .

(ب) يعتبر هذا الاختبار محدود بحالة الارتباط الخطي من الرتبة الأولى ، وهذا يعني أنه لا يصلح في حالة الارتباط الذاتي غير الخطي أو الارتباط الذاتي من أي رتبة أعلى من الأولى .

(حـ) لا يعطى هذا الاختبار نتيجة قاطعة إذا وقعت قيمة ى * المحسوبة في مدى معين من القيم .

(١٠-٢-٢) اختبار الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الأولى :

من بين المعايير التي تستخدم للكشف عن الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الرتبة الأولى اختبار (B G) Breusch-Godfrey .

وفى هذه الحالة نجد أن :

ع ز = ذ ١ ع ز-١ + ذ ٢ ع ز-٢ + ... + ذ م ع ز-م + و ز		.... (١٠-١١)

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots\dots\dots + \rho_m u_{t-m} + V_t$$

ووفقاً للصيغة (١٠-١١) يرتبط الحد العشوائي بالفترة الحالية " ز " t بالحدود العشوائية بالفترات السابقة حتى الفترة م . وفى هذه الحالة يكون فرض العدم الذي نرغب في اختباره هو :

ف . : ذ ١ = ذ ٢ = ... = ذ م = صفر .

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots\dots\dots = \rho_m = 0$$

في مواجهة الفرض البديل: أن كل هذه المعاملات تختلف عن الصفر . ولإجراء الاختبار B G نتبع الخطوات التالية :

(أ) نقوم بتقدير دالة الانحدار الأصلية :

ص ز = أ̂ + ب̂ ١ س ١ ز + ب̂ ٢ س ٢ ز + د ز

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + e_t$$

ثم نحسب منها البواقي د ز (e_t) ، حيث :

د ز = ص ز − ص̂ ز		$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$

(ب) إذا كان الارتباط الذاتي الذي نختبره من الرتبة الثالثة مثلاً نقوم بتقدير ما يسمى بالانحدار المساعد على النحو التالي:

د ز = ح̂ + أ̂ ١ س ١ ز + أ̂ ٢ س ٢ ز + ذ̂ ١ د ز-١ + ذ̂ ٢ د ز-٢ + ذ̂ ٣ د ز-٣ + و ز

$$e_t = \hat{C} + \hat{\alpha}_1 X_{1t} + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \hat{\rho}_1 e_{t-1} + \hat{\rho}_2 e_{t-2} + \hat{\rho}_3 e_{t-3} + W_t$$

(١٠-١٢) ...

ثم نقوم بحساب معامل التحديد من الانحدار المساعد ر ٢ (R^2) .

(حـ) يمكن إثبات أن (ن – م) ر ٢ يتبع توزيع كا ٢ . أي أن :

$$(n - m) R^2 \sim \chi^2_m$$

حيث : ن (n)= حجم العينة ، م (m)= رتبة الارتباط الذاتي ، ر ٢ (R^2) = معامل التحديد .
وينطبق هذا في حالة العينات كبيرة الحجم .

(د) بمقارنة (ن – م) ر ٢ مع كا ٢ عند مستوى معنوية معين (١ ٪ أو ٥ ٪) ، ودرجات حرية = م (m) يمكن اختبار فرض العدم الخاص بالارتباط الذاتي . فإذا كان :

(ن – م) ر ٢ > كا ٢ م ، α نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ويكون هناك ارتباط ذاتي على الأقل من الرتبة الأولى ، والعكس صحيح .

ومن أهم خصائص اختبار B G بالإضافة إلى أنه يستخدم في الكشف عن الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الأولى :

(أ) لا يتأثر بظهور قيم المتغير التابع ذات الفجوة الزمنية كمتغير تفسيري .

(ب) يتم تحديد رتبة الارتباط الذاتي (م) التي يتم اختبارها بصورة تحكمية .

(١٠-٢-٣) آثار مشكلة الارتباط الذاتي :

يمكن أن نحصر أهم آثار مشكلة الارتباط الذاتي فيما يلي:

(١) لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على درجة تحيز القيم المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية ، فتبقى القيم المقدرة غير متحيزة رغم وجود هذه المشكلة ، كما تبقى تقديرات هذه الطريقة متسقة ، ولكنها تفقد صفة الكفاءة .

(٢) يؤدي وجود مشكلة الارتباط الذاتي إلى صغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة ع أ̂ ، ع ب̂ عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية ، الأمر الذي يؤدي إلى :

(أ) تضخيم معنوية المعلمات المقدرة .

(ب) عدم دقة فترات الثقة التي تستخدم الأخطاء المعيارية في حسابها .

(حـ) قد تؤدى لعدم صلاحية استخدام اختبار " ت " ، (ف) .

(٣) تصبح التنبؤات المؤسسة على النموذج غير دقيقة .

(٤) المبالغة في تقدير معامل التحديد R^2 .

(١٠-٢-٤) علاج مشكلة الارتباط الذاتي :

لتحديد العلاج الملائم لمشكلة الارتباط الذاتي يتعين أن نقف أولاً على سبب المشكلة ، ويمكن توضيح ذلك فيما يلي :

(١) إذا كان سبب مشكلة الارتباط الذاتي هو حذف بعض المتغيرات المستقلة فالحل هو أن ندرج هذه المتغيرات المحذوفة في الدالة ثم نعيد التقدير مرة أخرى . فإذا كان النموذج محل التقدير مثلاً هو :

س ز = أ + ب ل ز + ع ز ⟵ $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

حيث : س ز = الإنفاق الاستهلاكي خلال الفترة ز ، ل ز = الدخل في الفترة ز ، وثبت أن الدخل ل ز - ١ يؤثر في استهلاك الفترة الحالية أيضا ، فإن حذفه قد يكون أحد العوامل المسببة لهذه المشكلة . وللتأكد من ذلك نقوم بتقدير الدالة التالية :

س ز = حـ + حـ ١ ل ز - ١ + ع ز ⟵ $Y_t = C + C_1 X_{t-1} + u$

فإذا ثبت أن "حـ ١ " لها معنوية إحصائية فإن حذف ل ز - ١ يكون هو أحد أسباب الارتباط الذاتي.

ولتلاشي هذه المشكلة نقوم بإدراج ل ز-١ في النموذج ليصبح كما يلي :

س ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ل ز-١ + ع ز

$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$

أما إذا كان سبب مشكلة الارتباط الذاتي هو سوء تعيين النموذج ، كأن يكون النموذج الحقيقي الصحيح غير خطى وقمنا بتقديره في الصورة الخطية ، فإن الحل هو أن نستخدم الصيغة الرياضية الصحيحة في التقدير على النحو التالي :

لو س = أ * + ب لو ل + ع بدلاً من الصيغة الخطية السابقة .

ثم نختبر لنكشف مدى وجود الارتباط الذاتي، فإذا اختفى بعد هذا التعديل فإن هذا يكون دليلاً على أن سوء تعيين النموذج كان هو السبب .

(٢) أما إذا اتضح أن أحداً من الأسباب السابقة ليس هو المؤدى إلى الارتباط الذاتي نحاول إتباع طريقة أخرى لتخليص النموذج من هذه المشكلة . ومن بين الطرق المتبعة في ذلك طريقة الفروق، والتي نوضحها فيما يلي :

افترض أن النموذج الأصلي يأخذ الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب س ز + ع ز $\qquad Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ .... (١٠–١٣)

وبتقدير الدالة (١٠–١٣) وإجراء اختبار ديربن–واتسون ، افترض أنه اتضح وجود مشكلة ارتباط ذاتي طردي . ويلاحظ في هذه الحالة أنه إذا كانت الدالة (١٠–١٣) صحيحة للفترة " ز " فهي تكون صحيحة أيضاً للفترة (ز – ١) . ومن ثم يمكن إعادة صياغتها كما يلي :

ص ز–١ = أ + ب س ز–١ + ع ز–١ .... (١٠–١٤)

وبضرب المعادلة (١٠–١٤) في المعامل " ذ̂ " نحصل على :

ذ̂ ص ز–١ = أ ذ̂ + ب ذ̂ س ز–١ + ذ̂ ع ز–١ .. (١٠–١٥)

وبطرح المعادلة (١٠–١٥) من المعادلة (١٠–١٣) نحصل على :

ص ز – ذ̂ ص ز–١ = أ (١ – ذ̂) + ب (س ز – ذ̂ س ز–١) + (ع ز – ذ̂ ع ز–١) .. (١٠–١٦)
$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \alpha (1 - \hat{\rho}) + \beta (X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho} u_{t-1})$

وبمعاينة المعادلة (١٠–١٦) نجد أننا إذا قمنا باستخدامها في التقدير فإننا نزيل أثر الارتباط الذاتي من البيانات ممثلاً في ذ̂ . وفي هذه الحالة نحصل على القيم المقدرة أ̂ ، ب̂ بعد استبعاد أثر الارتباط الذاتي. ويتعين ملاحظة أننا نستخدم الفروق بدلاً من القيم المشاهدة الأصلية ص ز ، س ز عند استخدام طريقة المربعات الصغرى

العادية في التقدير . ولعل هذا يؤدى لفقدان مشاهدة من المشاهدات وهى المشاهدة الأولى ، وفى هذه الحالة يتم استخدام الصيغة التالية لتعويض هذه المشاهدة لكلٍ من ص ، س :

$$ص_1 \sqrt{1-\hat{ذ}^2} \quad ، س_1 \sqrt{1-ذ^2}$$

ويلاحظ أيضاً أنه إذا كانت $\hat{ذ} = 1$ فإن المعادلة (١٠-١٦) تتحول إلى :

$$ص_ز - ص_{ز-1} = ب (س_ز - س_{ز-1}) + (ع_ز - ع_{ز-1})$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta (X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1}) \quad ...(١٧-١٠)$$

أي أن المعلمة التقاطعية تسقط من النموذج في هذه الحالة .

وإذا اعتبرنا أن :

$$ص^* = ص_ز - ص_{ز-1} ، س^* = س_ز - س_{ز-1} ، ع^* = ع_ز - ع_{ز-1}$$

فإن المعادلة (١٠-١٧) يمكن كتابتها كما يلي :

$$ص^* = \hat{ب} س^* + ع^* \qquad Y^* = \hat{\beta} X^* + u^* \quad ..(١٨-١٠)$$

وفي هذه الحالة نستخدم الصيغة التالية لتقدير المعلمة ب :

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص^* س^*}{\sum س^{*2}} \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum Y^* X^*}{\sum X^{*2}} \quad .(١٩-١٠)$$

مثال (١٠-٢)

تصحيح الارتباط الذاتي

افترض أن دالة الاستثمار لقطاع صناعي معين تأخذ الصيغة التالية :

$$ص = \hat{أ} + \hat{ب} س + د$$

حيث ص = حجم الاستثمار ، س = حجم الأرباح ، وأن البيانات الخاصة بهما كانت كما بالجدول (١٠-٥) .

جدول (١٠-٥)

استثمار وأرباح قطاع صناعي ، (مليون جنيه)

السنة	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤
ص	١٥	١٦	١٨	٢٢	٢٨	٣٦	٤٤	٥٣	٦٣	٧٤	٨٦	١٠٩	١٢٤	١٤٠	١٦٠
س	٢٠	٢٢	٢٦	٣١	٣٣	٣٧	٤٢	٤٩	٥٠	٥٤	٥٩	٦٠	٦٢	٦٦	٧٤

وبتقدير دالة الاستثمار وإجراء اختبار ديربن-واتسون افترض جدلاً أنه وجد أن : ذ = ١ والمطلوب هو تخليص البيانات من مشكلة الارتباط الذاتي .

بتطبيق المعادلة (١٠-١٧) نخلص البيانات من هذه المشكلة كما بالجدول (١٠-٦) . ويتضح من الجدول (١٠-٦) أن أول قيمة حصلنا عليها كما يلي :

$$\text{س}_1^* = \text{س}_1 \sqrt{1-1} = \text{صفر} \quad ، \quad \text{ص}_1^* = \text{ص}_1 \sqrt{1-1} = \text{صفر} .$$

ويمكن استخدام بيانات ص $_1$ * ، س $_1$ * في تقدير معادلة الانحدار (١٠-١٨) باستخدام الصيغة (١٠-١٩) .

جدول (١٠-٦)

السنة	$ص_{ز}$	$س_{ز}$	$ص^*_{ز} = ص_{ز} - ص_{ز-1}$	$س^*_{ز} = س_{ز} - س_{ز-1}$
١٩٨٠	١٥	٢٠	صفر	صفر
١٩٨١	١٦	٢٢	١= ١٥−١٦	٢=٢٠−٢٢
١٩٨٢	١٨	٢٦	٢= ١٦−١٨	٤=٢٢−٢٦
١٩٨٣	٢٢	٣١	٤= ١٨−٢٢	٥=٢٦−٣١
١٩٨٤	٢٨	٣٣	٦= ٢٢−٢٨	٢=٣١−٣٣
١٩٨٥	٣٦	٣٧	٨= ٢٨−٣٦	٤=٣٣−٣٧
١٩٨٦	٤٤	٤٢	٨= ٣٦−٤٤	٥=٣٧−٤٢
١٩٨٧	٥٣	٤٩	٩= ٤٤−٥٣	٧=٤٢−٤٩
١٩٨٨	٦٣	٥٠	١٠= ٥٣ −٦٣	١=٤٩−٥٠
١٩٨٩	٧٤	٥٤	١١= ٦٣−٧٤	٤=٥٠−٥٤
١٩٩٠	٨٦	٥٩	١٢= ٧٤−٨٦	٥=٥٤−٥٩
١٩٩١	١٠٩	٦٠	٢٣= ٨٦−١٠٩	١=٥٩−٦٠
١٩٩٢	١٢٤	٦٢	١٥=١٠٩−١٢٤	٢=٦٠−٦٢
١٩٩٣	١٤٠	٦٦	١٦=١٢٤−١٤٠	٤=٦٢−٦٦
١٩٩٤	١٦٠	٧٤	٢٠=١٤٠−١٦٠	٨=٦٦−٧٤

أما إذا افترضنا وجود ارتباط ذاتي عكسي تام ، حيث $\hat{ذ} = -1$ فإن المعادلة (١٠-١٧) تصبح كما يلي :

$$ص_{ز} + ص_{ز-1} = 2أ + ب(س_{ز} + س_{ز-1}) + (ع_{ز} + ع_{ز-1})$$

وبقسمة الطرفين على ٢ تصبح هذه الدالة كما يلي :

(ص ز + ص ز-١) / ٢ = أ + ب (س ز + س ز-١) / ٢ + (ع ز + ع ز-١) / ٢

$$\frac{Y_t + Y_{t-1}}{2} = \alpha + \beta \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{u_t + u_{t-1}}{2}$$

و تسمى هذه بطريقة انحدار المتوسط المتحرك لفترتين .

ويمكـــن استخــــدام القيم :

(س ز + س ز-١) / ٢ ، (ص ز + ص ز-١) / ٢

لتقدير معـــادلة الانحدار (١٠-٢٠) بعد التخـــلص من مشكلة الارتباط الذاتي العكسي.

الفصل الحادي عشر
الامتداد الخطي المتعدد
Multicollinearity

يعتبر الامتداد الخطي المتعدد أحد المشاكل القياسية التي تنشأ نتيجة لاختلال بعض افتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية . وسوف نتعرض في هذا الفصل لبعض النقاط الأساسية المتعلقة بهذه المشكلة ، وهي تعريف الامتداد الخطي المتعدد ، وأسبابه ، ونتائجه ، والاختبارات اللازمة لاكتشافه ، ووسائل علاجه .

وسوف يتم تناول هذه النقاط في مبحثين :

المبحث الأول : التعريف بالامتداد الخطى المتعدد

المبحث الثاني : اختبارات الامتداد الخطي المتعدد وعلاجه

المبحث الأول

التعريف بالامتداد الخطي المتعدد

(١١-١-١) مفهوم الامتداد الخطي المتعدد :

يشير مصطلح الامتداد الخطي المتعدد إلى وجود ارتباط خطي بين عدد من المتغيرات التفسيرية في نموذج الانحدار . ومن ثم فإن مشكلة الامتداد الخطى المتعدد لا توجد في حالة الانحدار البسيط وإنما توجد فقط في حالة الانحدار المتعدد .

وتكون مشكلة الامتداد الخطي عند حدها الأقصى إذا كان الارتباط بين المتغيرات التفسيرية تاماً ، أي أن ر س١ س٢ = ± ١ حيث س١ ، س٢ متغيرين تفسيريين .

وفي نموذج انحدار يأخذ الصيغة التالية :

ص = أ̂ + ب̂١ س١ + ب̂٢ س٢ + د .... (١١-١)
$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + e_i$

يوجد هناك امتداد خطى متعدد تام إذا كانت العلاقة بين س١ ، س٢ تأخذ الصيغة التالية:

س١ = ق + ق١ س٢ $X_1 = C + C_1 X_2$ .... (١١-٢)

حيث يكون الحد العشوائي في هذه العلاقة منعدماً ، ومن ثم فإن معامل الارتباط بين المتغيرين التفسيريين س١ ، س٢ يساوى ± ١ .

و تنعدم مشكلة الامتداد الخطى المتعدد إذا كان ر س١ س٢ = صفر ، حيث لا يوجد أي ارتباط بين المتغيرات التفسيرية ، وتسمى المتغيرات التفسيرية في هذه الحالة بالمتغيرات المتعامدة . ويلاحظ أنه في حالة المتغيرات المتعامدة لا يوجد هناك حاجة لإجراء انحدار متعدد طالما أن كل متغير مستقل يؤثر في المتغير التابع بطريقة منفصلة تماماً ، ويكفي في هذه الحالة أن نجري انحداراً بسيطاً لكل متغير مستقل حتى نقيس معلمته الانحدارية . ولتوضيح هذه النقطة دعنا نأخذ المثال التالي:

افترض أن دالة الانحدار المراد تقديرها تأخذ الصيغة (١١-١) ، ومن ثم فإن :

$$\hat{ب}_1 = \frac{\sum س_2^2 \sum ص س_1 - \sum س_1 س_2 \sum س_2 ص}{\sum س_1^2 \sum س_2^2 - (\sum س_1 س_2)^2} \quad (١١-٣)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_2^2 \sum y x_1 - \sum x_1 x_2 \sum y x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

فإذا كان الارتباط بين المتغيرين التفسيريين س ١ ، س ٢ = صفر ، أي أنهما متغيرين متعامدين فإن $\sum$ س ١ س ٢ = صفر ($\sum x_1 x_2 = 0$). وبالتعويض في (١١-٣) عن ذلك نجد أن :

$$\hat{ب}_1 = \frac{\sum ص س_1}{\sum س_1^2} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum y x_1}{\sum x_1^2} \quad ..... \quad .....(١١-٤)$$

ومن ثم فإن معامل الانحدار " $\hat{ب}_1$ " في حالة الانحدار المتعدد = معامل الانحدار "ب١ " في حالة الانحدار البسيط كما هو موضح في المعادلة (١١-٤) إذا كانت المتغيرات التفسيرية متعامدة .

وفى الواقع العملي عادة ما لا يواجهنا أي من الاحتمالين المتطرفين السابقين، ولكن في معظم الحالات يوجد هناك درجة من الارتباط الخطي بين المتغيرات التفسيرية أكبر من الصفر وأقل من الواحد ، أي أن : صفر < ر س١ س٢ < ١ . وفي هذه الحالة تأخذ العلاقة بين المتغيرات التفسيرية الصيغة التالية :

$$س_1 = ق + ق_1 س_2 + و \qquad X_1 = C + C_1 X_2 + W \quad .....(١١-٥)$$

حيث " و " تشير إلى الحد العشوائي الذي يحول العلاقة بين س ١ ، س ٢ من علاقة مؤكدة إلى علاقة احتمالية . ومن الأمثلة الاقتصادية على الامتداد الخطي المتعدد دالة الاستهلاك التي تأخذ الصيغة التالية :

$$ص = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ع \qquad Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u \quad .....(١١-٦)$$

حيث : ص = الاستهلاك ، س ١ = الدخل ، س ٢ = حجم الثروة . فبالرغم من أن كل من حجم الثروة ومستوى الدخل يؤثران على مستوى الاستهلاك فإن مستوى الدخل يرتبط بحجم الثروة ، بل إنه في كثير من الحالات نجد أن الثروة هي المصدر الأساسي ما لم يكن الوحيد للدخل . ويلاحظ أن احتواء معادلة الانحدار (١١-٦) على كلٍ من الدخل والثروة معاً يظهر تأثير الثروة على الاستهلاك في صورة مبالغ فيها . فالتغير في الثروة يؤدى لتغير مباشر في الاستهلاك ، ولكنه يؤدى لتغير الدخل مما يترتب عليه تغير الاستهلاك مرة أخرى . ومن ثم فإن الاستهلاك يتغير نتيجة لتغير كلٍ من الدخل والثروة رغم أنه تغير واحد .

ويلاحظ أن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد توجد فقط إذا كان هناك علاقة خطية بين المتغيرات المستقلة . أما إذا كان هناك علاقة غير خطية فإن هذه المشكلة لا تظهر ولا يترتب عليها آثار سيئة . ومن الأمثلة على ذلك دالة التكاليف التكعيبية حيث :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ١ ^٢^ + ب ٣ س ١ ^٣^ + ع

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_1^3 + u$$

فيلاحظ أن هناك ارتباطاً غير خطي بين كلٍ من س١ ، س١^٢^ ، س١^٣^ ولذلك لا توجد في هذه الحالة مشكلة امتداد خطي متعدد .

كما يلاحظ أن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد قد توجد على مستوى العينة ولكنها لا توجد على مستوى المجتمع . فعندما نجمع بيانات عينة عن الدخل والثروة فهناك احتمال كبير أن يوجد ارتباطاً بين الدخل والثروة لمجموعة الأسر التي جمعنا عنها هذه البيانات ، أما على مستوى المجتمع فهناك عوامل كثيرة تؤثر في الدخل غير الثروة مثل عدد ساعات العمل ، ومستوى التعليم ، والخبرة ، والعمر ، والموطن ، بحيث يتضاءل أثر الثروة على الدخل لأدنى الحدود . أي أننا ننظر للثروة والدخل على أساس أنهما متغيرين مستقلين تماماً على مستوى المجتمع ، ولكنهما قد يكونا مرتبطين على مستوى العينة . ولذلك فإن مشكلة الامتداد الخطى المتعدد يقال أنها مشكلة عينة .

(١١-١-٢) أسباب الامتداد الخطي المتعدد :

يرجع ظهور مشكلة الامتداد الخطي لعديد من الأسباب أهمها :

(١) تميل المتغيرات الاقتصادية لأن تتغير معاً عبر الزمن نظراً لأنها تتأثر جميعها بنفس العوامل . فعلى سبيل المثال تزداد معظم المتغيرات الاقتصادية في أوقات الرواج أو النمو الاقتصادي السريع . فزيادة الطلب الكلي على السلع والخدمات يصاحبها زيادة في الإنتاج وزيادة في العمالة وزيادة في الدخل وزيادة في الاستثمار و الاستهلاك والادخار وارتفاع الأسعار . والعكس يحدث في فترات الكساد .

(٢) استخدام المتغيرات ذات الفجوة الزمنية كمتغيرات تفسيرية بنموذج الانحدار. فعلى سبيل المثال يظهر الدخل الجاري للفترة الحالية ودخل الفترة السابقة في دالة الاستهلاك كمتغيرات مستقلة تؤثر في استهلاك الفترة الحالية ، فتأخذ دالة الاستهلاك الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ل ز-١ + ع ز .... (١١-٧)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$$

حيث :

ص ز = استهلاك الفترة الحالية .

ل ز = دخل الفترة الحالية (X_t).

ل ز-١ = دخل الفترة السابقة (X_{t-1}) .

ولما كانت القيم المتعاقبة لمتغير ما عبر الزمن غالباً ما تكون مرتبطة ، حيث يتأثر دخل الفترة الحالية عادة بدخل الفترة السابقة ، فإن استخدام المتغيرات ذات الفجوة الزمنية كمتغيرات مستقلة قد تؤدى لوجود مشكلة امتداد خطي متعدد .

(٣) بالرغم من أن مشكلة الامتداد الخطي عادة ما تظهر في حالة استخدام بيانات سلسله زمنية إلا أنها قد تظهر في بعض الحالات عند استخدام بيانات قطاعية . فعلى سبيل المثال يلاحظ أنه في حالة استخدام بيانات قطاعية لمجموعة مؤسسات صناعية لتقدير دالة إنتاج ، فإن الكميات المستخدمة من العمل ورأس المال كمتغيرات

مستقلة قد ترتبط بشدة . ويرجع هذا إلى أن المؤسسات الكبيرة عادة ما تستخدم كميات كبيرة من كلٍ من العمل ورأس المال ، في حين أن المؤسسات الصغيرة عادة ما تستخدم كميات قليلة من كلٍ من العمل ورأس المال .

(٤) يؤدى صغر حجم العينة بحيث يصبح عدد المشاهدات قريباً من عدد المتغيرات التفسيرية إلى ظهور مشكلة الامتداد الخطي المتعدد . وتسمى هذه المشكلة بمشكلة صغر حجم العينة Micronumerosity .

(١١-١-٣) نتائج الامتداد الخطي المتعدد :

يتعين التفرقة في هذا الخصوص بين نتائج الامتداد الخطي التام والامتداد الخطي غير التام على النحو التالي :

أولاً : الامتداد الخطي التام :

من أهم نتائج الامتداد الخطي التام :

(١) أن تصبح القيم المقدرة للمعلمات غير محددة . فإذا افترضنا أن هناك علاقة ما يراد تقديرها تأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2 + \text{ع}$$

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

و اتضح أن هناك امتداداً خطياً تاماً حيث $\text{س}_2 = \text{م}\,\text{س}_1$ فإننا لا يمكن أن نقدر قيمة محددة لأي من المعلمتين ب_1 ، ب_2 .

فمن المعروف من المعادلة (٧-١٩) أن :

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{(\sum \text{س}_1 \text{ص})(\sum \text{س}_2^2) - (\sum \text{س}_2 \text{ص})(\sum \text{س}_1 \text{س}_2)}{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2 - (\sum \text{س}_1 \text{س}_2)^2}$$

وبالتعويض عن " س_2 " بقيمتها " $\text{م}\,\text{س}_1$ " نحصل على :

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{\text{م}^2(\sum \text{س}_1 \text{ص})(\sum \text{س}_1^2) - \text{م}^2(\sum \text{س}_1 \text{ص})(\sum \text{س}_1^2)}{\text{م}(\sum \text{س}_1^2)(\sum \text{س}_1^2) - \text{م}^2(\sum \text{س}_1^2)^2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

وهذا يعنى أن المعلمة المقدرة $\hat{ب}_1$ تأخذ قيمة غير محددة . ويلاحظ في هذا الصدد أن $\hat{ب}_1$ تشير إلى التغير في المتغير التابع ص الناجم عن تغير المتغير المستقل $س_1$ بوحدة واحدة مع ثبات المتغير المستقل $س_2$. فإذا كان تغير $س_1$ بوحدة يؤدى لتغير $س_2$ بمقدار " م " فإنه لا سبيل الآن لتثبيت $س_2$ عندما تغير $س_1$ ومن ثم ليس من الممكن تحديد الأثر المنفصل للتغير في $س_1$ على ص

(٢) الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة تصبح كبيرة كبراً لا نهائياً .

لقد اتضح لنا من المعادلة (٧-٣٢) أن :

$$ع^2_{ب_1} = ع^2_د \frac{\sum س_2^2}{\sum س_1^2 \sum س_2^2 - (\sum س_1 س_2)^2}$$

وبالتعويض عن $س_2 = م س_1$ ، نحصل على :

$$ع^2_{ب_1} = ع^2_د \frac{م^2 \sum س_1^2}{م^2 (\sum س_1^2)^2 - م^2 (\sum س_1^2)^2} = \frac{ع^2_د م^2 \sum س_1^2}{صفر} = \infty$$

وهذا يعني أن المعلمات المقدرة بجانب أنها غير محددة فهي غير معنوية إحصائياً طالما أن الخطأ المعياري لها لا نهائي

(٣) يلاحظ أنه وإن كان من غير الممكن قياس قيمة محددة لكل معلمة من معلمات المتغيرات المستقلة المرتبطة ارتباطاً كاملاً إلا أنه من الممكن قياس قيمة إجمالية لمعلمات هذه المتغيرات فإذا افترضنا أن دالة الاستهلاك الحقيقية لدولة ما كانت على النحو التالي :

$$ص = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ب_3 س_3 + ع \quad ....(١١-٨)$$

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

حيث :

ص = الاستهلاك الكلى (Y)

$س_1$ = دخل المناطق الريفية (X_1)

س ٢ = دخل المناطق الحضرية (X_2)

س ٣ = سعر الفائدة (X_3)

وافترضنا أنه خلال فترة التقدير كان دخل المناطق الريفية مرتبط بدخل المناطق الحضرية بحيث أن كل زيادة بوحدة نقدية في أحدهما يصاحبها زيادة بوحدة نقدية في الآخر . أي أن العلاقة التي تربط بينهما تأخذ الصيغة التالية :

س ١ = س ٢	($X_1 = X_2$)	................(١١-٩)

حيث يتوزع الدخل الكلى بينهما بالتساوي ، فإننا بالتعويض عن س ٢ من (١١-٩) في (١١-٨) نحصل على :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ١ + ب ٣ س ٣ + ع

ص = أ + (ب ١ + ب ٢) س ١ + ب ٣ س ٣ + ع .... (١١-١٠)
$Y = \alpha + (\beta_1 + \beta_2) X_1 + \beta_3 X_3 + u$

ومن ثم فإنه بإسقاط أحد المتغيرين المتساويين يمكن أن نحصل على مجموع معامليهما ، ولكننا لا يمكن أن نحصل على قيمة منفصلة لكل معامل منهما . أي أنه بالرغم من أن مجموع (ب ١ + ب ٢) يكون متعرفاً عليه في حالة الامتداد الخطي التام ، فإن القيمة المفردة لكل معلمة يكون غير متعرف عليها ، وهذا في حد ذاته يشير إلى العلاقة بين مشكلة التعرف ومشكلة الامتداد الخطي المتعدد .

ثانياً : الامتداد الخطى غير التام :

إذا كان الامتداد الخطي المتعدد غير تام ، أي أن العلاقة بين المتغيرين التفسيريين س ١ ، س ٢ تأخذ الصيغة س ٢ = م س ١ + و حيث تشير " و " للحد العشوائي لهذه العلاقة، فإن الآثار المترتبة على ذلك تتمثل في :

(١) تصبح المعلمات المقدرة غير دقيقة وإن كان من الممكن في هذه الحالة تقدير قيم منفصلة لكل منها .

فبالتعويض عن قيمة س ٢ = م س ١ + و بمعادلة بَ ١ السابقة نحصل على :

$$\hat{ب}_1 = \frac{(\sum ص س_1)(\sum س_2^2 + \sum و^2) - (\sum ص س_2 + \sum ص و)(\sum س_1 س_2)}{\sum س_1^2 (\sum س_2^2 + \sum و^2) - (\sum س_1 س_2)^2} \quad ....(11-11)$$

وذلك بافتراض أن $\sum$ س ، و = صفر ، أي أن العلاقة بين المتغير التفسيري $س_1$ والمتغير العشوائي " و " منعدمة . وبمقارنة المعادلة (11-11) بمعادلة $ب_1$ في حالة عدم وجود امتداد خطي متعدد نلاحظ أن هناك فارقاً بين القيمتين .

(٢) كبر الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة كبراً محدداً .

فيلاحظ في هذه المعادلة أن :

$$ع^2_{\hat{ب}_1} = \frac{ع^2_د}{\sum س_1^2 (1 - ر_{21}^2)} \quad ....(11-12)$$

$$S^2_{\hat{b}1} = \frac{S^2_{ei}}{\Sigma x_1^2 (1 - R^2_{12})}$$

$$ع^2_{\hat{ب}_2} = \frac{ع^2_د}{\sum س_2^2 (1 - ر_{21}^2)} \quad ....(11-13)$$

$$S^2_{\hat{b}2} = \frac{S^2_{ei}}{\Sigma x_2^2 (1 - R^2_{12})}$$

حيث $ر_{21}$ = معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_1$ ، $س_2$.

ويلاحظ أنه مع زيادة ر ٢١ تزداد تباينات المعلمات المقدرة $ع^2{\hat{ب}_1}$ ، $ع^2{\hat{ب}_2}$.

ويمكن توضيح ذلك من الجدول (11-1) . ويترتب على كبر الأخطاء المعيارية أن تقل معنوية المعلمات المقدرة وتزداد فترات الثقة المقدرة لأي معلمة من معلمات المجتمع ، وهذا من شأنه أن يقلل من دقة هذه التقديرات . فعلى سبيل المثال إذا كان $ر_{21}$ = صفر فإن فترة الثقة للمعلمة $ب_1$ عند مستوى معنوية ٥ ٪ تكون :

$$\text{ح}\left[\hat{\text{ب}}_{1} - \text{١,٩٦}\sqrt{\text{ق}} < \text{ب}_{1} < \text{ب}_{1} + \text{١,٩٦}\sqrt{\text{ق}}\right] = \text{٠,٩٥}$$

أما إذا كان ر_{21} = ٠,٩ تصبح فترة الثقة :

$$\text{ح}\left[\hat{\text{ب}}_{1} - \text{١,٩٦}\sqrt{\text{٥,٢٦ ق}} < \text{ب}_{1} < \hat{\text{ب}}_{1} + \text{١,٩٦}\sqrt{\text{٥,٢٦ ق}}\right] = \text{٠,٩٥}$$

$$\text{حيث ق} = \frac{\text{ع}^{2}_{\text{د}}}{\sum \text{س}^{2}_{1}}$$

أي أن فترة الثقة في هذه الحالة تصبح أكبر من سابقتها بمعامل أكبر من الضعف يساوى $\sqrt{\text{٥,٢٦}}$ = ٢,٢٩ .

جدول (١١-١)

سلوك الخطأ المعياري مع تغير الامتداد الخطي

قيمة ر_{21}	$\text{ع}^{2}_{\hat{\text{ب}}_{1}}$
صفر	$(\text{ع}^{2}_{\text{د}} / \sum \text{س}^{2}_{1}) = \text{ق}$
٠,٥٠	١,٣٣ ق
٠,٧٠	١,٩٦ ق
٠,٨٠	٢,٧٨ ق
٠,٩٠	٥,٢٦ ق
٠,٩٥	١٠,٢٦ ق
١,٠٠	∞

(٣) طالما أن كبر الخطأ المعياري يزيد من فرصة قبول فرض العدم فإنه يزيد من احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني والذي يتمثل في قبول فرض هو في حقيقة الأمر خطأ .

(٤) قد يكون هناك بعض المتغيرات ذات الأهمية الكبيرة في تفسير الظاهرة محل البحث ، أي أن معامل التحديد لدالة الانحدار المقدرة باستخدام بيانات عنها يكون مرتفعاً ، إلا أن وجود ارتباط بينها قد يؤدى لتضخم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة مما قد يدفع الباحث لحذف بعض هذه المتغيرات مؤدياً بذلك إلى انخفاض

معامل التحديد وإضعاف المقدرة التفسيرية للنموذج ، بالإضافة إلى سوء تعيين النموذج وما يترتب عليه من خطأ في التقدير يسمى بخطأ الحذف ، أو خطأ المعادلة .

(٥) يؤدى وجود الامتداد الخطي المتعدد إلى كبر معامل التحديد مع عدم معنوية المعلمات المقدرة .

(٦) تصبح مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية حساسة للتغيرات الطفيفة في البيانات .

المبحث الثاني

اختبارات الامتداد الخطي المتعدد

يوجد هناك عديد من الاختبارات التي تستخدم في اكتشاف مشكلة الامتداد الخطي المتعدد ، وسوف نشير إلى بعضها فيما يلي :

(١١-٢-١) اختبار كلاين Klein Test

يذكر كلاين أن وجود الامتداد الخطي المتعدد يمثل مشكلة خطيرة فقط إذا تحقق الشرط التالي:

$ر^2_{س_1 س_2} \leq ر^2_{ص.س_1 س_2}$	.... (١١-١٤)
	$R^2_{X1X2} \geq R^2_{Y.X1X2}$

حيث $ر_{س_1 س_2}$ يمثل معامل الارتباط بين المتغيرين التفسيريين $س_1$ ، $س_2$ ، $ر^2_{ص س_1 س_2}$ يشير إلى معامل التحديد لمعادلة انحدار يمثل ص فيها متغير تابع ، وكلٍ من $س_1$ ، $س_2$ متغيرين مستقلين . أي أنه وفقاً لهذا الاختبار إذا كان لدينا عدد من المتغيرات التفسيرية = م فإن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد تكون خطيرة إذا كان مربع معامل الارتباط البسيط بين أي متغيرين مستقلين أكبر من معامل التحديد الكلى لمعادلة الانحدار.

فإذا كانت المعادلة المقدرة هي :

$$ص = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ب_3 س_3 + \ldots\ldots + ب_م س_م$$

$$Y = \alpha + \beta_1 X2 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_3 + \ldots\ldots + \beta_m X_m$$

فإن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد تكون خطيرة إذا كان :

الارتباط الداخلي > الارتباط الكلي ، أي إذا كان :

$$ر^2_{س_1 س_2} > ر^2_{ص.س_1 س_2 \ldots\ldots س_م}$$

$$R^2_{X1X2} > R^2_{Y\ X1X2 \ldots Xm}$$

أو : ر ^٢^ س١ س٣ > ر ^٢^ ص . س١ س٢ .... سم

$$R^2_{X1X3} > R^2_{Y.X1X2 .... Xm}$$

ولكن يعاب على هذا الاختبار أن درجة الارتباط الداخلي بين المتغيرات المستقلة لا تعتبر معياراً دقيقاً لمدى التأثير الذي يحدثه وجود الامتداد الخطي على قيم المعلمات المقدرة وقيم الأخطاء المعيارية . فقد تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات المستقلة منخفضة بالرغم من وجود مشكلة امتداد خطي خطيرة . ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ المثال التالي:

افترض أن نموذج الانحدار يتكون من ثلاث متغيرات مستقلة ومتغير تابع على النحو التالي:

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ب ٣ س ٣ + ع

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

وافترض أن هناك حالة امتداد خطي تام حيث :

س ٣ = م ١ س ١ + م ٢ س ٢ $\quad X_3 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ ..... (١١-١٥)

∴ ر ^٢^ س٣ . س١ س٢ = ١ طالما أن الحد العشوائي غير موجود بالعلاقة (١١-١٥) .

وبالرغم من كون الامتداد الخطي تام في هذه الحالة إلا أننّا نجد أن معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرات المستقلة منخفضة .

فمن الممكن إثبات أن :

ر ^٢^ ٣.١٢ = (ر ^٢^ ٣١ + ر ^٢^ ٣٢ − ٢ ر ٣١ ر ٣٢ ر ١٢) / (١ − ر ^٢^ ١٢) .... (١١-١٦)

$$R^2_{3.12} = \frac{R^2_{31} + R^2_{32} - 2 R_{31} R_{32} R_{12}}{1 - R^2_{12}}$$

وبافتراض أن ر ^٢^ ٣.١٢ = ١ فإن قيم معاملات الارتباط البسيط التالية :

ر ٣٢ = ٠,٥ ، ر ١٣ = ٠,٥ ، ر ١٢ = ٠,٥ إذا عوضنا بها في المعادلة (١١-١٦) تعطى لنا القيمة ر ^٢^ ٣.١٢ = ١.

ويتضح من هذا أن معاملات الارتباط الداخلي المنخفضة قد تنطوي على مشكلة امتداد خطي خطيرة .

(١١-٢-٢) اختبار الارتباط الجزئي Partial correlation

وفقاً لهذا المعيار إذا وجد أن معامل التحديد ر^٢ ص . س١ س٢ .... س م ($R^2_{Y.X_1X_2 \ldots X_m}$) كبيراً نسبياً ، في حين أن مربعات معاملات الارتباط الجزئية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة منخفضة نسبياً ، أي أن :

ر^٢ ص س١ س٢ .... س م ، ر^٢ ص س٢ س١ .... س م

$R^2_{Y X_1 X_2 \ldots X_m}$ $R^2_{Y X_2 X \ldots X_m}$

منخفضة نسبياً ، فإن هذا يعني أن هناك تداخلاً بين المتغيرات المستقلة يجعل أثرها مجتمعة على المتغير التابع كبيراً ، في حين أن آثارها منفصلة على المتغير التابع ضعيفة . ومن ثم توجد مشكلة امتداد خطي متعدد .

(١١-٢-٣) اختبار فارار-جلوبر Farrer- Glauber Test

يتكون هذا الاختبار من ثلاثة عناصر أساسية :

(١) اختبار " كا ^٢ " لتحديد مدى ودرجة وجود مشكلة الامتداد الخطي المتعدد "chi-square" .

(٢) اختبار " ف " " F " لتحديد المتغيرات التفسيرية المرتبطة خطياً .

(٣) اختبار " ت " " T " لتحديد نمط الامتداد الخطي المتعدد .

(١) اختبار " كا^٢ " χ^2 :

يستخدم هذا الاختبار لتحديد ما إذا كان هناك مشكلة امتداد خطي متعدد أم لا ، وإذا كان هناك مشكلة فما هي درجة خطورة هذه المشكلة ؟ ولإجراء هذا الاختبار يتعين تتبع الخطوات التالية :

(أ) نقوم بالحصول على المعادلات الطبيعية للنموذج محل التقدير في صورة انحرافات، فإذا كان النموذج يأخذ الصيغة التالية :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ع .... (١١-١٧)

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

نحصل على معادلة الانحدار في صورة انحرافات كما يلي :

ص = ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + د .... (١١-١٨)

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

ثم نقوم بالحصول على المعادلات الطبيعية لمعادلة الانحدار(١١-١٧) باستخدام الصيغة (١١-١٨) على النحو التالي:

$$\sum \text{ص س}_1 = \text{ب}_1 \sum \text{س}_1^2 + \text{ب}_2 \sum \text{س}_1 \text{س}_2$$

$$\sum \text{ص س}_2 = \text{ب}_1 \sum \text{س}_1 \text{س}_2 + \text{ب}_2 \sum \text{س}_2^2 \quad ....(١١-١٩)$$

(ب) نقوم بتحديد المحدد الأساسي للقيم المعلومة فنحصل على :

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} \sum \text{س}_1^2 & \sum \text{س}_1 \text{س}_2 \\ \sum \text{س}_1 \text{س}_2 & \sum \text{س}_2^2 \end{vmatrix} \quad ....(١١-٢٠)$$

(حـ) ونقوم بعد ذلك بتحويل قيم عناصر المحدد الأساسي (١١-٢٠) إلى قيم معيارية وذلك بقسمة كل عنصر من عناصره على الجزر التربيعي لمجموع مربعات حدوده. وتكافئ القيمة المقسوم عليها القيمة $\sqrt{\text{ن ع}_{\text{س ر}}}$. ومن ثم فإن القيم المعيارية التي حصلنا عليها تتأثر بحجم العينة (ن) والانحراف المعياري للمتغير (س ر) . وبإتمام عملية التحويل نحصل على المحدد المعياري (ح ١) (H_1) التالي:

$$\text{ح}_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\sum \text{س}_1^2}{\sqrt{(\sum \text{س}_1^2)^2}} & \dfrac{\sum \text{س}_1 \text{س}_2}{\sqrt{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2}} \\ \dfrac{\sum \text{س}_1 \text{س}_2}{\sqrt{\sum \text{س}_1^2 \sum \text{س}_2^2}} & \dfrac{\sum \text{س}_2^2}{\sqrt{(\sum \text{س}_2^2)^2}} \end{vmatrix} \quad ....(١١-٢١)$$

ومن المحدد (١١-٢١) يتضح أن :

$$ح_{١} = \begin{vmatrix} ١ & ر_{٢١} \\ ر_{٢١} & ١ \end{vmatrix} \qquad \text{.......} \ (١١-٢٢)$$

حيث ر ٢١ = معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين التفسيريين س١ ، س٢ .

وفي حالة وجود ثلاثة متغيرات تفسيرية يأخذ المحدد الأساسي المعياري الصيغة التالية :

$$\begin{vmatrix} ١ & ر_{٢١} & ر_{٣١} \\ ر_{٢١} & ١ & ر_{٣٢} \\ ر_{٣١} & ر_{٣٢} & ١ \end{vmatrix} \qquad \text{....................} \ (١١-٢٣)$$

حيث : ر ٣١ = معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرين التفسيريين س١ ، س٣

ر ٣٢ = معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرين التفسيريين س٢ ، س٣

(د) عندما لا توجد مشكلة امتداد خطي متعدد يكون ر ٢١ = صفر في حالة الانحدار ذو المتغيرين التفسيريين . ومن ثم فإن المحدد الأساسي المعياري يصبح كما يلي :

$$ح_{١} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \qquad \text{....................} \ (١١-٢٤)$$

وعندما توجد مشكلة امتداد خطي متعدد تام يكون ر ٢١ = ١ ، ومن ثم فإن المحدد الأساسي المعياري يصبح كما يلي :

$$ح_{١} = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad \text{.................} \ (١١-٢٥)$$

وعندما توجد مشكلة امتداد خطي متعدد غير تام تتراوح قيمة المحدد المعياري بين الصفر والواحد ، أي أن :

صفر < ح ، < ١ .... (١١-٢٦)

وعموماً عندما ح ، = ١ ، تكون المتغيرات التفسيرية متعامدة ، وعندما ح ، ≠ ١ تكون هذه المتغيرات غير متعامدة .

(هـ) بالرغم من أن قيمة ح ، قد تكون أقل من الواحد وأكبر من الصفر مما يعني وجود مشكلة امتداد خطي متعدد ، إلا أن هذه المشكلة قد لا تكون خطيرة إذا كانت قيمة ح ، غير معنوية . وتكون مشكلة الامتداد الخطي المتعدد خطيرة فقط إذا كانت قيمة ح ، معنوية إحصائياً . ولاختبار المعنوية الإحصائية للمحدد المعياري ح ، يتعين استخدام معيار "كا ٢" .

ويلاحظ أن الفروض التي نختبرها باستخدام "كا ٢" تتمثل في :

فرض العدم (ف ٠) : المتغيرات التفسيرية متعامدة .

في مواجهة :

الفرض البديل (ف ١) : المتغيرات التفسيرية غير متعامدة .

(و) ولاختبار هذين الفرضين نقارن بين كا٢* المحسوبة ، كا ٢ الجدولية عند درجات حرية ١/٢ مـ (مـ - ١) ، حيث مـ (m) = عدد المتغيرات التفسيرية ، ومستوى معنوية ١ ٪ أو ٥ ٪ . ويمكن تحديد قيمة كا٢* كما يلي :

كا٢* = - [(ن - ١ - ١/٦ (٢ مـ + ٥)] لو هـ ح ، ..... (١١-٢٧)

$$\chi^2 = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2m+5)\right]\ln H_1$$

فإذا اتضح من المقارنة أن كا٢* > كا ٢ الجدولية نرفض فرض العدم القائل بعدم وجود مشكلة امتداد خطي متعدد ونقبل الفرض البديل القائل بوجود مشكلة امتداد خطي متعدد . وكلما زاد كبر كا٢* عن كا ٢ الجدولية كلما دل ذلك على خطورة المشكلة . أما إذا اتضح أن كا٢* < كا ٢ الجدولية فإننا نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل ونخلص إلى نتيجة مؤداها عدم وجود مشكلة امتداد خطي متعدد ذات معنوية .

(٢) اختبار " ف " " F test " :

لقد أفاد اختبار " كا ² " في تحديد ما إذا كان هناك مشكلة امتداد خطي متعدد أم لا ، ولكنه لم يحدد أي المتغيرات المستقلة تعتبر هي السبب في وجود المشكلة . ويساعدنا اختبار " ف " في تحديد ذلك . فإذا كان لدينا ثلاث متغيرات تفسيرية نقوم بحساب مربع معامل الارتباط المتعدد لكل متغير تفسيري وهو يماثل معامل التحديد في نموذج الانحدار الأصلي . ويتكون لدينا في هذه الحالة ثلاث معاملات هي :

ر²٣٢.١ = (مَ١ ∑ س١ س٢ + مَ٢ ∑ س١ س٣) ÷ ∑ س١² .... (١١-٢٨)

$$R^2_{1.23} = \frac{\hat{\beta}_1 \Sigma x_1 x_2 + \hat{\beta}_2 \Sigma x_1 x_3}{\Sigma x_1^2}$$

وذلك من المعادلة المقدرة التالية : س١ = مَ + مَ١ س٢ + مَ٢ س٣ + د١

$$X_1 = \hat{\beta} + \hat{\beta}_1 X_2 + \hat{\beta}_2 X_3 + e_{i1}$$

ر²٣١.٢ = (حَ١ ∑ س٣ س١ + حَ٢ ∑ س٣ س٢) ÷ ∑ س٣² ..... (١١-٢٩)

$$R^2_{2\,13} = \frac{\hat{c}_1 \Sigma x_3 x_1 + \hat{c}_2 \Sigma x_3 x_2}{\Sigma x_3^2}$$

وذلك من المعادلة المقدرة التالية :

س٣ = حَ + حَ١ س١ + حَ٢ س٢ + د٢

$$X_3 = \hat{C} + \hat{C}_1 X_1 + \hat{C}_2 X_2 + e_{i2}$$

ر²٣١.٢ = (قَ١ ∑ س٢ س١ + قَ٢ ∑ س٢ س٣) ÷ ∑ س٢² .... (١١-٣٠)

$$R^2_{2.13} = \frac{\hat{a}_1 \Sigma x_2 x_1 + \hat{a}_2 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2}$$

وذلك من المعادلة المقدرة التالية :

س ٢ = قˆ + قˆ ١ س ١ + قˆ ٢ س ٣ + د ١٣

$$X_2 = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_1 X_1 + \hat{\alpha}_2 X_3 + e_{13}$$

ولإجراء اختبار " ف " نتتبع عدد من الخطوات كما يلي :

(أ) نستخدم اختبار " ف " لاختبار الفروض التالية :

فرض العدم : ر٢ ١.٢٣ = صفر $(R^2_{1.23} = 0)$

ر٢ ٢.١٣ = صفر $(R^2_{2.13} = 0)$

ر٢ ٣.١٢ = صفر $(R^2_{3.12} = 0)$

في مواجهة

الفرض البديل : ر٢ ١.٢٣ ≠ صفر $(R^2_{1.23} \neq 0)$

ر٢ ٢.١٣ ≠ صفر $(R^2_{2.13} \neq 0)$

ر٢ ٣.١٢ ≠ صفر $(R^2_{3.12} \neq 0)$

(ب) ولإتمام هذا الاختبار نقوم بتحديد ف * المحسوبة ، ف الجدولية لكل معامل من المعاملات السابقة كل على حدة ، حيث :

ف * المحسوبة للمعامل ر٢ ١.٢٣ = [(ر٢ ١.٢٣) / (م − ١)] ÷ [(١ − ر٢ ١.٢٣) / (ن − م)]   (١١−٣١)

$$F^*_{R_{1.23}} = \frac{R^2_{1.23} \; (m-1)}{(1-R^2_{1.23}) \; (n-m)}$$

وهكذا بالنسبة للمعاملين الآخرين .

كما نحدد " ف " الجدولية من جداول " ف " عند مستوى معنوية ٥ ٪ أو ١ ٪ ودرجات حرية ن ١ = م − ١ للبسط ، ن ٢ = ن − م للمقام .

(حـ)ثم نقوم بمقارنة " ف *" المحسوبة مع " ف " الجدولية ، فإذا كانت ف * > ف الجدولية نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن المتغير س ١ مرتبط مع غيره من المتغيرات التفسيرية ، ويعتبر أحد عناصر المشكلة . أما إذا كانت

ف * < ف الجدولية نقبل فرض العدم القائل بأن المتغير س, ليس مرتبطاً مع غيره وليس أحد عناصر المشكلة ونرفض الفرض البديل .

(٣) اختبار " ت " " T test " :

لقد ساعدنا اختبار " ف " على تحديد أي المتغيرات التفسيرية يعتبر طرفاً في مشكلة الامتداد الخطي المتعدد ، ولكنه لم يحدد على وجه التفصيل أي متغير تفسيري مرتبط مع أي متغير آخر . ويساعدنا اختبار " ت " على تحديد نمط الامتداد الخطي المتعدد ، وعلى وجه التحديد يساعدنا على اختبار مدى معنوية الارتباط الجزئي بين كل متغير ين تفسيريين على حده .

فإذا كان لدينا ثلاث متغيرات مستقلة ، نقوم بقياس ثلاث معاملات ارتباط جزئية :

ر ٣.٢١ ، ر ١.٣٢ ، ر ٢.٣١ ، ثم نستخدم اختبار " ت " في اختبار :

فرض العدم : ر ٣.٢١ = صفر

ر ١.٣٢ = صفر

ر ٢.١٣ = صفر

في مواجهة

الفرض البديل : ر ٣.٢١ ≠ صفر

ر ١.٣٢ ≠ صفر

ر ٢.١٣ ≠صفر

ولإتمام هذا الاختبار نحدد ت * (المحسوبة) حيث :

$$\text{ت}^* = \frac{\text{ر}_{\text{٣.٢١}}\sqrt{\text{ن}-\text{ك}}}{\sqrt{١-(\text{ر}_{\text{٣.٢١}})^٢}}$$

$$t^* = \frac{r_{12.3}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-(r_{12.3})^2}}$$

وهكذا بالنسبة للمعاملات الأخرى . ثم نحدد " ت " الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجات حرية = ن ـ ك . فإذا كانت " ت *" المحسوبة > " ت " الجدولية

نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن الارتباط بين المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ مثلاً مسئولاً عن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد بالنموذج . أما إذا كانت ت * < ت الجدولية فإننا نقبل فرض العدم ومن ثم لا يكون الارتباط بين $س_1$ ، $س_2$ هو المسئول عن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد .

مثال (١١-١)

اختبار فارار - جلوبر للامتداد الخطي المتعدد

افترض أن باحثاً يريد أن يقدر دالة الاستهلاك للمنتجات الزراعية في المجتمع، فوجد أن الصيغة الملائمة لتقدير هذه الدالة هي :

$$ص = \hat{أ} + \hat{ب}_1 س_1 + \hat{ب}_2 س_2 + د$$

حيث : ص = الإنفاق على المنتجات الزراعية ، $س_1$ = الدخل الزراعي

$س_2$ = الدخل غير الزراعي .

وقام بجمع بيانات عن فترة طولها ١٠ سنوات فكانت كما يلي بالجدول (١١-٢):

جدول (١١-٢)

بيانات الاستهلاك بالقطاع الريفي (بليون جنيه)

ص	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٨	٩	١٠	١٠
$س_1$	٤	٥	٨	٩	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	٢٤
$س_2$	١٠	٨	٦	٧	٥	٥	٤	٢	٢	١

والمطلوب هو تقدير دالة الاستهلاك واختبار مدى وجود مشكلة الامتداد الخطي المتعدد وسبب وجودها ونمط هذه المشكلة .

ولإتمام ذلك نقوم بإجراء الحسابات اللازمة كما هو موضح بالجدول (١١-٣).

ولعل أول خطوة هي أن نحسب المتوسطات كما يلي :

$$\bar{ص} = \sum ص \div ن = ٧٠ \div ١٠ = ٧$$

$$\bar{س}_{١} = \sum س_{١} \div ن = ١٣٠ \div ١٠ = ١٣$$

$$\bar{س}_{٢} = \sum س_{٢} \div ن = ٥٠ \div ١٠ = ٥$$

جدول (١١-٣)

حسابات اختبار فارار - جلوبر

ص	س١	س٢	ص = ص - $\bar{ص}$	س١ = س١ - $\bar{س}_{١}$	س٢ = س٢ - $\bar{س}_{٢}$	ص س١	ص س٢	س١ س٢	$س_{١}^{٢}$	$س_{٢}^{٢}$	$ص^{٢}$
٣	٤	١٠	-٤	-٩	٥	٣٦	-٢٠	-٤٥	٨١	٢٥	١٦
٤	٥	٨	-٣	-٨	٣	٢٤	-٩	-٢٤	٦٤	٩	٩
٥	٨	٦	-٢	-٥	١	١٠	-٢	-٥	٢٥	١	٤
٦	٩	٧	-١	-٤	٢	٤	-٢	-٨	١٦	٤	١
٧	١٢	٥	صفر	-١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
٨	١٤	٥	١	١	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر	١
٨	١٦	٤	١	٣	-١	٣	-١	-٣	٩	١	١
٩	١٨	٢	٢	٥	-٣	١٠	-٦	-١٥	٢٥	٩	٤
١٠	٢٠	٢	٣	٧	-٣	٢١	-٩	-٢١	٤٩	٩	٩
١٠	٢٤	١	٣	١١	-٤	٣٣	-١٢	-٤٤	١٢١	١٦	٩
$\sum$ص = ٧٠	$\sum$س١ = ١٣٠	$\sum$س٢ = ٥٠				$\sum$ص س١ = ١٤٢	$\sum$ص س٢ = -٦١	$\sum$س١ س٢ = -١٦٥	$\sum س_{١}^{٢}$ = ٣٩٢	$\sum س_{٢}^{٢}$ = ٧٤	$\sum ص^{٢}$ = ٥٤

ثم نقوم بالتعويض من الجدول (١١-٣) في المعادلات الطبيعية التالية :

$$\hat{ب}_{١} \sum س_{١}^{٢} + \hat{ب}_{٢} \sum س_{٢} س_{١} = \sum س_{١} ص$$

$$\hat{ب}_{١} \sum س_{١} س_{٢} + \hat{ب}_{٢} \sum س_{٢}^{٢} = \sum س_{٢} ص$$

فنحصل على :

$$٣٩٢ \hat{ب}_{١} - ١٦٥ \hat{ب}_{٢} = ١٤٢$$

$$-١٦٥ \hat{ب}_{١} + ٧٤ \hat{ب}_{٢} = -٦١ \qquad (١١-٣٢)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣٩٢ & -١٦٥ \\ -١٦٥ & ٧٤ \end{vmatrix} = ٢٩٠٠٨ - ٢٧٢٢٥ = ١٧٨٣$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{١} = \begin{vmatrix} ١٤٢ & -١٦٥ \\ -٦١ & ٧٤ \end{vmatrix} = ١٠٥٠٨ - ١٠٠٦٥ = ٤٤٣$$

$$\Delta \hat{\text{ب}}_{٢} = \begin{vmatrix} ٣٩٢ & ١٤٢ \\ -١٦٥ & -٦١ \end{vmatrix} = -٢٣٩١٢ + ٢٣٤٣٠ = -٤٨٢$$

$$\therefore \hat{\text{ب}}_{١} = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_{١}}{\Delta} = \frac{٤٤٣}{١٧٨٣} = ٠,٢٥$$

$$\hat{\text{ب}}_{٢} = \frac{\Delta \hat{\text{ب}}_{٢}}{\Delta} = \frac{-٤٨٢}{١٧٨٣} = -٠,٢٧$$

$$\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}_{١}\,\bar{\text{س}}_{١} - \hat{\text{ب}}_{٢}\,\bar{\text{س}}_{٢}$$

$$\hat{\text{أ}} = ٧ - ٠,٢٥\,(١٣) + ٠,٢٧\,(٥) = ٥,١$$

$$\therefore \text{ص} = ٥,١ + ٠,٢٥\,\text{س}_{١} - ٠,٢٧\,\text{س}_{٢} \quad \text{..............(١١-٣٣)}$$

وتمثل المعادلة (١١-٣٣) دالة استهلاك المنتجات الزراعية . وهي توضح أنه مع زيادة الدخل غير الزراعي يقل الإنفاق على المنتجات الزراعية ، ومع زيادة الدخل الزراعي يزداد الإنفاق على المنتجات الزراعية . ولعل هذا يعنى أن نمط استهلاك سكان الحضر مختلف عن نمط استهلاك سكان الريف . فسكان الحضر كلما ازداد دخلهم

المتولد أساساً من مصادر غير زراعية كلما ازداد استهلاكهم للمنتجات الصناعية وقل إنفاقهم على المنتجات الزراعية باعتبارها سلع دنيا . أما عن سكان الريف فكلما زاد دخلهم كلما زاد استهلاكهم من المنتجات الزراعية باعتبارها سلع عادية من وجهة نظرهم ، خاصةً وأن مستويات دخولهم منخفضة على عكس سكان الحضر ذوي الدخول المرتفعة نسبياً .

ولإجراء الاختبارات المختلفة للكشف عن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد ونمطها نتبع الخطوات التالية :

(١) اختبار كا ٢ :

نقوم بتحديد المحدد الأساسي " ح " من النسق (١١–٣٢) :

$$ح = \begin{vmatrix} -١٦٥ & ٣٩٢ \\ ٧٤ & -١٦٥ \end{vmatrix}$$

ثم نحصل على المحدد المعياري (ح ١) بالتعويض في (١١–٢١) :

$$ح_١ = \begin{vmatrix} \frac{-١٦٥}{\sqrt{(٧٤)(٣٩٢)}} & ١ \\ ١ & \frac{-١٦٥}{\sqrt{(٧٤)(٣٩٢)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٠,٩٧ & ١ \\ ١ & -٠,٩٧ \end{vmatrix}$$

$$ح_١ = ١ - ٠,٩٤ = ٠,٠٦$$

وحيث أن صفر < ح ١ < ١ إذن يوجد هناك امتداد خطي متعدد . ولاختبار مدى خطورته نستخدم اختبار " كا ٢ " حيث :

$$كا^{*٢} = - [١٠ - ١ - \frac{١}{٦} ((٢ \times ٢) + ٥)] \text{ لوهـ } ٠,٠٦$$

$$كا^{*٢} = - [١٠ - ١ - ١,٥] (-٢,٨)$$

$$كا^{*٢} = - [٧,٥ (-٢,٨)] = ٢١$$

كا ^٢^ الجدولية عند مستوى معنوية ١ ٪ ودرجات حرية = $\frac{١}{٢}$ م (م − ١)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ (٢ − ١) = ١ هي ٦,٦٣

وحيث أن $كا^{*٢} > كا^{٢}$ فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البد يل ، ومن ثم توجد مشكلة امتداد خطي متعدد ذات أثر خطير .

(٢) اختبار " ف "

نقوم بحساب $ر_{٢١}^{٢} = (٠,٩٧)^{٢} = ٠,٩٤$

$$ثم\ نحدد\ ف^{*} = \frac{٠,٩٤ \div (٢-١)}{(٠,٠٦ \div ٨)} = \frac{٠,٩٤}{٠,٠٠٨} = ١١٧,٥$$

ونحدد ف الجدولية عند مستوى معنوية ١ ٪ ودرجات حرية $ن_{ق} = ١$ ، $ن_{د} = ٨$ فنجدها تساوي ١١,٣ .

إذن $ف^{*} > ف$ ، وبالتالي فإن المتغيرين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ مشتركان في تسبيب المشكلة .

(٣)اختبار " ت "

نظراً لوجود متغيرين تفسيريين فقط فإننا نختبر معنوية معامل الارتباط البسيط بينهما $ر_{٢١} = -٠,٩٧$ ، وذلك باستخدام اختبار " ت " حيث :

$$ت^{*} = \frac{-٠,٩٧ \sqrt{٧}}{\sqrt{١ - ٠,٩٤}} = \frac{-٠,٩٧ (٢,٦)}{٠,٢٤} = -١٠,٥$$

وبالبحث عن ت الجدولية عند مستوى معنويه ١ ٪ ودرجات حرية ن − ك = ٧ نجدها تساوى ٢,٩٩٨ . وحيث $ت^{*} >$ ت الجدولية إذن هناك ارتباط قوي بين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ومعنوي ، وهو ما يؤكد وجود مشكلة امتداد خطي متعدد بسبب هذا الارتباط .

(١١−٢−٤) معامل التحديد واختبارات المعنوية

يلاحظ أنه إذا كان معامل التحديد لمعادلة انحدار ما مرتفعاً جداً ، ومعظم أو كل المعلمات المقدرة غير معنوية إحصائياً ، فإن هذا يعتبر مؤشراً عن وجود مشكلة امتداد خطي متعدد .

(١١-٢-٥) علاج مشكلة الامتداد الخطي المتعدد

يعتمد العلاج الملائم لمشكلة الامتداد الخطي المتعدد على طبيعة المشكلة نفسها. ونفرق في هذا الصدد بين حالات عديدة :

(أ) إذا كانت المتغيرات التفسيرية المرتبطة متغيرات قليلة الأهمية في التأثير على الظاهرة محل البحث فقد يكون الحل هو إسقاط هذه المتغيرات . ولكن يلاحظ أن هذا الحل قد يؤدى لوجود مشكلة ارتباط ذاتي من ناحية أخرى .

(ب) حيث أن مشكلة الامتداد الخطي المتعدد هي مشكلة عينة فقد يكون الحل هو تكبير حجم العينة .

(حـ) قد يكون الحل هو استخدام معلومات قبلية في حالة توافرها . فإذا افترضنا أن دالة الاستهلاك المراد تقديرها تأخذ الصيغة التالية :

ص = أ + ب١ س١ + ب٢ س٢ + ع $\qquad Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$

حيث : ص = الاستهلاك ، س١ = الدخل ، س٢ = الثروة وتوافرت لدينا معلومات قبلية مفادها أن ب٢ = ٠,١ ب١ ، أي أن تأثير التغير في الثروة على الاستهلاك يمثل ١٠ ٪ من تأثير التغير في الدخل على الاستهلاك ، فبالتعويض بهذه المعلومات في دالة الاستهلاك السابقة نحصل على :

ص = أ + ب١ س١ + ٠,١ ب١ س٢ + ع

أو ص = أ + ب١ (س١ + ٠,١ س٢) + ع

أي : ص = أ + ب١ س + ع $\qquad (Y = \alpha + \beta_1 X + u)$ ...... (١١-٣٤)

حيث : س = س١ + ٠,١ س٢ $\qquad (X = X_1 + 0.1 X_2)$

وبتقدير العلاقة (١١-٣٤) يمكن تحديد قيمة ب٢ ، ونكون في هذه الحالة قد قضينا على مشكلة الامتداد الخطي المتعدد نظراً لوجود متغير تفسيري واحد هو (س) في المعادلة المقدرة (١١-٣٤) .

(د) ومن الأساليب المقترحة الأخرى لعلاج مشكلة الامتداد الخطي المتعدد تحويل المتغيرات . فمن أسباب الامتداد الخطي المتعدد أن المتغيرات الاقتصادية تميل للتغير في نفس الاتجاه عبر الزمن . ولتلاشي هذا الأثر نقوم باستخدام الفروق الأولى لتقدير العلاقة بدلاً من استخدام قيم المتغيرات نفسها . وبالطبع إذا كانت قيم المتغيرات مرتبطة فليس هناك ما يدعو لأن تكون فروقها مرتبطة . فإذا افترضنا أن المعادلة التالية تعكس العلاقة المراد تقديرها في الفترة الحالية :

$$ص_{ز} = أ + ب_{1} س_{1ز} + ب_{2} س_{2ز} + ع_{ز} \quad ....(11-35)$$

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

وأن المعادلة (١١–٣٦) تعكس نفس العلاقة في الفترة السابقة ز – ١ :

$$ص_{ز-1} = أ + ب_{1} س_{1ز-1} + ب_{2} س_{2ز-1} + ع_{ز-1} \quad ....(11-36)$$

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_1 X_{1t-1} + \beta_2 X_{2t-1} + u_{t-1}$$

فبطرح (١١–٣٦) من (١١–٣٥) نحصل على :

$$ص_{ز} - ص_{ز-1} = ب_{1}(س_{1ز} - س_{1ز-1}) + ب_{2}(س_{2ز} - س_{2ز-1}) + (ع_{ز} - ع_{ز-1})$$

أو :

$$ص^{*}_{ز} = ب_{1} س^{*}_{1ز} + ب_{2} س^{*}_{2ز} + ع^{*}_{ز} \quad ....(11-37)$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_{1t} + \beta_2 \Delta X_{2t} + \Delta u_t$$

حيث :

$$ص^{*}_{ز} = ص_{ز} - ص_{ز-1} \text{ ، } س^{*}_{1ز} = س_{1ز} - س_{1ز-1} \text{ ، }$$

$$س^{*}_{2ز} = س_{2ز} - س_{2ز-1} \text{ ، } ع^{*}_{ز} = ع_{ز} - ع_{ز-1}$$

وبتقدير العلاقة (١١–٣٧) قد نكون تخلصنا من مشكلة الامتداد الخطي المتعدد . ولكن ليس من المؤكد أن تؤدي هذه الطريقة بالضرورة للتخلص من مشكلة الامتداد الخطي المتعدد .

(هـ) قد يمكن تلاشي مشكلة الامتداد الخطي المتعدد عن طريق خلط بيانات قطاعية وبيانات سلسلة زمنية لتقدير العلاقة محل البحث . فإذا افترضنا أننا نريد تقدير دالة الطلب التالية :

لو ص = لو أ + ب ١ لو س ١ + ب ٢ لو س ٢ + ع .... (١١-٣٨) $\ln Y = \ln \alpha + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + u$

حيث : ص = الكمية المباعة ، س ١ = متوسط السعر ، س ٢ = الدخل ، وكان هناك ارتباط جوهري بين س ١ ، س ٢ فمن الممكن التخلص من هذه المشكلة عن طريق تقدير العلاقة بين الدخل و الكمية المباعة من بيانات قطاعية حيث يكون السعر ثابتاً فنحصل على ب ٢ . ثم نستخدم " ب ٢ " في الحصول على العلاقة التالية :

ص * = لو أ + ب ١ لو س ١ + ع $Y^* = \ln \alpha + \beta_1 \ln X_1 + u$ ...(١١-٣٩)

حيث : ص * = لو ص − ب ٢ لو س ٢ $Y^* = \ln Y - \beta_2 \ln X_2$

وبتقدير هذه المعادلة (١١-٣٩) من بيانات سلسلة زمنية نكون قد تلاشينا مشكلة الامتداد الخطي المتعدد الممثلة في الارتباط بين س ١ ، س ٢ .

الفصل الثاني عشر

مشكلة عدم ثبات التباين

Heteroscedasticity

تقوم طريقة المربعات الصغرى العادية على أساس افتراض ثبات تباين الحد العشوائي ، أو تساوي انحرافات القيم المشاهدة للمتغير التابع عن الخط المقدر عند كل قيم المتغير التفسيري . ويعرف هذا الافتراض بالانتشار المتساوي (Equal Scatter) أو Homoscedasticity . وإذا توفر هذا الافتراض فإن (ع٢ر) (δ^2_u) الذي يشير إلى تباين قيم البواقي حول الخط المقدر ، أو تشتت القيم المشاهدة للمتغير التابع حول الخط المقدر يكون ثابتاً . أي يوجد تباين واحد لجميع القيم المشاهدة حول خط الانحدار المقدر . وفي حالة اختلال هذا الافتراض وتغير تباين القيم المشاهدة و بالتالي تباين الحد العشوائي مع تغير قيم المتغير التفسيري توجد مشكلة تسمى بمشكلة " عدم ثبات التباين " "Heteroscedasticity" .

وسوف نتعرض لهذه المشكلة في مبحثين بهذا الفصل :

المبحث الأول : التعريف بمشكلة عدم ثبات التباين .

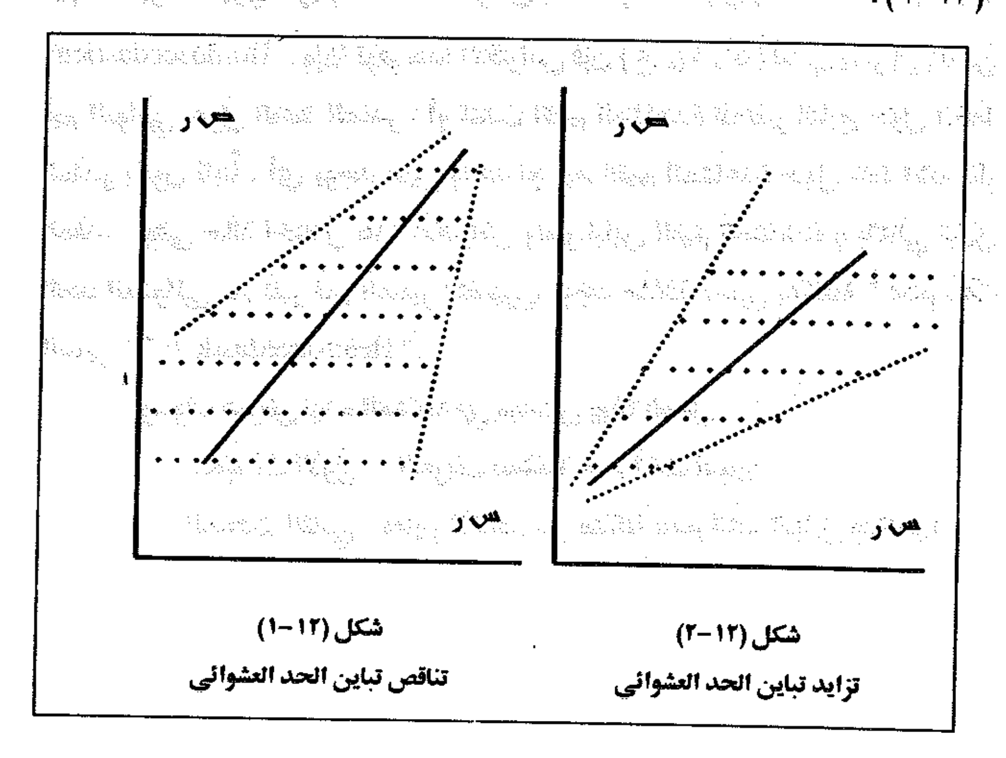
المبحث الثاني : معايير الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين وعلاجها .

المبحث الأول

التعريف بمشكلة عدم ثبات التباين

(١٢-١-١) مفهوم مشكلة عدم ثبات التباين :

تتمثل مشكلة عدم ثبات التباين في تغير تباين الحد العشوائي مع تغير قيم المتغير التفسيري . وفى مثل هذه الحالة يأخذ شكل الانتشار أحد الأوضاع (١٢-١) ، (١٢-٢) .



شكل (١٢-١)
تناقص تباين الحد العشوائى

شكل (١٢-٢)
تزايد تباين الحد العشوائى

فيلاحظ من الشكلين (١٢-١) ، (١٢-٢) أن تغير المتغير التفسيري س ر يؤدى لتغير المتغير التابع ص ر ويؤدى أيضاً لتغير تباين الحد العشوائي ، حيث يتناقص تباين الحد العشوائي مع تزايد قيمة المتغير التفسيري بالشكل (١٢-١) بصورة منتظمة . ومن ثم يقال أن العلاقة بين المتغير التفسيري س ر وتباين الحد العشوائي $ع^٢_د$ خطية عكسية.

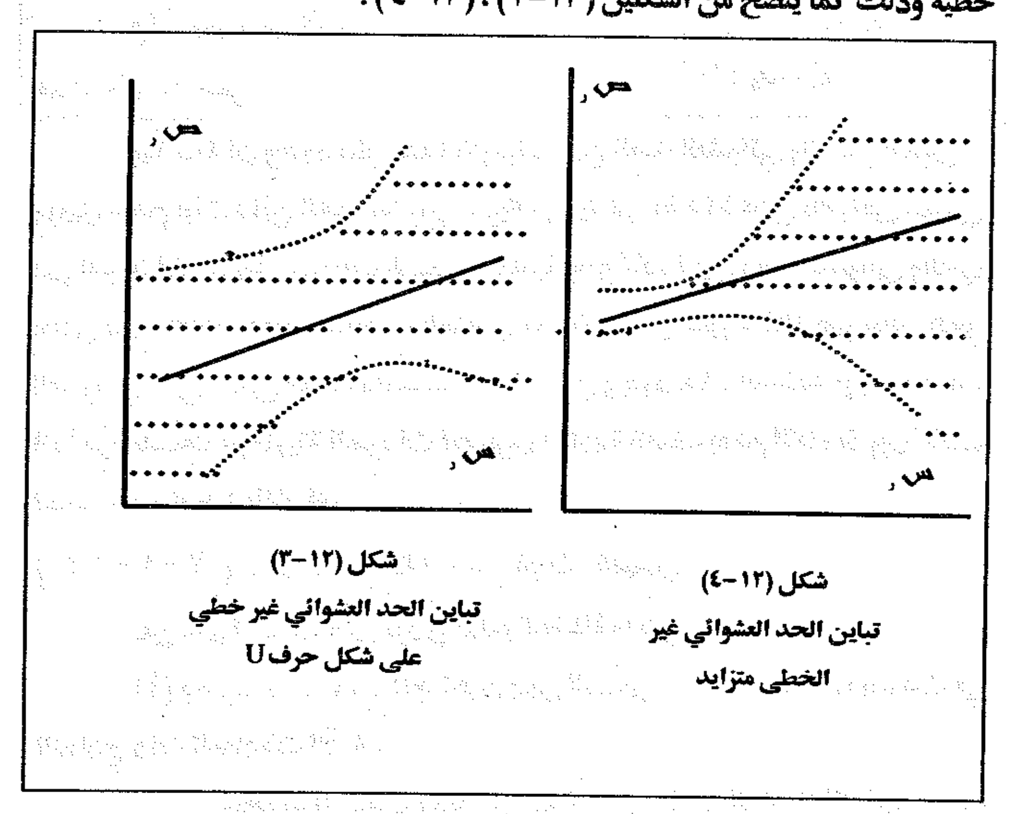
أما في حالة الشكل (١٢-٢) فإن تباين الحد العشوائي يزداد مع زيادة قيمة المتغير التفسيري س ر بصورة منتظمة أيضاً . ولذا يقال أن العلاقة بين س ر ، ع^٢ د خطية طردية . وعموماً يمكن التعبير عن العلاقة بين تباين الحد العشوائي والمتغير التفسيري في هذه الحالة بالصيغة التالية :

ع د^٢ = حـ . + حـ ١ س ر + و .... (١٢-١)

$$\delta_{ei}^{2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + W_i$$

حيث حـ ١ < صفر في حالة الشكل (١٢-١) ، حـ ١ > صفر في حالة الشكل (١٢-٢) .

وقد تكون العلاقة بين المتغير التفسيري س ر وتباين الحد العشوائي ع^٢ د غير خطية وذلك كما يتضح من الشكلين (١٢-٣) ، (١٢-٤) .



شكل (١٢-٣)
تباين الحد العشوائي غير خطي على شكل حرف U

شكل (١٢-٤)
تباين الحد العشوائي غير الخطى متزايد

فبالشكل (١٢-٣) يلاحظ أن العلاقة بين المتغير التفسيري سر وتباين الحد العشوائي علاقة غير خطية ، حيث مع تزايد المتغير التفسيري سر يتناقص التباين أولاً ثم يصل لحده الأدنى ثم يتزايد بعد ذلك . ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالصيغة التالية :

ع^٢ر = حـ. + حـ١ سر + حـ٢ س^٢ر + و .... (١٢-٢)

$$\delta_{ei}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \alpha_2 X_i^2 + W_i$$

وبالشكل (١٢-٤) نجد أن العلاقة غير خطية أيضاً بين المتغير التفسيري والحد العشوائي ، حيث يزداد تباين الحد العشوائي بمعدل متزايد مع زيادة المتغير التفسيري . ويمكن تمثيل هذه العلاقة باستخدام الصيغة التالية :

ع^٢ر = حـ. س^حـ١ هـ^و .... (١٢-٣)

$$\delta_{ei}^2 = a_0 X^{a_1} e^{w}$$

حيث جـ١ > صفر

ويلاحظ أن وجود مثل هذا الارتباط بين الحد العشوائي والمتغير التفسيري يؤدى لعدم ثبات تباين الحد العشوائي ، وبالتالي يترتب عليه الإخلال بافتراض أساسي من افتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية وهو ثبات تباين الحد العشوائي والذي يطلق عليه Homoscedasticity . وباختلال هذا الافتراض تظهر مشكلة تغير تباين الحد العشوائي التي تسمى Heteroscedasticity . ومع وجود هذه المشكلة فإن المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية تتصف بعدم الكفاءة وإن كانت تتصف بعدم التحيز والاتساق .

(١٢-١-٢) أسباب مشكلة عدم ثبات التباين :

من أهم الأسباب التي تؤدي لهذه المشكلة ما يلي :

(أ) وجود علاقة ذات اتجاهين بين المتغيرات الداخلية كما يحدث في النماذج ذات المعادلات الآنية .

(ب) استخدام البيانات القطاعية بدلاً من بيانات السلسلة الزمنية . فعند استخدام بيانات قطاعية عن ميزانية عينه من الأسر ، يلاحظ أنه عند الدخول المنخفضة

يكون تباين الإنفاق على الضروريات منخفضاً وذلك نظراً لأن الحد الأقصى للإنفاق لدى الطبقة الفقيرة يكون منخفضاً نسبياً نتيجة لانخفاض الدخل ، كما أن هناك حد أدنى لا يمكن للإنفاق أن ينخفض دونه وهو حد الكفاف . وعادةً ما يكون الحد الأدنى قريباً من الحد الأقصى . أما عند مستويات الدخول المرتفعة عادةً ما يكون الإنفاق على السلع الكمالية أكثر تشتتاً نظراً لعدم وجود حدود بنفس الطريقة لأقصى إنفاق أو أقل إنفاق .

ولذا نجد في هذه الحالة أن التشتت بين قيم الإنفاق يزداد مع زيادة الدخل بما يعني تزايد الحد العشوائي كما بالشكلين (١٢-١) ، (١٢-٤) .

(حـ) استخدام بيانات جزئية بدلاً من البيانات التجميعية . فعند استخدام بيانات تجميعية تختفي الاختلافات بين المفردات حيث يلغى بعضها البعض فلا يكون هناك مجال لتشتت القيم بدرجة كبيرة . أما في حالة البيانات الجزئية كتلك المتاحة عن الأفراد أو المنشآت الفردية ، فعادةً ما يكون التشتت كبير بين القيم للاختلافات الكبيرة بين سلوك المفردات .

(١٢-١-٣) آثار مشكلة عدم ثبات التباين :

يترتب على وجود مشكلة عدم ثبات التباين عدد من الآثار تتمثل في :

(أ) تبقى المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية ($\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$) ($\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$) متصفة بعدم التحيز والاتساق ، ولكنها تفقد صفة الكفاءة .

(ب) تصبح التباينات المقدرة وكذلك التغايرات Covariances الخاصة بالمعلمات المقدرة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ($\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$) متحيزة وغير متسقة . ولذا فإن اختبارات الفروض لا تصبح دقيقة أو ملائمة .

(حـ) بالرغم من أن التنبؤات القائمة على أساس المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة ، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة ، وهو ما يعني أنها تكون أقل مصداقية من تنبؤات أخرى تبنى على طرق تخلو من مشكلة عدم ثبات التباين .

المبحث الثاني

اختبارات الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين وطرق علاجها

(١٢-٢-١) معايير الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين :

توجد هناك معايير عديدة للكشف عن هذه المشكلة نتعرض لبعض منها فيما يلي:

(١) اختبار جولدفيلد-كوانت Goldfeld-Quandt Test :

لقد تم اقتراح هذا الاختبار من قبل كلٍ من Goldfeld ، Quandt عام ١٩٦٥ . وتقوم فكرة هذا الاختبار على أنه لو ظل تباين البواقي متساوياً عبر المشاهدات كلها ، فإن هذا التباين بالنسبة لجزء من العينة سوف يكون مساوياً لتباين جزء آخر من نفس العينة . ولذا تقسم العينة إلى ثلاثة أقسام ويستبعد القسم في المنتصف ، ثم يتم حساب تباين البواقي بالنسبة للجزء الأول والجزء الثالث ويتم اختبار مدى تساويهما باستخدام اختبار F . وتتمثل خطوات الاختبار فيما يلي :

١ – نقوم بتحديد متغير يعتقد أن تباين البواقي (ع^٢^ د) (δ^2_i) على ارتباط به . وقد يكون هذا المتغير أحد المتغيرات التفسيرية في النموذج، أو قد يكون متغيراً مشتقاً من أحد هذه المتغيرات التفسيرية كالتربيع أو اللوغاريتم الطبيعي . ودعنا نفترض أن هذا المتغير هو "س " (Z) .

٢ – نقوم بترتيب البيانات وفقاً لترتيب قيم " س " (Z) تصاعدياً (أي بيانات جميع المتغيرات التابعة والمستقلة) .

٣ – نقوم بتقسيم العدد (ن) (n) لمشاهدات العينة إلى ثلاثة أجزاء ، الجزء الأول حجمه (ن ١) (n_1)، والجزء الثالث (ن ٢) (n_2) والجزء الوسط يتراوح بين (ن ١ + ١) ($n_1 +1$) إلى (ن – ن ٢) ($n - n_2$) .فإذا افترضنا أن ن (n)= ٣٠ يمكن أن يكون الجزء

الأول (ن ١) (من ١ – ١٠) = ١٠ ، والجزء الأخير (ن ٢) (من ٢١ – ٣٠) = ١٠ والجزء الوسط الذي يتم استبعاده يتراوح بين (١١ – ٢٠) = ١٠ . وبالطبع فإن الجزء الذي يتقرر استبعاده من الوسط يكون تحكمياً ويتراوح عادة بين سدس إلى ثلث عدد المشاهدات الكلية . ولكن يتعين مراعاة أن يكون (ن ١) (n_1) ، (ن ٢) (n_2) أكبر من عدد المعلمات المقدرة في كل مرة حتى تكون درجات الحرية أكبر من الصفر .

٤ – نقوم بتقدير معادلة انحدار مستقلة للجزء الأول والجزء الأخير من العينة .

٥ – نحصل على مجموع مربعات الأخطاء لكل انحدار على النحو التالي:

$$ESS_1 = \sum_{t=1}^{n_1} e_t^2 = (\sum_{j=1}^{ن_1} د_j^2)_1 \quad \ldots\ldots\ldots (١٢-٤)$$

$$ESS_2 = \sum_{t=n-n_2+1}^{n} e_t^2 = (\sum_{j=ن-ن_2+1}^{ن} د_j^2)_2 \quad \ldots\ldots\ldots (١٢-٥)$$

٦ – نقوم بتحديد (ف*س) F^*_c المحسوبة باستخدام الصيغة :

$$ف^*_س = \frac{(\sum د_j^2)_2/(ن_2-ك)}{(\sum د_j^2)_1/(ن_1-ك)} \quad \ldots\ldots (١٢-٦)$$

$$F^*_c = \frac{\hat{\delta}_2^2}{\delta_1^2} = \frac{ESS_2/(n_2-k)}{ESS_1/(n_1-k)}$$

حيث ك (k) = عدد المعلمات المقدرة في الانحدار بما فيها المعلمة التقاطعية.

٧ – نريد اختبار هل هناك اختلاف جوهري بين (ع^{2}د١) ، (ع^{2}د٢) ($\hat{\delta}_1^2 , \hat{\delta}_2^2$) .

ومن ثم تكون الفروض محل الاختبار هي :

فرض العدم : ع^{2}د١ = ع^{2}د٢ (ثبات تباين البواقي) $\delta_1^2 = \delta_2^2$

في مواجهة الفرض البديل : ع^{2}د١ ≷ ع^{2}د٢ (تغير تباين البواقي) $\delta_1^2 \gtrless \delta_2^2$

ولعمل ذلك نبحث عن ف ج ($F^{n_2-k}_{n_1-k,\alpha}$) في الجداول عند مستوى معنوية α (١٪ أو ٥٪) ونقارنهما . فإذا كانت ف س > ف ج $F_c > F_t$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض القائل بوجود تغير في التباين . و العكس صحيح .

ويلاحظ أنه إذا كانت ف س < ١ ($F_c < 1$) عندئذ يتعين استخدام($\frac{1}{ف_س}$) $\frac{1}{F_c}$ في المقارنة مع "ف ج" F_t ، ذلك لأن الفرض البديل عادة ما يكون ($\delta_2^2 > \delta_1^2$) ع٢د١ > ع٢د٢

مثال (١٢-١)

اختبار G-Q لعدم ثبات التباين

افترض أن البيانات التالية تم تقديرها من عينة حجمها ٢٠ مشاهدة باستخدام معادلة انحدار بسيط ، حيث س ز (X_t) تشير للمتغير التفسيري ، د ز (e_t) تشير للبواقي المقدرة .

جدول (١٢-١)

عدم ثبات التباين

المشاهدة	س ز (X_t)	د ز (e_t)
١	٢٠	صفر
٢	٢٥	٨
٣	٣٠	٣
٤	٣٥	١٣
٥	٢٠	٣-
٦	٢٥	٨-
٧	٣٥	١٥-
٨	٢٠	٣
٩	٣٠	١٠-
١٠	٣٥	١٧-
١١	٤٠	٥
١٢	٢٥	٢
١٣	٤٠	٢٥
١٤	٣٠	٥-
١٥	٣٥	٢٠
١٦	٣٠	١٥
١٧	٤٠	٢٠-
١٨	٤٥	٣٠
١٩	٤٥	٣٧-
٢٠	٤٥	٩-

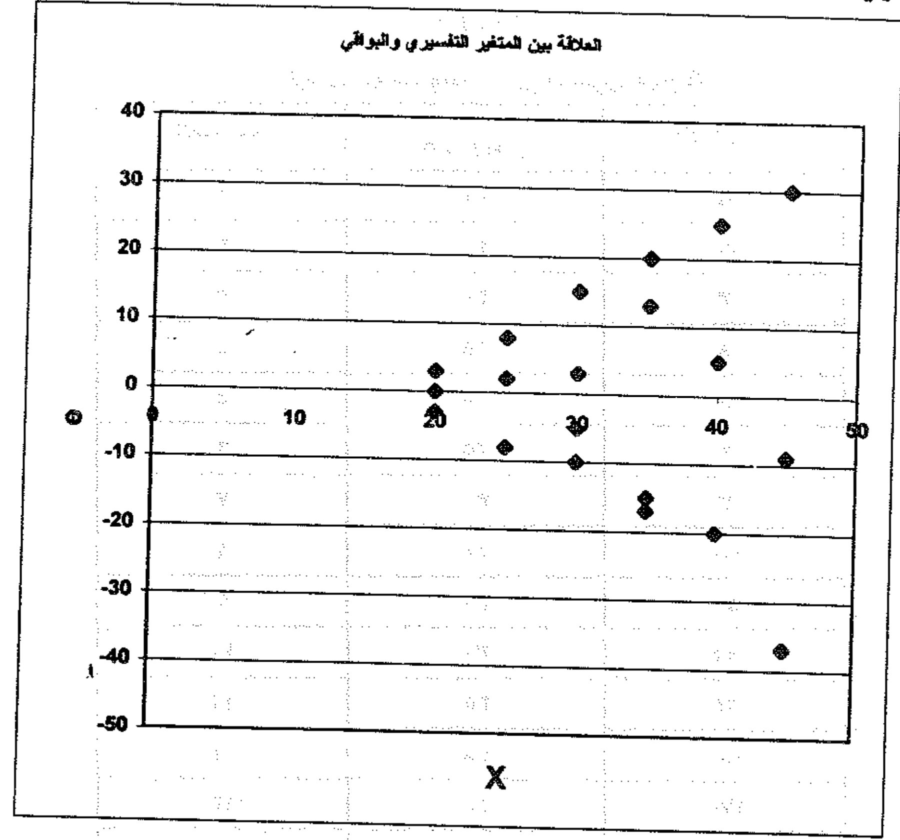
ولإجراء اختبار G - Q نقوم أولاً بترتيب البيانات تصاعدياً وفقاً للمتغير س (X) وذلك كما يتضح بالجدول (١٢-٢) .

جدول (١٢-٢)

ترتيب البيانات وفقاً للمتغير التفسيري س (X)

المشاهدة	س ز (X_t)	د ز (e_t)
١	٢٠	صفر
٢	٢٠	٣-
٣	٢٠	٣
٤	٢٥	٨
٥	٢٥	٨-
٦	٢٥	٢
٧	٣٠	٣
٨	٣٠	١٠-
٩	٣٠	٥-
١٠	٣٠	١٥
١١	٣٥	١٣
١٢	٣٥	١٥-
١٣	٣٥	١٧-
١٤	٣٥	٢٠
١٥	٤٠	٥
١٦	٤٠	٢٥
١٧	٤٠	٢٠-
١٨	٤٥	٣٠
١٩	٤٥	٣٧-
٢٠	٤٥	٩-

ثم نقوم برسم شكل الانتشار الذي يمثل العلاقة بين البواقي د ز ، والمتغير التفسيري س ز فنجده كما بالشكل (١٢-٥) .



شكل (١٢-٥)

ومن الواضح بالشكل (١٢-٥) أن تباين الحد العشوائي متزايد وليس ثابتاً . ولاختبار مدى وجود مشكلة عدم ثبات التباين نقوم بتقسيم بيانات العينة (٢٠) إلى ٣ مجموعات من الجدول (١٢-٢) .

المجموعة الأولى = ن ١ = ٨ مشاهدات (من ١ - ٨)

المجموعة الأخيرة = ن ٢ = ٨ مشاهدات (من ١٣ - ٢٠)

المجموعة الوسطى والمستبعدة = ٤ مشاهدات (من ٩ - ١٢)

ثم نقوم بحساب مجموع مربعات البواقي للمجموعتين الأولى والأخيرة كما بالجدول (١٢-٣).

جدول (١٢-٣)

مجموع مربعات البواقي

المجموعة الأولى			المجموعة الأخيرة		
مشاهدة	$د_ر$	$د^٢_ر$	مشاهدة	$د_ر$	$د^٢_ر$
١	صفر	صفر	١٣	١٧-	٢٨٩
٢	٣-	٩	١٤	٢٠	٤٠٠
٣	٣	٩	١٥	٥	٢٥
٤	٨	٦٤	١٦	٢٥	٦٢٥
٥	٨-	٦٤	١٧	٢٠-	٤٠٠
٦	٢	٤	١٨	٣٠	٩٠٠
٧	٣	٩	١٩	٣٧-	١٣٦٩
٨	١٠-	١٠٠	٢٠	٩-	٨١
		$\sum د^٢_ر =$ ٢٥٩			$\sum د^٢_ر =$ ٤٠٨٩

ثم نقوم بحساب $ف_س$ كما يلي :

$$ف_س = \frac{(٤٠٨٩) \div (٨-٢)}{(٢٥٩) \div (٨-٢)} = \frac{٦٨١,٥}{٤٣,١٧} = ١٥,٨$$

وبالبحث عن $ف_ج$ بالجداول عند درجات حرية للبسط ٦ وللمقام ٦ ، ومستوى معنوية ٥ ٪ نجد أن : $ف_ج = ٤,٢٨$ وحيث أن $ف_س$ > $ف_ج$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بعدم ثبات التباين .

(٢) اختبار Breusch - Pagan Test

لقد تم تقديم هذا الاختبار عام ١٩٧٩ ، وهو يعتمد على فكرة مضاعف لاجرانج. وإذا افترضنا أن تباين البواقي $ع^٢_{د ز}$ (δ^2_t) يتغير مع تغير عدد من المتغيرات التفسيرية $ل_ز$ (Z_t) التي يوجد بعضها أو كلها بالنموذج الأصلي ، حيث :

ص ز = ب ١ + ب ٢ س ٢ز + ب ٣ س ٣ ز + .. + ب م س م ز + ع ز .... (١٢-٧)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \dots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

ع٢ د ز = أ + أ ١ ل ١ز + أ ٢ ل ٢ ز + ... + أ ر ل ر ز .... (١٢-٨)

$$\delta^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t} + \dots + \alpha_p Z_{pt}$$

فإن هذه المشكلة تكون موجودة إذا كانت أ ١ ، أ ٢ ، أ ٣ ، ... ، أ ر معنوية إحصائياً . وبالطبع تختفي المشكلة إذا كانت أ ١ = أ ٢ = ... = أ ر = صفر . ولذا فإن فرض العدم في هذه الحالة يتمثل في :

أ ١ = أ ٢ = ... = أ ر = صفر .... (١٢-٩)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots\dots = \alpha_p = 0$$

ولإجراء الاختبار السابق نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقدير معادلة الانحدار الأصلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية .

ص ز = بَ ١ + بَ ٢ س ٢ ز + ... بَ م س م ز + د ز .... (١٢-١٠)

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \dots + \hat{\beta}_k X_{kt} + e_t$$

(٢) نقوم بالحصول على البواقي د ز (e_t) حيث أن :

د ز = ص ز − بَ ١ − بَ ٢ س ٢ ز − .... − بَ م س م ز (١٢-١١)

$$e_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \dots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

ثم نحسب تباين البواقي باستخدام الصيغة التالية :

ع٢ د = مج د٢ ز / ن $\left(\hat{\delta}^2 = \frac{\Sigma e^2_t}{n} \right)$ .... (١٢-١٣)

(٣) نقوم بتقدير ما يسمى بالانحدار المساعد وذلك بغرض اختبار مدى وجود علاقة جوهرية بين د٢ ز (e^2_t) [ممثل تباين الحد العشوائي] والمتغيرات (ل ز) Z_t التي تمثل بعض أو كل المتغيرات التفسيرية بالنموذج الأصلي ، أو بعض مشتقاتها . أي نقوم بتقدير :

$$\frac{د^{٢}_{ز}}{ع^{٢}_{د}} = أ + أ_{١} ل_{١ز} + أ_{٢} ل_{٢ز} + ... + أ_{ر} ل_{رز} + و_{ز} \quad ...... (١٢-١٤)$$

$$\frac{e_t^{2}}{\hat{\delta}^{2}} = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t} + ... + \alpha_p Z_{pt} + V_t$$

(٤) يتم اختبار فرض العدم : $أ_{١} = أ_{٢} = ... = أ_{ر}$ = صفر

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$$

ويمكن إثبات أنه في حالة العينات الكبيرة وفى ظل فرض العدم السابق فإن نصف مجموع مربعات الانحدار المقدر (RSS) Regression Sum of Squares [RSS / 2] للصيغة (١٢-١٤) له توزيع كا ٢ عند درجات حرية (ر) (P) (عدد المعلمات المقدرة في صيغة الانحدار المساعد) ومستوى معنوية ١ ٪ أو ٥ ٪ .

(٥) لو أن $[RSS / 2] > \chi^2_{p,\alpha}$ نرفض فرض العدم وتوجد هناك مشكلة عدم ثبات التباين ، و العكس صحيح .

٣ - اختبار White's Test

مما يؤخذ على اختبار Breusch-Pagan أنه حساس جداً لاختلال افتراض التوزيع الطبيعي . كما يتطلب هو و اختبار Goldfeld-quandt معرفة أسباب مشكلة عدم ثبات التباين . ومن خصائص اختبار White's Test أنه :

(أ) لا يتطلب معلومات سابقة عن أسباب مشكلة عدم تساوى الانتشار (عدم ثبات التباين).

(ب) لا يعتمد على افتراض اعتدال التوزيع .

(حـ) يصلح عادة للعينات كبيرة الحجم ، أي يصلح للعينات من الحجم ٣٠ وأكبر .

وتتمثل خطوات إجراء هذا الاختبار فيما يلي :

(١) تقدير دالة الانحدار الأصلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية .

$$ص_{ز} = \hat{ب}_{١} + \hat{ب}_{٢} س_{٢ز} + \hat{ب}_{٣} س_{٣ز} + د_{ز} \quad .... (١٢-١٥)$$

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{\beta}_3 X_{3t} + e_t$$

(٢) الحصول على قيم البواقي د ز (e_t) على النحو التالي :

د ز = ص ز − بَ ١ − بَ ٢ س ٢ز − بَ ٣ س ٣ز .... (١٢−١٦)

$$e_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \hat{\beta}_3 X_{3t}$$

(٣) تقدير انحدار مساعد بين د٢ز (e^2_t) من ناحية ، والمتغيرات س ٢ز (X_{2t}) ، س ٣ز (X_{3t}) ، س٢ ٢ز (X^2_{2t}) ، س٢ ٣ز (X^2_{3t}) ، س ٢ز س ٣ز ($X_{2t}\ X_{3t}$) من ناحية أخرى. أي تقدير الصيغة :

د٢ز = أَ١ + أ٢ س ٢ز + أَ٣ س ٣ز + أَ٤ س٢ ٢ز + أ٥ س٢ ٣ز

+ أَ٦ س ٢ز س ٣ز + و ز .... (١٢−١٧)

$$\hat{e}_t^2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \hat{\alpha}_3 X_{3t} + \hat{\alpha}_4 X_{2t}^2 + \hat{\alpha}_5 X_{3t}^2$$

$$+ \hat{\alpha}_6 X_{2t} X_{3t} + V_t$$

(٤) نقوم بتقدير (ن ر٢) ($n R^2$) حيث : ن (n) حجم العينة ، ر٢ (R^2) معامل التحديد غير المعدل للانحدار المساعد (١٢−١٧).

(٥) نقوم باختبار فرض العدم : أ٢ = أ٣ = ... = صفر ، وذلك بمقارنة (ن ر٢) $n R^2$ مع كا٢ عند مستوى معنوية معين ٥ ٪ أو ١ ٪ ، ودرجات حرية = عدد المعلمات الانحدارية في صيغة الانحدار المساعد (أي مع استبعاد المعلمة التقاطعية) .

وإذا كان : $n R^2 > \chi^2_{5,\,0.05}$ نرفض فرض العدم ، وتوجد مشكلة عدم ثبات التباين ، وإذا كان العكس لا توجد مشكلة ثبات التباين . وإذا قبلنا فرض العدم فإن هذا يعني أن :

ع٢ د ز = أ١ = ثابت $(\delta^2_t = \alpha_1)$.

ويتعين ملاحظة بعض النقاط بشأن اختبار White :

(أ) إذا كان (س ٢ز) X_{t2} متغيراً صورياً يأخذ قيمتين فقط هما صفر ، ١ ، فإن س ٢ز = س٢ ٢ز ، و بالتالي سوف توجد مشكلة امتداد خطي متعدد ، ولذلك يتعين استبعاد س٢ ٢ز من الانحدار المساعد في هذه الحالة .

(ب) في حالة أن يكون عدد المتغيرات التفسيرية في الصيغة الأصلية كبيراً فإن هذا العدد يزداد في الصيغة المساعدة بحيث قد يصبح أكبر من عدد المشاهدات المقدرة ، وفي هذه الحالة لا يمكن إجراء تقدير لمعادلة الانحدار المساعد . ومن ثم فإن الحل يكون هو استبعاد بعض المتغيرات ، خاصة ذات التأثير الخطي مثل X_{2t} , X_{3t} ، مع استبقاء المتغيرات ذات التأثير غير الخطى مثل القيم التربيعية وحدود التداخل .

وعموماً فإنه في حالة أن تكون المعلمات المقدرة عددها ك (K) بما فيها الحد الثابت ، فإن عدد حدود الانحدار المساعد = [ك (ك + ١) / ٢] $[K(K+1)/2]$ حد، وبالتالي فإن عدد المشاهدات يجب أن يكون أكبر من هذا العدد .

٤ – اختبار بارك Park Test

لإجراء هذا الاختبار يتعين أن نقوم بتقدير الصيغة الأصلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى :

ص ز = بَ ١ + بَ ٢ س ٢ز + بَ ٣ س ٣ز +......... + د ز

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{\beta}_3 X_{3t} + ... + e_t$$

ثم نحصل على مربعات البواقي د٢ز (e^2_t) ، ونقدر معادلة انحدار بينها وبين أحد المتغيرات التفسيرية أو كلها على النحو التالي :

د٢ز = أ٠ + أ١ + أ٢ س ٢ز +........... + و ز

$$e^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + ... + V_t$$

فإذا كانت (أ ر) α_i أو بعضها لها معنوية إحصائية يكون هناك مشكلة انتشار غير متساوي (عدم ثبات تباين) .

مثال (١٢-٢)

اختبار بارك للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين

افترض أن البيانات التالية تمثل الإنفاق الاستهلاكي ص (Y) والدخل س (X) لعينة من الأسر بالألف جنيه .

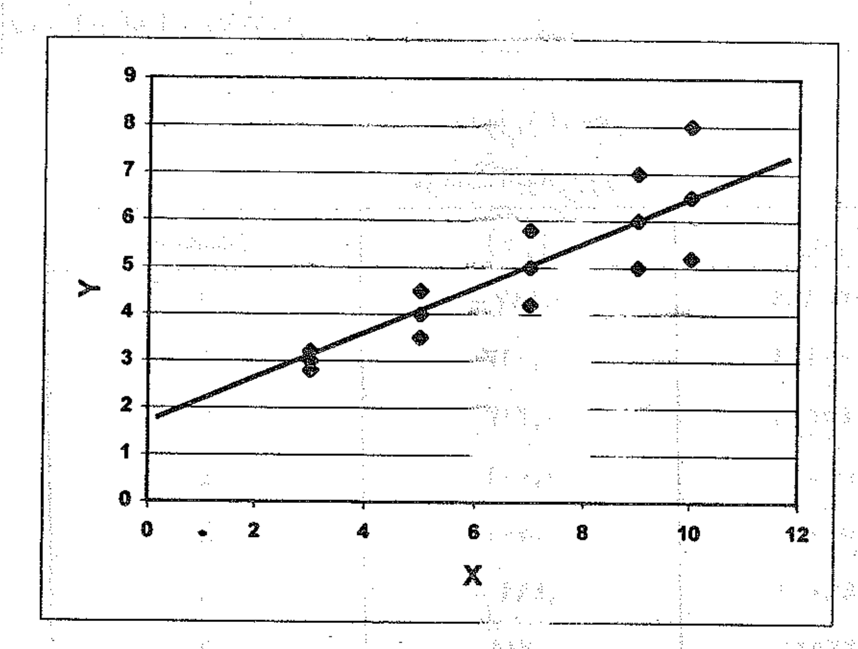
جدول (١٢-٤)

الدخل والإنفاق الاستهلاكي لعينة من الأسر

المشاهدة	ص (Y)	س (X)
١	٢,٨٠	٣
٢	٣,٠٠	٣
٣	٣,٢٠	٣
٤	٤,٠٠	٥
٥	٤,٥٠	٥
٦	٣,٥٠	٥
٧	٥,٨٠	٧
٨	٥,٠٠	٧
٩	٤,٢٠	٧
١٠	٧,٠٠	٩
١١	٦,٠٠	٩
١٢	٥,٠٠	٩
١٣	٨,٠٠	١٠
١٤	٦,٥٠	١٠
١٥	٥,٢٠	١٠

والمطلوب هو اختبار مدى وجود مشكلة عدم ثبات التباين باستخدام معيار بارك .

وبرسم شكل الانتشار (١٢-٦) بين ص (Y) ، س (X) يتضح منه أن تباين الحد العشوائي يتزايد مع تزايد الدخل .



تزايد تباين الحد العشوائي مع الدخل

شكل (١٢-٦)

وبتقدير دالة الاستهلاك باستخدام بيانات الجدول (١٢-٤) نحصل على :

ص ر = ١,٤٦٩ + ٠,٥٠٦ س ر + د ر .... (١٢-١٨)
(٠,٥٦٧) (٠,٠٧٨)   ر^2 = ٠,٧٦٤

وباستخدام الصيغة (١٢-٩) للحصول على البواقي (د ر) :

د ر = ص ر - ١,٤٦٩ - ٠,٥٠٦ س ر .... (١٢-١٩)

ثم نقوم بتربيعها كما بالجدول (١٢-٥) . وبتقدير العلاقة بين مربعات البواقي د²ر (e^2_i) والمتغير التفسيري س ر (X_i) نحصل على الصيغة التالية :

د²ر = −٠,٥٨٨ + ٠,١٦٣ س ر + و ر .... (١٢-٢٠)

ع² = (٠,٤١) (٠,٠٥٦)

ت = (−١,٤٣) (٢,٨٧٩)

جدول (١٢-٥)

مربعات البواقي (د²ر)

مشاهدات	(د ر)	(د²ر)
١	−٠.١٨٧	٠,٠٣٤٩٦٩
٢	٠,٠١٣	٠,٠٠٠١٦٩
٣	٠,٢١٣	٠,٠٤٥٣٦٩
٤	٠,٠٠١	١ × ١٠^−٦
٥	٠,٥٠١	٠,٢٥١٠٠١
٦	−٠,٤٩٩	٠,٢٤٩٠٠١
٧	٠,٧٨٩	٠,٦٢٢٥٢١
٨	−٠,٠١١	٠,٠٠٠١٢١
٩	−٠,٨١١	٠,٦٥٧٧٢١
١٠	٠,٩٧٧	٠,٩٥٤٥٢٩
١١	−٠,٠٢٣	٠,٠٠٠٥٢٩
١٢	−١,٠٢٣	١,٠٤٦٥٢٩
١٣	١,٤٧١	٢,١٦٣٨٤١
١٤	−٠,٠٢٩	٠,٠٠٠٨٤١
١٥	−١,٣٢٩	١,٧٦٦٢٤٢

ويتضح من الصيغة (١٢-٢٠) أن هناك علاقة طردية وجوهرية عند مستوى معنوية ٥ ٪ بين $د^٢_ز$ ، $س_ز$ وهو ما يشير إلى وجود مشكلة عدم ثبات التباين وفقاً لاختبار بارك .

(١٢-٢-٢) طرق تصحيح مشكلة التباين غير الثابت :

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح هذه المشكلة هي طريقة المربعات الصغرى العامة أو المرجحة . Generalized (or weighted) Least Squares (GLS (وتقوم فكرة هذه الطريقة على إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل عن خط الانحدار وزناً أكبر من القيم ذات الانحراف الأكبر في تقدير العلاقة محل الاعتبار . ولذا فإن الوزن الذي تتخذه هو مقلوب الانحراف المعياري للبواقي e_t :

أي أن الوزن = $و_ز = \frac{١}{ع_{د ز}}$ $W_t = \frac{1}{\delta_t}$

ومن الملاحظ أنه كلما قل تباين البواقي زاد الوزن W_t والعكس صحيح .

ومن ثم فإذا كان النموذج الأصلي هو :

$$ص_ز = ب_١ + ب_٢ س_{٢ز} + ب_٣ س_{٣ز} + د_ز \quad \text{......................} (١٢-٢١)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

فإن النموذج المعدل الذي يتم تقديره لتلاشي مشكلة التباين غير الثابت إن وجدت هو:

$$\frac{ص_ز}{ع_{د ز}} = ب_١ \frac{١}{ع_{د ز}} + ب_٢ \frac{س_{٢ز}}{ع_{د ز}} + ب_٣ \frac{س_{٣ز}}{ع_{د ز}} + \frac{د_ز}{ع_{د ز}} \quad ... \quad (١٢-٢٢)$$

$$\frac{Y_t}{\delta_t} = \beta_1 \frac{1}{\delta_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\delta_t} + \beta_3 \frac{X_{3t}}{\delta_t} + \frac{u_t}{\delta_t}$$

وهي نفس الصيغة التالية :

و ز ص ز = ب ١ و ز + ب ٢ (و ز س ٢ ز) + ب ٣ (و ز س ٣ ز) + (و ز د ز) .. (١٢-٢٣)

$$W_t Y_t = \beta_1 W_t + \beta_2 (W_t X_{2t}) + \beta_3 (W_t X_{3t}) + (W_t u_t)$$

وللتبسيط تصبح الصيغتين السابقتين :

ص* ز = ب ١ و ز + ب ٢ س* ٢ ز + ب ٣ س* ٣ ز + د* ز .... (١٢-٢٤)

$$Y^*_t = \beta_1 W_t + \beta_2 X^*_{2t} + \beta_3 X^*_{3t} + u_t^*$$

ونظراً لأن (ع دز) (و ز) تتغيران من مشاهدة لأخرى فإن الصيغ (١٢-٢٢) - (١٢-٢٤) لا يوجد بها معلمة تقاطعية حيث أن الحد (ب ١ و ز) ($\beta_1 W_t$) يصبح هو الآخر متغيراً . وبتقدير هذه الصيغة المعدلة نكون قد قضينا على مشكلة عدم ثبات التباين.

ولكن يبقى عندنا مشكلة ، وهي كيف يمكن تقدير ع دز (و ز) W_t (δ_t) المتغير ؟ ونفرق في هذا الصدد بين عدد من الحالات :

(أ) الصيغة الضربية للتباين غير الثابت Multiplicative Heteroscedasticity

إذا كان هناك متغير (ل ز) Z_t يعتقد أن تباين الحد العشوائي (ء ز) u_t مرتبطاً معه ارتباطاً قوياً بحيث :

تبا (د ز) = ع ٢ دز = ع ٢ ل ٢ ز $\quad (var(u_t) = \delta_t^2 = \delta^2 Z^2_t)$

ومن ثم : ع دز = ع ل ز $\quad (\delta_t = \delta Z_t)$

حيث ع (δ) ثابت ، ففي هذه الحالة يمكن أن نستخدم (ل ز) Z_t كمؤشر لقيم (ع ز) δ_t ومن ثم نقدر العلاقة (١٢-٢٤) على النحو التالي :

ص ز / ل ز = ب ١ (١ / ل ز) + ب ٢ (س ٢ ز / ل ز) + ب ٣ (س ٣ ز / ل ز) + (د ز / ل ز) ..... (١٢-٢٥)

$$\frac{Y_t}{Z_t} = \beta_1 \frac{1}{Z_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{Z_t} + \beta_3 \frac{X_{3t}}{Z_t} + \frac{u_t}{Z_t}$$

وفى حالة تقدير دالة الاستهلاك كعلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي والدخل الكلى وعدد السكان ،وكان هناك اعتقاد (أو ثبت أن) د$^{٢}_{ز}$ (e^2_t) على علاقة قوية مع عدد السكان (ل$_{ز}$) Z_t ، فإن الصيغة (١٢-٢٦) تصبح ملائمة لتقدير دالة الاستهلاك :

$$\frac{ص_{ز}}{ل_{ز}} = ب_{١} \frac{١}{ل_{ز}} + ب_{٢} \frac{س_{٢ز}}{ل_{ز}} + \frac{د_{ز}}{ل_{ز}} \quad .... (١٢-٢٦)$$

$$\frac{Y_t}{Z_t} = \beta_1 \frac{1}{Z_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{Z_t} + \frac{u_t}{Z_t}$$

مع التخلص من مشكلة التباين غير الثابت ، حيث :

$$\frac{ص_{ز}}{ل_{ز}} = \text{متوسط الاستهلاك} = \frac{Y_t}{Z_t}$$

$$\frac{س_{ز}}{ل_{ز}} = \text{متوسط الدخل} = \frac{X_{t2}}{Z_t}$$

وبالطبع لا يوجد في هذه الحالة حد ثابت حيث ($\frac{١}{ل_{ز}}$) يعتبر $\frac{Y_t}{Z_t}$ متغيراً . ولذا فإنه من الناحية القياسية قد يؤدى استخدام القيمة المتوسطة أحياناً بدلاً من استخدام القيم الكلية إلى تلاشى مشكلة التباين غير الثابت .

(ب) استخدام المتغيرات التفسيرية لتقدير $\hat{ع}^{٢}_{دز}$ ($\hat{\delta}^2_t$)

دعنا نبدأ بالصيغة الأصلية التالية للانحدار :

$$ص_{ز} = ب_{١} + ب_{٢} س_{٢ز} + ب_{٣} س_{٣ز} + ع_{ز} \quad .... (١٢-٢٧)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

ولتقدير $\hat{ع}^{٢}_{دز}$ ($\hat{\delta}^2_t$) نتبع الخطوات التالية :

١ - نقوم بتقدير ($\hat{ب}_{،}$) $\hat{\beta}_i$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية للصيغة (١٢-٢٧) .

٢ – نقوم بحساب البواقي د ز (e_t) ونحصل على مربعاتها د٢ز (e^2_t) .

٣ – نقوم بالحصول على الانحدار المساعد التالي :

= أ١ + أ٢ س٢ز + أ٣ س٣ز + أ٤ س٢ز٢ + أ٥ س٣ز٢ + أ٦ س٢ز س٣ز + ق ز
(١٢-٢٨)................................

$$e^2_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{2t}^2 + \alpha_5 X_{3t}^2 + \alpha_6 X_{2t} X_{3t} + V_t$$

٤ – عندئذ نقوم باستخدام القيم المقدرة : أ̂ر ($\hat{\alpha}$) والقيم المشاهدة لمتغيرات صيغة الانحدار المساعد (س رز) X_{it} لنحصل على الصيغة التالية ع̂٢دز ($\hat{\delta}^2_t$) :

ع̂٢دز = أ̂١ + أ̂٢ س٢ز + ... + أ̂٦ س٢ز س٣ز .... (١٢-٢٩)

$$\hat{\delta}_t^2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \ldots\ldots + \hat{\alpha}_6 X_{2t} X_{3t}$$

٥ – ولكن قد اتضح أن ع٢دز (δ^2_t) مقدر غير كفء ولذا وجب أن نقوم بعمل تعديل آخر للحصول على تقدير كفء له . ولعمل ذلك نقدر ع٢/دز ($\tilde{\delta}^2_t$) حيث :

ع٢/دز = د٢ز / ع٢دز = أ١ (١ / ع٢دز) + أ٢ (س٢ز / ع٢دز) + ... + أ٦ (س٢ز س٣ز / ع٢دز) (١٢-٣٠)

$$\tilde{\delta}_t^2 = \frac{e_t^2}{\hat{\delta}_t^2} = \alpha_1 \frac{1}{\hat{\delta}_t^2} + \alpha_2 \frac{X_{2t}}{\hat{\delta}_t^2} + \alpha_3 \frac{X_{3t}}{\hat{\delta}_t^2} + \ldots\ldots + \alpha_6 \frac{X_{2t} X_{3t}}{\hat{\delta}_t^2}$$

٦ – ثم نحصل على القيم المقدرة لـ ع٢/دز ($\tilde{\delta}^2_t$) بنفس الطريقة السابقة لـ ع̂٢دز $\hat{\delta}^2_t$ ثم نحصل على جذرها التربيعي ليكون هو الوزن الجديد ، حيث :

و ز = $\frac{١}{ع'_{دز}}$		$(W_t = \frac{1}{\tilde{\delta}_t})$

٧ – ثم نعود مرة أخرى لتقدير الصيغة المرجحة للانحدار حيث :

و ز ص ز = ب ١ و ز + ب ٢ (و ز س ٢ ز) + ... + و ز ى ز		..... (١٢–٣١)

$$W_t Y_t = \beta_1 W_t + \beta_2 (W_t X_{2t}) + \beta_3 (W_t X_{3t}) + (W_t u_t)$$

ومن المشاكل التي تواجه هذه الطريقة أنه في حالة وجود متغيرات صورية فإن بعض المتغيرات التفسيرية قد تكون مرتبطة ارتباطاً تاماً في صيغة الانحدار المساعد . والحل هنا يكون هو استبعاد هذه المتغيرات من الانحدار المساعد . وفى بعض الحالات قد يحدث أن تكون $\hat{ع}^{٢}_{دز}$ أو $ع''_{دز}$ ($\hat{\delta}^2_t$ أو δ^2_t) = صفر ، وفى هذه الحالة فإن الوزن (و ز) W_t يكون غير معرف . والحل لهذه الحالة هو أن نستبعد هذه القيم أو نضع لها وزناً يساوى صفراً .

حـ – استخدام الصيغة اللوغاريتمية الخطية لتقدير $ع^{٢}_{دز}$ (δ^2_t) :

عند استخدام الطريقة السابقة قد يحدث أن تكون بعض القيم المقدرة لـ $\hat{ع}^{٢}_{دز}$ ، $ع''_{دز}$ ($\hat{\delta}^2_t$ أو $\tilde{\delta}^2_t$) سالبة . والإجراء الذي يضمن أن تكون القيمة المقدرة لهذا التباين عادة موجبة هو أن نستخدم لوغاريتم مربع البواقي في الانحدار المساعد . ولعمل ذلك نتبع الخطوات التالية :

١ – نقدر صيغة الانحدار الأصلية بطريقة المربعات الصغرى العادية .

ص ز = ب ١ + ب ٢ س ٢ ز + ب ٣ س ٣ ز + ى ز

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

٢ – نحصل على البواقي (د ز) ثم نربعها ($د^{٢}_{ز}$) (e^2_t) .

٣ – نحصل على اللوغاريتم الطبيعي للمربعات لو ($د^{٢}_{ز}$) ، ثم نقدر الانحدار المساعد التالي:

لو د$^{2}_{ز}$ = أ$_1$ + أ$_2$ س$_{2ز}$ + أ$_3$ س$_{3ز}$ + ... + أ$_6$ س$_{2ز}$س$_{3ز}$ + ق$_ز$ .. (١٢-٣٢)

$$\ln e^2_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X^2_{2t} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \alpha_6 X_{2t} X_{3t} + V_t$$

٤ – نحصل على القيم المقدرة لو$\hat{}$ د$^{2}_{ز}$ ($\ln\hat{e}^2_t$) باستخدام (أ$\hat{}_ر$ ، س$_{رز}$) ($\hat{\alpha}_i, X_{it}$) ثم نحصل على (ع$\hat{}^{2}_{دز}$)($\hat{\delta}^2_t$) من مقابل لوغاريتم القيمة المقدرة لو$\hat{}$ د$^{2}_{ز}$ ($\ln\hat{e}^2_t$) التي لابد أن تكون قيماً موجبة . ثم نحصل على ع$\hat{}_{دز}$ ($\hat{\delta}_t$) كجزر تربيعي ومنه نحصل على :

الـــوزن و$_ز$ = $\frac{1}{\hat{ع}_{دز}}$ ($W_t = \frac{1}{\hat{\delta}_t}$) ونتـابع الخطـوات للحصـول على الانحدار المرجح باستخدام طريقة المربعات الصغرى العامة .

الفصل الثالث عشر

تقدير النماذج ذات الفجوات الزمنية

Estimation of Lagged Variable Models

لقد كانت نماذج الانحدار التي استخدمناها في فصول سابقة تفترض أن التغير في المتغير التفسيري يؤثر تأثيراً مباشراً وفورياً على المتغير التابع . وهي بذلك لم تعط أي اعتبار للفجوة الزمنية التي تمر قبل أن يبدأ المتغير التابع في الاستجابة للتغير في المتغير التفسيري ، أو للفترة الزمنية التي يحدث عبرها التغير في المتغير التابع كاستجابة لتغير ما في المتغير التفسيري .ويلاحظ عموماً أن التغير في المتغيرات التفسيرية كثيراً ما لا يحدث آثاره بصورة مباشرة وفورية على الظواهر الاقتصادية ، وإنما يحتاج الأمر لفترة زمنية قد تكون طويلة حتى يمكن لهذه المتغيرات أن تمارس آثارها كاملة على مثل هذه الظواهر . فتخفيض قيمة العملة مثلاً لا يمارس آثاره مباشرة على الصادرات والواردات وإنما يحتاج لفترة زمنية طويلة نسبياً حتى تتم آثاره كاملة ، وكذلك الأمر بالنسبة لتغير معدلات الضرائب وما تمارسه من آثار على الاستهلاك أو الإنتاج أو الاستثمار.

ومن هنا ظهرت الحاجة لضرورة استخدام النماذج ذات الفجوات الزمنية، وهي نماذج تستخدم عندما توجد هناك متغيرات تفسيرية تمتد آثارها عبر عدد من الفترات الزمنية .

وسوف نتعرض في هذا الفصل لنقطتين أساسيتين نتناول كل منهما في مبحث مستقل على النحو التالي :

المبحث الأول : التعريف بالنماذج ذات الفجوة الزمنية .

المبحث الثاني: طرق تقدير النماذج ذات الفجوة الزمنية .

المبحث الأول
التعريف بالنماذج ذات الفجوة الزمنية

(١٣-١-١) أنواع النماذج ذات الفجوة الزمنية.

يمكن تقسيم النماذج ذات الفجوات الزمنية وفقاً لمعيارين ، أولهما هو نوع المتغير التفسيري ذو الفجوة وثانيهما هو طول الفجوة الزمنية .

(١) نوع المتغير التفسيري ذو الفجوة :

تنقسم النماذج ذات الفجوة الزمنية لنوعين وفقاً للمتغير التفسيري ذو الفجوة :

(أ) النماذج ذات الفجوة الموزعة Distributed-lag models

وهى نماذج تحتوى على قيم سابقة past values لمتغيرات خارجية كمتغيرات تفسيرية ، مثال ذلك دالة الاستثمار التالية :

ث ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ف ز + ب ٣ ف ز-١ + ى ز .... (١٣-١)

$$I_t = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 r_t + \beta_3 r_{t-1} + u_t$$

ث ز = حجم الاستثمار بالفترة الحالية . (I_t)

ل ز = مستوى الناتج الكلي بالفترة الحالية . (Y_t)

ف ز = سعر الفائدة بالفترة الحالية . (r_t)

ف ز-١ = سعر الفائدة بالفترة السابقة . (r_{t-1})

وباعتبار أن سعر الفائدة متغير خارجي فإن الاستثمار الحالي يكون دالة في قيمة سعر الفائدة بالفترة الحالية وقيمته بالفترة السابقة ، ومن ثم فإن هذا النموذج يكون ذو فجوة موزعة .

(ب) نماذج الانحدار الذاتي Autoregressive models

وهي نماذج تحتوي على قيم سابقة لمتغيرات تابعة كمتغيرات تفسيرية ، مثال ذلك دالة الطلب التالية :

ط ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ط ز-١ + ب ٣ ث ز + ع ز .... (١٣-٢)

$$Q_t = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 Q_{t-1} + \beta_3 P_t + u_t$$

حيث : ط ز = الكمية المطلوبة من السلعة في الفترة الحالية . (Q_t)

ل ز = دخل الفترة الحالية. (Y_t)

ط ز-١ = الكمية المطلوبة من السلعة في الفترة السابقة . (Q_{t-1})

ث ز = سعر السلعة في الفترة الحالية . (P_t)

وتصف هذه الدالة حالة الطلب على السلع المعمرة أو السلع غير المعمرة التي يتكون لدى المستهلك عادة عند استهلاكها (كالسجائر والبن وغيرها) . فمثل هذه السلع تتأثر الكمية المطلوبة منها في الفترة الحالية بالكمية المطلوبة منها بالفترات السابقة . ويلاحظ هنا أن الكمية المطلوبة في الفترة السابقة تستخدم كمتغير تفسيري .

(٢) طول الفجوة الزمنية :

تنقسم النماذج ذات الفجوات الزمنية لنوعين وفقاً لطول الفجوة الزمنية :

(أ) نماذج ذات عدد محدود من الفجوات : Finite number of lags

وفي هذه الحالة يمتد أثر المتغير التفسيري عبر عدد محدد من الفترات أقل من ما لا نهاية . ومن الأمثلة على ذلك الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب ١ س ز + ب ٢ س ز-١ + ب ٣ س ز-٢ + ... + ب م س ز-م + ع ز .. (١٣-٣)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \dots\dots + \beta_m X_{t-m} + u_t$$

حيث أن عدد الفترات التي يمتد عبرها تأثير المتغير التفسيري س = م ، ويلاحظ هنا أن:

ب ١ = $\frac{6\ \text{ص}_{ز}}{6\ \text{س}_{ز}}$ = تأثير التغير في س بمقدار وحدة واحدة على ص خلال الفترة الحالية (β_1) .

ب ٢ = $\frac{6\ \text{ص}_{ز}}{6\ \text{س}_{ز-1}}$ = تأثير التغير في قيمة س بالفترة السابقة بمقدار وحدة واحدة على قيمة ص ز بالفترة الحالية (β_2) .

ب $_م$ = $\frac{\partial \text{ص}_ز}{\partial \text{س}_{ز-م}}$ = تأثير التغير في قيمة س بالفترة $_{ز-م}$ بمقدار وحدة واحدة على قيمة ص $_ز$ بالفترة الحالية (β_m) .

∴ $\sum_{ي=0}$ ب $_ي$ = مجموع تأثيرات التغير في قيمة س بمقدار وحدة واحدة على قيمة ص خلال فترة من الزمن طولها م ($\sum_{i=0}^{m} \beta_i$) .

(ب) نماذج ذات عدد لا نهائي من الفجوات Infinite Sequence of lags

وفي هذه الحالة يمتد أثر المتغير التفسيري ذو الفجوة الزمنية عبر عدد غير محدود من الفترات الزمنية ، وتأخذ معادلة الانحدار الصيغة التالية :

ص $_ز$ = أ + ب $_١$ س $_ز$ + ب $_٢$ س $_{ز-١}$ + ب $_٣$ س $_{ز-٢}$ + ... +ع $_ز$......... (١٣-٤)
$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + ... + u_t$

وبالطبع حتى يمكن تقدير مثل هذه النماذج لابد من وضع قيود معينة على عدد الفجوات الزمنية .

(١٣-١-٢) أمثلة اقتصادية للنماذج ذات الفجوات الزمنية :

(١) دالة الاستهلاك

يلاحظ عموماً أن الشخص لا يغير من عاداته الاستهلاكية بصورة سريعة أو فورية، وإنما يقتضي الأمر أن يمر وقتاً طويلاً نسبياً قبل أن تتغير هذه العادات ، وغالباً ما يتم هذا بصورة تدريجية . ولذا إذا افترضنا أن شخصاً ما زاد دخله السنوي بمقدار ١٠٠٠ جنيه بصفة دائمة فإنه من المتوقع أن يزداد استهلاكه بصورة تدريجية عبر فترة زمنية طويلة نسبياً . فهو قد يزيد استهلاكه في السنة الأولى بمقدار ٤٠٠ جنيه وفي السنة الثانية بمقدار ٣٠٠ جنيه أخرى وفي السنة الثالثة بمقدار ٢٠٠ جنيه أخرى . ومن ثم فإن الزيادة الدائمة في الدخل بمقدار ١٠٠٠ جنيه تكون قد أدت لزيادة نهائية في الاستهلاك

بمقدار = ٤٠٠ + ٣٠٠ + ٢٠٠ = ٩٠٠ جنيه على مدى ٣ سنوات . ويمكن التعبير عن العلاقة بين الاستهلاك (ص) والدخل (ل) في هذه الحالة باستخدام الصيغة التالية :

ص ز+٢ = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ل ز+١ + ب ٣ ل ز+٢ + ع ز+٢

$$C_{t+2} = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t+1} + \beta_3 Y_{t+2} + u_{t+2}$$

ويمكن كتابة نفس الصيغة بالنسبة للفترة ز كما يلي :

ص ز = أ + ب ٣ ل ز-٢ + ب ٢ ل ز-١ + ب ١ ل ز + ع ز

$$C_t = \alpha + \beta_3 Y_{t-2} + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_1 Y_t + u_t$$

وبتعديل حدود دالة الاستهلاك تصبح هذه الدالة كما يلي :

ص ز = أ + ب ١ ل ز + ب ٢ ل ز-١ + ب ٣ ل ز-٢ + ع ز .... (١٣-٥)

$$C_t = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 Y_{t-2} + u_t$$

وباستخدام بيانات المثال المعطى سابقاً يمكن كتابة دالة الاستهلاك على النحو التالي:

ص ز = أ + ٠,٤ ل ز + ٠,٣ ل ز-١ + ٠,٢ ل ز-٢ + ع ز .... (١٣-٦)

$$C_t = \alpha + 0.4\, Y_t + 0.3\, Y_{t-1} + 0.2\, Y_{t-2} + u_t$$

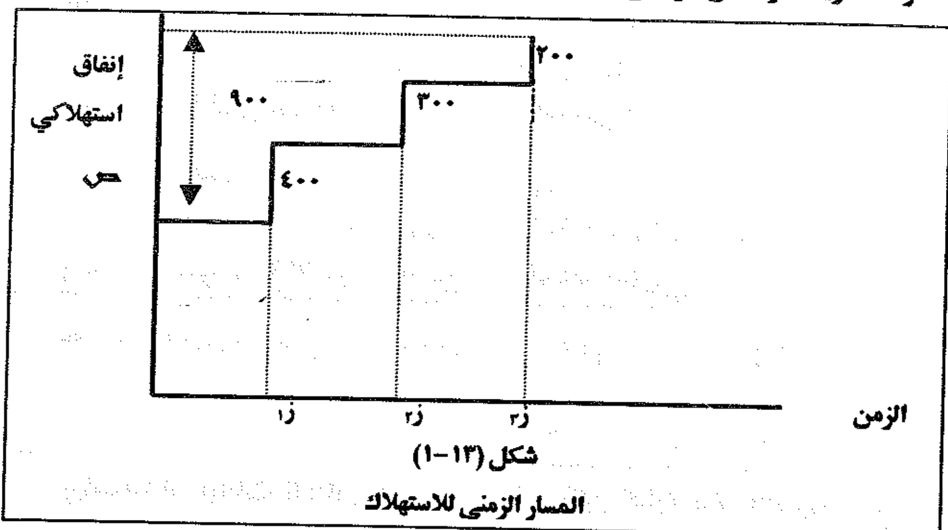
ويتضح من المعادلة (١٣-٦) أن أثر الدخل على الاستهلاك موزع على ٣ فترات زمنية . وباستخدام المعادلتين (١٣-٥) ، (١٣-٦) يمكن توضيح المفاهيم التالية:

(١) مضاعف الفترة القصيرة = ب ١ (β_1) = ٠,٤ وهو يشير في هذه الحالة إلى الميل الحدي للاستهلاك في الفترة القصيرة .

(٢) مضاعف الفترات السابقة = $\sum_{ر=٢}^{م}$ ب ر = ب ٢ + ب ٣ = ٠,٣ + ٠,٢ = ٠,٥ = $\sum_{i=2}^{m} \beta_i$

(٣) مضاعف الفترة الطويلة = $\sum_{ر=١}^{م}$ ب ر = ب ١ + ب ٢ + ب ٣ = ٠,٤ + ٠,٣ + ٠,٢ = ٠,٩ = $\sum_{i=1}^{m} \beta_i$

وهو يشير في هذه الحالة للميل الحدي للاستهلاك في الفترة الطويلة . أي أن زيادة دائمة في الدخل مقدارها ١ جنيه تؤدى إلى زيادة في الاستهلاك تساوي ٩٠ قرش في الفترة الطويلة . ويمكن توضيح هذه الفكرة باستخدام الشكل (١٣-١) .



شكل (١٣-١)

المسار الزمنى للاستهلاك

(٢) خلق الودائع

إذا افترضنا أن البنك المركزي قام بشراء سندات حكومية من الجمهور بما قيمته ١٢٠٠ مليون جنيه ، وأن الجمهور قام بإيداع ١٠٠٠ مليون جنيه منها كودائع أولية بالبنوك التجارية ، فما هو حجم الودائع الكلية التي يمكن للبنوك التجارية أن تولدها باستخدام وديعة أولية مقدارها ١٠٠٠ مليون جنيه ، بافتراض أن نسبة الاحتياطي النقدي هي ٢٠ ٪ ؟ .

بالطبع لن تتم عملية خلق الودائع المشتقة في يوم وليلة ، وإنما سوف تستغرق فترة طويلة من الزمن يمكن توضيحها باستخدام الجدول (١٣-١) .

جدول (١٣-١)

مراحل خلق الودائع

(١) الفترة	(٢) الوديعة الأصلية	(٣) الوديعة المشتقة	(٤) قيمة الاحتياطي النقدي (٠,٢)	(٥) قيمة القرض	(٦) معامل الوديعة (٣)/(٢)
١	١٠٠٠	——	٢٠٠,٠	٨٠٠,٠	ب ١ = ١
٢	——	٨٠٠,٠	١٦٠,٠	٦٤٠,٠	ب ٢ = ٠,٨٠
٣	——	٦٤٠,٠	١٢٨,٠	٥١٢,٠	ب ٣ = ٠,٦٤
٤	——	٥١٢	١٠٢,٤	٤٠٩,٦	ب ٤ = ٠,٥١
٥	——	٤٠٩,٦	——	——	ب ٥ = ٠,٤١
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
إجمالي	١٠٠٠	٤٠٠٠	١٠٠٠		٥

ويمكن التعبير عن عملية خلق الودائع باستخدام الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب ١ س ز + ب ٢ س ز-١ +..... + ع ز .... (١٣-٧)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} \ldots\ldots\ldots + u_t$$

حيث : ص ز = الحجم الكلي للودائع (أصلية ومشتقة) (Y_t)

س ز = الوديعة الأصلية (X_t)

وباستخدام البيانات المعطاة في الجدول (١٣-١) يمكن كتابة المعادلة (١٣-٧) في الصيغة التالية :

ص ز = أ + س ز + ٠,٨ س ز-١ + ٠,٦٤ س ز-٢ +..... + ع ز .... (١٣-٨)

$$Y_t = \alpha + X_t + 0.8\, X_{t-1} + 0.64\, X_{t-2} + \ldots\ldots + u_t$$

ومن ثم فإن :

مضاعف الودائع طويل الأجل = $\sum_{ر=١}^{م}$ ب ر = ١ + ٠,٨ + ... = ٥ ....(١٣-٩) $\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i\right) = 5$

ويمكن توضيح طريقة اشتقاق المضاعف طويل الأجل كما يلي :

نفترض أن تأثير المتغير التفسيري يتضائل مع مرور الزمن حتى يقترب من الصفر في فترة زمنية ما . ومن ثم فإن الوزن الذي يجب أن نعطيه لهذا التأثير يتعين أن يتناقص مع مرور الزمن هو الآخر . فإذا حددنا الوزن λ لتأثير المتغير التفسيري ابتداءً من الفترة الثانية حيث صفر < λ < ١ ، فمن الممكن اشتقاق الأوزان المعطاة لتأثير نفس المتغير في الفترات المتتالية كما يلي في الجدول (١٣-٢) .

جدول (١٣-٢)

أوزان تأثير المتغير التفسيري

الفترة (١)	وزن التأثير (٢)	التأثير مرجح بالوزن (٣)
١	١	ب ١ (١) = بَ ١
٢	λ	ب ١ λ = ب ٢
٣	$\lambda^{٢}$	ب ١ $\lambda^{٢}$ = ب ٣
٤	$\lambda^{٣}$	ب ١ $\lambda^{٣}$ = ب ٤
.	.	.
.	.	.

ويلاحظ هنا أن ١ > λ > $\lambda^{٢}$ > $\lambda^{٣}$ > $\lambda^{٤}$ > $\lambda^{٥}$ > .... أي أن الأوزان متناقصة . ومن ثم فإن التأثيرات المرجحة بالأوزان تصبح كما هي موضحة بالعمود (٣) بالجدول (١٣-٢) ، وذلك مع الأخذ في الاعتبار أن الوزن المعطى لتأثير المتغير التفسيري بالفترة الأولى = ١ ، وأن الأوزان هنا مطلقة وليست نسبية ولذا فإن مجموعها لا يساوى واحد .

ومن المعادلة (١٣-٩) يتضح لنا أن مضاعف الودائع طويل الأجل (ف) يساوى :

$$ف = ب_١ + ب_٢ + ب_٣ + \ldots \qquad (١٣-١٠)$$

وبالتعويض من العمود (٣) بالجدول (١٣-١٢) عن قيم المعلمات المشار إليها في المعادلة (١٣-١٠) نحصل على :

$$ف = ب_١ + \lambda ب_١ + \lambda^٢ ب_١ + \lambda^٣ ب_١ + \ldots \qquad (١٣-١١-أ)$$

$$ف = ب_١ (١ + \lambda + \lambda^٢ + \lambda^٣ + \ldots) \qquad (١٣-١١-ب)$$

وبالحصول على مجموع الأوزان من العمود (٢) بالجدول (١٣-٢) نحصل على :

$$ج = ١ + \lambda + \lambda^٢ + \lambda^٣ + \ldots \qquad (١٣-١٢)$$

وبضرب المعادلة (١٣-١٢) في λ نحصل على :

$$\lambda ج = \lambda + \lambda^٢ + \lambda^٣ + \lambda^٤ + \ldots \qquad (١٣-١٣)$$

وبطرح المعادلة (١٣-١٣) من المعادلة (١٣-١٢) نحصل على :

$$ج - \lambda ج = ١$$

$$\therefore ج (١ - \lambda) = ١$$

$$\therefore ج = \frac{١}{١ - \lambda} \qquad (١٣-١٤)$$

وبالتعويض من (١٣-١٢) في المعادلة (١٣-١١-ب) نحصل على :

$$ف = ب_١ ج \qquad (١٣-١٥)$$

وبالتعويض من (١٣-١٤) في (١٣-١٥) نحصل على :

$$ف = \frac{ب_١}{١ - \lambda} = \text{المضاعف طويل الأجل} \qquad (١٣-١٦)$$

$$M = \frac{\beta_1}{1-\lambda}$$

ومن الجدول (١٣-٣) يتضح لنا أن ب , = ١ . وبافتراض أن الوزنُ (λ) الذي يعطي لكل جنيه وديعة أصلية يتحدد على أساس مقدار الوديعة المشتقة التي يمكنه أن يولدها فإن :

λ = ١ - ق ، حيث : ق = نسبة الاحتياطي النقدي ، ١ - ق = مقدار الوديعة المشتقة من كل جنيه وديعة أصلية بالفترة الثانية .

∴ λ = ١ - ٠,٢ = ٠,٨

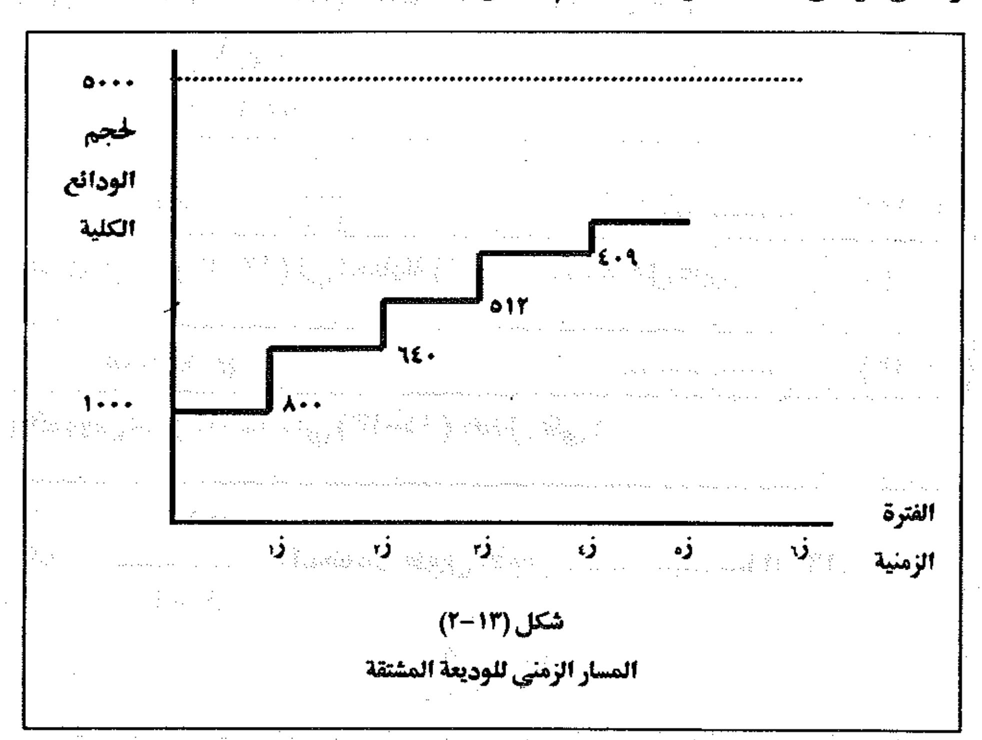
وبالتعويض عن قيمة ب , = ١ ، λ = ٠,٨ في المعادلة (١٣-١٦) نحصل على :

$$ف = \frac{١}{١ - ٠,٨} = \frac{١}{٠,٢} = ٥$$

∴ الحجم الكلى للودائع = الوديعة الأصلية × المضاعف طويل الأجل

= ١٠٠٠ × ٥ = ٥٠٠٠

ويمكن توضيح هذه الفكرة باستخدام الشكل (١٣-٢) .



شكل (١٣-٢)

المسار الزمني للوديعة المشتقة

(٣) نموذج التضخم :

يلاحظ عموماً أن زيادة كمية النقود لا تؤدى لارتفاع المستوى العام للأسعار بصورة مباشرة وفورية وإنما تمارس تأثيرها خلال فترة زمنية طويلة نسبياً . ولذلك يتم التعبير عن العلاقة بينهما باستخدام الصيغة التالية :ـ

ث ز = أ + ب ١ ك ز + ب ٢ ك ز-١ + ب ٣ ك ز-٢ +ب ٤ جـ ز + ى ز .... (١٣-١٧)

$$P_t = \alpha + \beta_1 M_t + \beta_2 M_{t-1} + \beta_3 M_{t-2} + \beta_4 W_t + u_t$$

ث ز = الرقم القياسي للأسعار (P_t)

ك ز = كمية النقود (M_t)

جـ ز = الرقم القياسي للأجور (W_t)

ومن الممكن أن نلخص أهم العوامل التي تؤدى لوجود فجوات زمنية في مجال العلاقات الاقتصادية بوجه عام فيما يلي :

(أ) عوامل سيكولوجية : فالفرد كثيراً ما يتعود على نمط من السلوك دون أن يكون على استعداد للتخلي عن هذا السلوك بصورة فجائية لمجرد تغير الأسعار أو الدخول . فلابد أن تمر هناك فترة حتى يتأكد أن هذا التغير الذي حدث هو تغير دائم وليس تغير مؤقت سرعان ما يزول . فإذا تأكد له أن التغير في الأسعار أو الدخول أو غيرها هو تغير دائم فإنه يبدأ في تغيير سلوكه أو عاداته الاستهلاكية بصورة تدريجية عبر فترة زمنية طويلة نسبياً .

(ب) عوامل تكنولوجية : عند حدوث تغيرات في الأسعار النسبية لعوامل الإنتاج كارتفاع الأجور وانخفاض أسعار رأس المال فإنه ليس من المتوقع أن يقوم رجال الأعمال بإحلال فنون إنتاجية كثيفة رأس المال محل الفنون كثيفة العمل بصورة فورية . فقد لا يوجد هناك فنون كثيفة رأس المال جاهزة يمكن إحلالها محل الفنون كثيفة العمل المستخدمة ، وقد يحتاج الأمر للانتظار حتى تنجح جهود البحث والتطوير في التوصل إلى الاختراعات والتجديدات المطلوبة . وحتى إذا كانت الفنون

المطلوبة جاهزة فإن إحلالها محل الفنون المستخدمة يستغرق وقتاً طويلاً نسبياً ، حيث قد يحتاج لإجراء تعديلات في المباني أو إجراء تدريبات بين الكوادر الفنية والإدارية .

(جـ) عوامل قانونية : كثيراً ما يدخل رجال الأعمال في تعاقدات طويلة الأجل نسبياً مع موردين لبعض المواد أو مع مشترين لبعض المنتجات ، ومن ثم فإن حدوث تغيرات في الأسعار قد لا تحفزهم على إحداث تغييرات فورية في طلبهم على المواد أو في عرضهم للمنتجات وذلك لارتباطهم بتعاقدات قانونية معينة .

المبحث الثاني

طرق تقدير النماذج ذات الفجوة الزمنية

من الممكن أن نفرق بين نوعين من الطرق :

١ - طرق تقدير النماذج ذات الفجوات الموزعة Distributed - Lag Models

٢ - طرق تقدير نماذج الانحدار الذاتي Autoregressive Models

(١٣-٢-١) طرق تقدير النماذج ذات الفجوات الموزعة :

افترض أن لدينا نموذجاً يأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ص}_{\text{ز}} = \text{أ} + \text{ب}_{١}\,\text{س}_{\text{ز}} + \text{ب}_{٢}\,\text{س}_{\text{ز}-١} + \text{ب}_{٣}\,\text{س}_{\text{ز}-٢} + \dots + \text{ع}_{\text{ز}} \quad .... (١٣-١٨)$$

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + ... + u_t$$

حيث : $\text{س}_{\text{ز}}$ متغير خارجي (X_t) . ومن ثم يصبح من الممكن تقدير معلمات هذا النموذج باستخدام الطرق التالية :

(١) طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)

(٢) طريقة الأوزان التحكمية Arbitrary Weights Method

(٣) طريقة ألمون Almon Scheme

(١) طريقة المربعات الصغرى العادية

من المشاكل التي تواجهنا عند تقدير نموذج مثل النموذج (١٣-١٨) عدم توافر معيار موضوعي لتحديد عدد الفترات الزمنية التي يمتد خلالها تأثير المتغير الخارجي . وللتغلب على هذه المشكلة اقترح كل من آلت Alt وتنبرجن Tinbergen أن نقوم باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير عدد من الصيغ المختلفة التي تختلف في عدد الفترات الزمنية التي تتضمنها وذلك على النحو التالي :

$$ص_{ز} = أ + ب\, س_{ز} + ع_{ز} \quad .... (١٣-١٩)$$

$$ص_{ز} = أ + ب_{١}\, س_{ز} + ب_{٢}\, س_{ز-١} + ع_{ز} \quad .... (١٣-٢٠)$$

$$ص_{ز} = أ + ب_{١}\, س_{ز} + ب_{٢}\, س_{ز-١} + ب_{٣}\, س_{ز-٢} + ع_{ز} \quad .... (١٣-٢١)$$

ونستمر هكذا في إضافة متغيرات جديدة على أن نتوقف عن إضافة متغيرات ذات فجوة زمنية أبعد عندما تصبح المعلمة المقدرة للمتغير الذي تمت إضافته غير معنوية إحصائياً ، أو عندما تتغير إشارة هذه المعلمة من موجبة إلى سالبة أو العكس .

فإذا كان لدينا بيانات عن الاستهلاك ($ص_{ز}$) والدخل ($س_{ز}$) عبر فترة زمنية طولها ١٢ سنة ، فمن الممكن استخدامها في تقدير النماذج من (١٣-١٩) .. (١٣-٢١) على النحو الذي يتضح بالجدول (١٣-٣) ، حيث يتم استخدام العمودين (١) ، (٢) في تقدير المعادلة (١٣-١٩) من خلال ١٢ مشاهدة . كما يتم استخدام الأعمدة (١) ، (٢) ، (٣) في تقدير المعادلة (١٣-٢٠) من خلال ١١ مشاهدة فقط ابتداءً من السنة الثانية ، ويتم استخدام الأعمدة (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) في تقدير المعادلة (١٣-٢١) من خلال ١٠ مشاهدات فقط ابتداءً من السنة الثالثة .

ومن أهم الانتقادات التي تتعرض لها طريقة المربعات الصغرى العادية في هذا الصدد ما يلي :

(١) كلما زاد عدد الفترات الزمنية التي يتضمنها النموذج كلما قلت درجات الحرية ، الأمر الذي يقلل من معنوية المعلمات المقدرة ككل .

(٢) لا يوجد هناك معيار موضوعي يساعدنا في تحديد عدد الفترات الزمنية التي يتعين أن يحتوى عليها النموذج ، ومن ثم فإن الاقتصار على عدد معين يعتبر في كثير من الحالات أمراً تحكمياً .

(٣) نظراً لاستخدام القيم السابقة للمتغير التفسيري الواحد كمتغيرات تفسيرية فإن هذا يؤدى لوجود مشكلة الامتداد الخطى المتعدد والتي يترتب عليها كبر حجم الأخطاء المعيارية وانخفاض معنوية المعلمات المقدرة بدرجة كبيرة .

جدول (١٣-٣)

بيانات الدخل و الاستهلاك عبر فترة ١٢ سنة

السنة ز	الاستهلاك (ص ز) (١)	الدخل (س ز) (٢)	دخل الفترة السابقة (س ز-١) (٣)	دخل الفترة قبل السابقة (س ز-٢) (٤)
١	٨	١٠	-	-
٢	١١	١٥	١٠	-
٣	١٥	٢٠	١٥	١٠
٤	٢٠	٣٥	٢٠	١٥
٥	٢٥	٤٠	٣٥	٢٠
٦	٣٥	٤٥	٤٠	٣٥
٧	٤٥	٥٠	٤٥	٤٠
٨	٤٨	٥٥	٥٠	٤٥
٩	٥٠	٦٠	٥٥	٥٠
١٠	٥٥	٦٥	٦٠	٥٥
١١	٦٠	٧٠	٦٥	٦٠
١٢	٦٥	٧٥	٧٠	٦٥

(٢) طريقة الأوزان التحكمية

تهدف هذه الطريقة إلى تقليل عدد المعلمات المقدرة من العينة حتى نحافظ على درجات الحرية دون انخفاض بدرجة كبيرة ، مع الأخذ في الاعتبار أثر المتغير التفسيري الممتد عبر فترات زمنية طويلة . ويتم ذلك عن طريق استحداث متغير مركب واحد يمثل المتغير التفسيري ذات الفجوة في جميع الفترات الزمنية مع إعطاء وزناً معيناً بطريقة تحكمية لتأثير كل فترة . فإذا افترضنا أن العلاقة المراد تقديرها تأخذ الصيغة التالية :

$$ص_{ز} = أ + ب_{١} س_{ز} + ب_{٢} س_{ز-١} + ب_{٣} س_{ز-٢} + ع_{ز} \quad .... \quad (١٣-٢٢)$$

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + u_t$$

فإن طريقة الأوزان التحكمية تستحدث متغيراً مركباً س يكون بمثابة متوسط مرجح للمتغيرات س ز ، س ز-١ ، س ز-٢، ومن ثم تصبح العلاقة التي يراد تقديرها كما يلي :

ص ز = أ + ب س + ع ز	.... (١٣-٢٣)
$Y_t = \alpha + \beta X + u_t$	

أما عن كيفية اشتقاق المتغير المركب س من المتغيرات ذات الفجوة ، فإن هذا يتوقف على الوزن الذي يعطيه الباحث لكل فترة . ويوجد في هذا الصدد ثلاث احتمالات ممكنة :

أ – إعطاء أوزان متناقصة :

ويفترض هنا أن المتغير التفسيري المعين يضعف تأثيره مع مرور الزمن ، ولذلك يتم إعطاء وزن أقل لكل فترة تالية . ومن ثم فإن المتغير المركب س ١ يمكن حساب كما يلي :

س ١ = و ١ س ز + و ٢ س ز-١ + و ٣ س ز-٢	.... (١٣-٢٤)
$X_1 = W_1 X_t + W_2 X_{t-1} + W_3 X_{t-2}$	

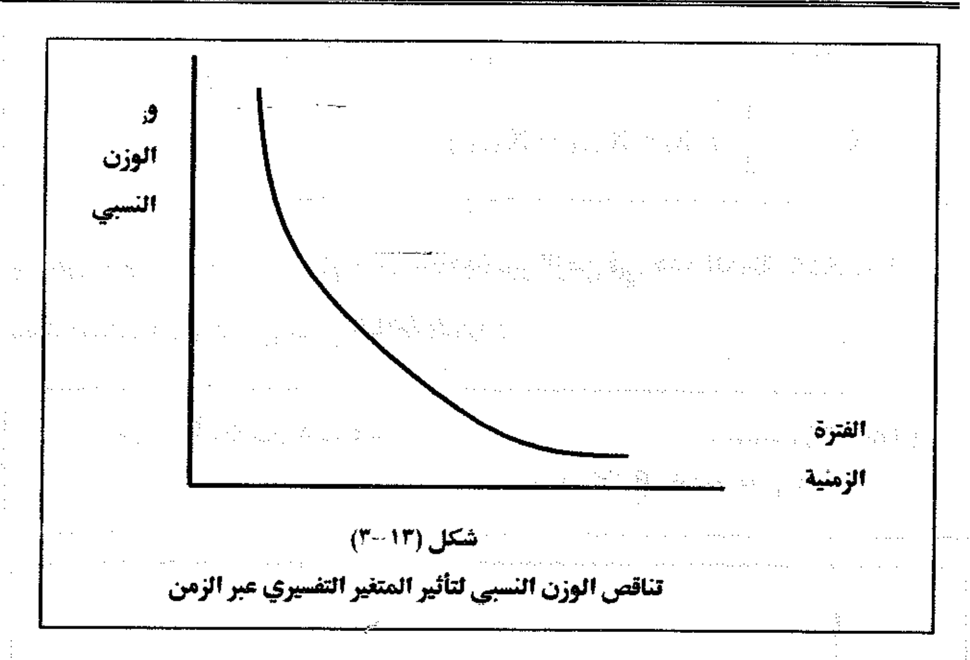
حيث و ١ > و ٢ > و ٣ ، وتشير "و ر" (W_i) إلى الوزن المعطى للمتغير ذات الفجوة بطريقة تحكمية . ومن الأمثلة على ذلك افتراض أن :

$$و_1 = \frac{١}{٢} \quad ، \quad و_2 = \frac{١}{٤} \quad ، \quad و_3 = \frac{١}{٨}$$

وبالتالي يصبح المتغير المركب كما يلي :

$س_1 = \frac{١}{٢} س_ز + \frac{١}{٤} س_{ز-1} + \frac{١}{٨} س_{ز-2}$	.... (١٣-٢٥)

ويمكن تمثيل تأثير المتغير التفسيري ذات الفجوة عبر الزمن في هذه الحالة بالشكل (١٣-٣) .



شكل (١٣-٣)
تناقص الوزن النسبي لتأثير المتغير التفسيري عبر الزمن

ويمكن استخدام بيانات الجدول (١٣-٣) في اشتقاق قيم المتغير س، عند المشاهدات المختلفة باستخدام الصيغة (١٣-٢٥) ، ثم تقدير العلاقة (١٣-٢٣) باستخدام البيانات المتوفرة عن كل من ص ز ، س، من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية . وتمثل المعلمة ب، (β_1) في هذه الحالة المضاعف طويل الأجل ، وتصبح العلاقة المقدرة على النحو التالي :

ص ز = أ ، + ب، س، + ع ز .... (١٣-٢٦)

$$Y_t = \alpha_1 + \beta_1 X_1 + u_t$$

ب – إعطاء أوزان ثابتة :

ويفترض في هذه الحالة أن المتغير التفسيري ذات الفجوة يبقى تأثيره ثابتاً عبر الزمن . ومن الأمثلة على ذلك افتراض أن :

و ، = و ٢ = و ٣ = $\frac{١}{٣}$ ومن ثم يمكن حساب المتغير المركب س٢ كما يلي :

$$س_٢ = \frac{١}{٣} (س_ز + س_{ز-١} + س_{ز-٢}) \quad .... (١٣-٢٧)$$

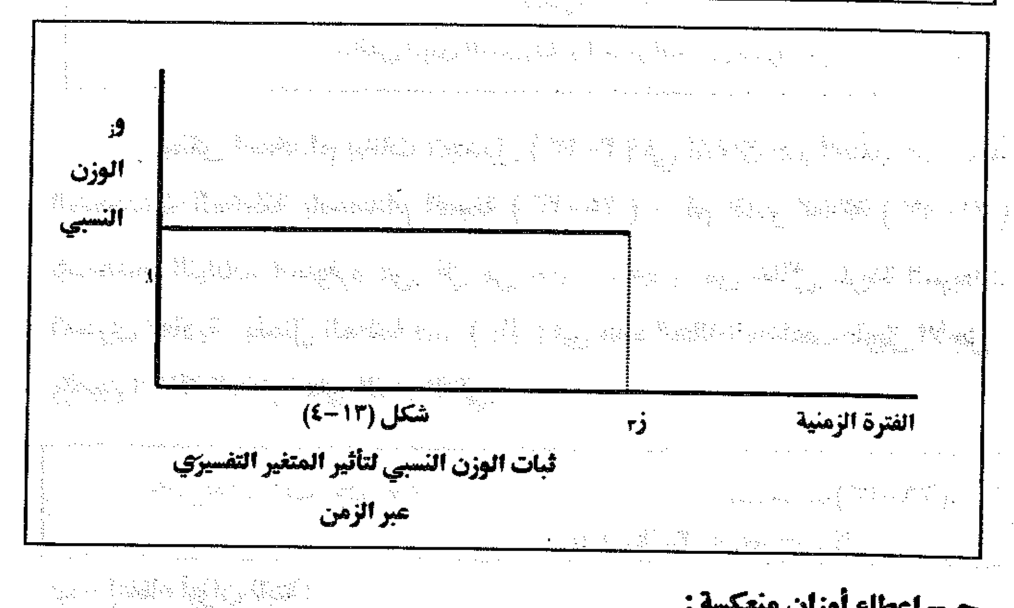
$$X_2 = \frac{1}{3} (X_t + X_{t-1} + X_{t-2})$$

ويمكن تمثيل المتغير التفسيري ذات الفجوة عبر الزمن في هذه الحالة بالشكل (١٣-٤):

وبعد حساب س ٢ يمكن تقدير العلاقة التالية :

$$ص_ز = أ_٢ + ب_٢ س_٢ + ع_ز \quad .... (١٣-٢٨)$$

$$Y_t = \alpha_2' + \beta_2 X_2 + u_t$$



شكل (١٣-٤)
ثبات الوزن النسبي لتأثير المتغير التفسيري عبر الزمن

جـ - إعطاء أوزان منعكسة :

ويفترض في هذه الحالة أن المتغير التفسيري ذات الفجوة يتزايد تأثيره في المراحل الأولى ثم يصل لحد أقصى معين ثم يتناقص بعد ذلك أو العكس . ويحدث هذا في مجال العلاقات الاقتصادية خلال الدورات الاقتصادية كدورات الرواج والكساد. ومن الأمثلة على ذلك افتراض أن :

$و_1 = \frac{1}{3}$ ، $و_2 = \frac{1}{2}$ ، $و_3 = \frac{1}{4}$ ومن ثم يمكن حساب المتغير المركب $س_3$ على النحو التالي :

$$س_3 = \frac{1}{3} س_ز + \frac{1}{2} س_{ز-1} + \frac{1}{4} س_{ز-2} \quad .... (13-29)$$

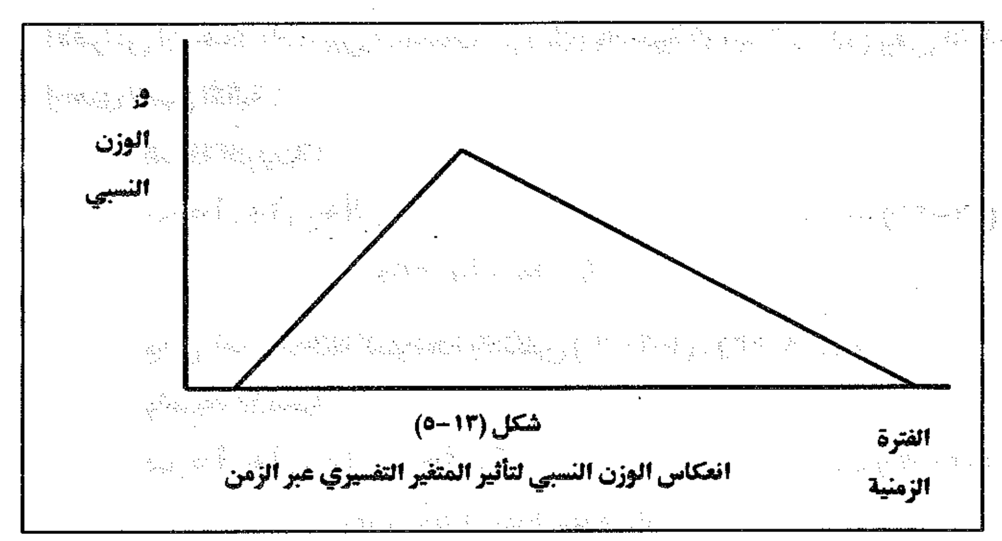
$$X_3 = \frac{1}{3}X_t + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2}$$

وباستخدام البيانات المتعلقة بالمتغير المركب $س_3$ ، والمتغير التابع $ص_ز$ يمكن تقدير العلاقة التالية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية :

$$ص_ز = أ_3 + ب_3 س_3 + ع_ز \quad .... (13-30)$$

$$Y_t = \alpha_3 + \beta_3 X_3 + u_t$$

ويمكن تمثيل أثر المتغير التفسيري ذات الفجوة عبر الزمن في حالة الأوزان المنعكسة من خلال الشكل (١٣ –٥).



شكل (١٣–٥)

انعكاس الوزن النسبي لتأثير المتغير التفسيري عبر الزمن

ويمكن الاختيار بين العلاقات المقدرة الثلاثة (١٣–٢٦) ، (١٣–٢٨) ، (١٣–٣٠) باستخدام المعايير الإحصائية المتمثلة في معامل التحديد $ر^2$ ، والأخطاء المعيارية وكذلك المعايير الاقتصادية .

ولكن يلاحظ أن طريقة الأوزان التحكمية هي طريقة لا تعتمد على معايير موضوعية في تحديدها للأوزان المختلفة وإنما تعتمد بدرجة كبيرة على تقدير الباحث .

(٣) طريقة ألمون Almon Scheme

سميت هذه الطريقة باسم مؤلفتها شيرلى ألمون Shirley Almon . وتفترض هذه الطريقة أن تأثير المتغير التفسيري ذات الفجوة يأخذ شكل غير خطى عبر الزمن . ففي علاقة تأخذ الصيغة التالية :

ص ز = ب + ب. س ز + ب ١ س ز-١ + ب ٢ س ز-٢ +ع ز .... (١٣-٣١)

$$Y_t = \beta + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + u_t$$

نجد أن "ب ر " يشير إلى تأثير المتغير التفسيري ذات الفجوة عبر الزمن ، ومن ثم تفترض طريقة ألمون أن سلوك ب ر (β_i) عبر الزمن يمكن وصفه بأحد الأشكال الثلاثة : (١٣-٦-أ) أو (١٣-٦-ب) أو (١٣-٦-جـ) أو ما شابهها . ومن ثم نجد وفقاً لهذا الافتراض أن هناك علاقة بين المعلمات ب ر (β_i) والفجوة الزمنية " ر " (i) وهى تأخذ إحدى الصيغ التالية :

الصيغة التربيعية :

ب ر = أ. + أ ١ ر + أ ٢ ر ٢ .... (١٣-٣٢)

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_{1i} + \alpha_{2i}^2$$

وهي تصف العلاقة الموضحة بالشكلين (١٣-٦-أ) ، (١٣-٦-ب) .

والصيغة التكعيبية :

ب ر = أ. + أ ١ ر + أ ٢ ر ٢ + أ ٣ ر ٣ .... (١٣-٣٣)

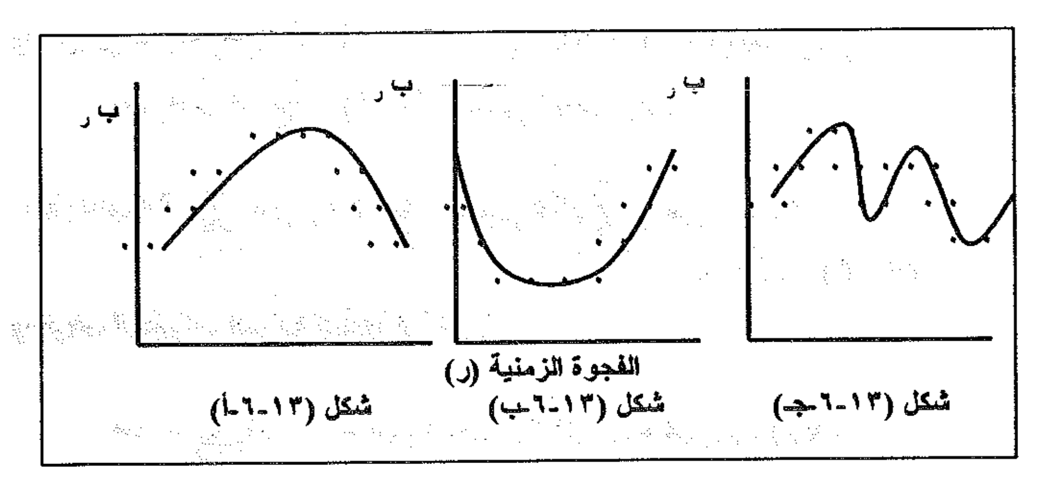
$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_{1i} + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2$$

وهي تصف العلاقة الموضحة بالشكل (١٣-٦-جـ) .

والصيغة العامة :

ب ر = أ . + أ ، ر + أ٢ ر ٢ + ... + أم ر م .... (١٣-٣٤)

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_{1i} + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 + \ldots\ldots\ldots \ldots + \alpha_{mi}^m$$



شكل (١٣-٦-أ) شكل (١٣-٦-ب) شكل (١٣-٦-جـ)

حيث تشير "م" (m) لدرجة العلاقة بين ب ر (β_i) و الفجوة الزمنية ر (i) . ويلاحظ هنا أن القوة "م" (m) التي تمثل درجة العلاقة بين ب ر (β_i) والفجوة الزمنية " ر " i يتعين أن تكون أقل من أقصى قيمة لـ ر (i) التي تمثل متغير الفجوة الزمنية .

وبافتراض أن عدد الفجوات الزمنية بالنموذج (ت) (K) = ٣ ، وأن درجة العلاقة بين ب ر ، ر (β_i) (i) التي نرمز لها (م) (m) = ٢ ، فإن المعادلة التي يراد تقديرها تأخذ الصيغة التالية :

ص ز = ب + ب. س ز + ب ١ س ز-١ + ب ٢ س ز-٢ + ب ٣ س ز-٣ + ع ز .. (١٣-٣٥)

$$Y_t = \beta + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + u_t$$

كما أن تأثير المتغير التفسيري عبر الزمن يمكن وصفه بالمعادلة (١٣-٣٢) . ويلاحظ في هذا الصدد أنه من الممكن كتابة المعادلة (١٣-٣٥) على النحو التالي :

$$\text{ص}_{\text{ز}} = \text{ب} + \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ت}} \text{ب}_{\text{ر}} \, \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} + \text{ع}_{\text{ز}} \quad \text{..........} \, (١٣-٣٦)$$

$$Y_t = \beta + \sum_{i=0}^{K} \beta_i X_{t-i} + u_t$$

وبالتعويض عن $\text{ب}_{\text{ر}}$ من المعادلة (١٣-٣٢) في المعادلة (١٣-٣٦) نحصل على :

$$\text{ص}_{\text{ز}} = \text{ب} + \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ت}} (\text{أ}_٠ + \text{أ}_١ \text{ر} + \text{أ}_٢ \text{ر}^٢) \, \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} + \text{ع}_{\text{ز}}$$

$$\text{ص}_{\text{ز}} = \text{ب} + \text{أ}_٠ \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ت}} \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} + \text{أ}_١ \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ت}} \text{ر} \, \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} + \text{أ}_٢ \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ت}} \text{ر}^٢ \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} + \text{ع}_{\text{ز}} \quad \text{..........} \, (١٣-٣٧)$$

وبتعريف المتغيرات المركبة السابقة كما يلي :

$$\text{س}_٠ = \sum_{\text{ر}=٠}^{٣} \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} = \text{س}_{\text{ز}} + \text{س}_{\text{ز}-١} + \text{س}_{\text{ز}-٢} + \text{س}_{\text{ز}-٣} = (X_0)$$

$$\text{س}_١ = \sum_{\text{ر}=٠}^{٣} \text{ر} \, \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} = \text{س}_{\text{ز}-١} + ٢ \, \text{س}_{\text{ز}-٢} + ٣ \, \text{س}_{\text{ز}-٣} = (X_1) \quad \text{..} \, (١٣-٣٨)$$

$$\text{س}_٢ = \sum_{\text{ر}=٠}^{٣} \text{ر}^٢ \text{س}_{\text{ز}-\text{ر}} = \text{س}_{\text{ز}-١} + ٤ \, \text{س}_{\text{ز}-٢} + ٩ \, \text{س}_{\text{ز}-٣} = (X_2)$$

يمكن إعادة صياغة المعادلة (١٣-٣٧) على النحو التالي:

$$\text{ص}_{\text{ز}} = \text{ب} + \text{أ}_٠ \text{س}_٠ + \text{أ}_١ \text{س}_١ + \text{أ}_٢ \text{س}_٢ + \text{ع}_{\text{ز}} \quad \text{..........} \, (١٣-٣٩)$$

$$Y_t = \beta + \alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + u_t$$

وبتقدير المعادلة (١٣-٣٩) نحصل على المعلمات : ب ، $\text{أ}_٠$ ، $\text{أ}_١$ ، $\text{أ}_٢$. ولكن يتعين مراعاة أن هذه المعلمات المقدرة ليست هي معلمات المعادلة الأصلية (١٣-٣٥). غير أنه من الممكن الوصول لمعلمات المعادلة الأصلية باستخدام الصيغة (١٣-٣٢) كما يلي :

$$\hat{\text{ب}}_{.} = \hat{\text{أ}}_{.} + ٠\,\hat{\text{أ}}_{١} + ٠\,\hat{\text{أ}}_{٢} = \hat{\text{أ}}_{.} \qquad \hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0$$

$$\hat{\text{ب}}_{١} = \hat{\text{أ}}_{.} + ١\,\hat{\text{أ}}_{١} + ١\,\hat{\text{أ}}_{٢} = \hat{\text{أ}}_{.} + \hat{\text{أ}}_{١} + \hat{\text{أ}}_{٢} \qquad \hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \qquad \text{.............(١٣-٤٠)}$$

$$\hat{\text{ب}}_{٢} = \hat{\text{أ}}_{.} + ٢\,\hat{\text{أ}}_{١} + (٢)^{٢}\,\hat{\text{أ}}_{٢} = \hat{\text{أ}}_{.} + ٢\,\hat{\text{أ}}_{١} + ٤\,\hat{\text{أ}}_{٢} \qquad \hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_0 + 2\hat{\alpha}_1 + 4\hat{\alpha}_2$$

$$\hat{\text{ب}}_{٣} = \hat{\text{أ}}_{.} + ٣\,\hat{\text{أ}}_{١} + (٣)^{٢}\,\hat{\text{أ}}_{٢} = \hat{\text{أ}}_{.} + ٣\,\hat{\text{أ}}_{١} + ٩\,\hat{\text{أ}}_{٢} \qquad \hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_0 + 3\hat{\alpha}_1 + 9\hat{\alpha}_2$$

ويلاحظ عموماً على طريقة ألمون ما يلي :

(١) أنها خفضت عدد المعلمات المراد تقديرها من خمسة معلمات بالمعادلة الأصلية (١٣-٣٥) ب ، ب . ، ب ١ ، ب ٢ ، ب ٣ ، إلى أربعة معلمات بالمعادلة (١٣-٣٩) وهي ب، أ . ، أ ١ ، أ ٢ . ومن ثم فإنها قللت العمليات الحسابية وعملت على الحد من تقليل درجات الحرية .

(٢) أنها استخدمت متغيرات مركبة ممثلة في س . ، س ١ ، س ٢ ، بدلاً من المتغيرات الأصلية س ز ، س ز-١ ، س ز-٢ ، س ز-٣ وإن كانت هذه المتغيرات المركبة مشتقة من المتغيرات الأصلية كما هو موضح بالنسق (١٣-٣٨) . ويلاحظ في هذا الصدد أن المتغير المركب س . تم اشتقاقه على أساس إعطاء أوزان ثابتة لجميع المتغيرات التفسيرية س ز ، س ز-١ ، .... ، س ز-ر والوزن المعطى هنا هو ١ . كما أن المتغير المركب س ١ تم اشتقاقه على أساس إعطاء أوزان متزايدة للمتغير التفسيري ذو الفجوة عبر الزمن كما يتضح من الجدول (١٣-٤) وكذلك الأمر بالنسبة للمتغير المركب س ٢ .

(٣) يوجد عدد من المتغيرات المركبة في طريقة ألمون يساوى دائماً (م + ١) ($m + 1$) أي يساوى درجة العلاقة التي يفترضها الباحث بالنسبة للمعلمات عبر الزمن مضافاً إليها واحد . وفي حالتنا هذه نجد أن م = ٢ ولذا فإن عدد المتغيرات المركبة = ٣.

جدول (١٣-٤)

الأوزان المختلفة للمتغير التفسيري ذو الفجوة في طريقة ألمون

المتغير الأصلي / المتغير المركب	س ز	س ز-١	س ز-٢	س ز-٣
س .	١	١	١	١
س ١	٠	١	٢	٣
س ٢	٠	١	$(٢)^٢$	$(٣)^٢$
.				
.				
.				
س ن	٠	١	$(٢)^ن$	$(٣)^ن$

(٤) حتى يمكن استخدام طريقة ألمون لابد من تحديد عدد الفجوات الزمنية ر (i) ودرجة العلاقة م (m) بطريقة تحكمية ترجع لتقدير الباحث . وهذه من أهم الانتقادات التي توجه لهذه الطريقة .

(٥) يمكن أن نختار بين درجات العلاقة المختلفة م = ٢ أو م = ٣ على أساس معايير إحصائية . فإذا افترضنا أن م = ٣ ، فإن الدالة المراد تقديرها تصبح :

$$ص_ز = ب + أ_. س_. + أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + أ_٣ س_٣ + ى_ز$$

وباستخدام الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة $\hat{أ}_.$ ، $\hat{أ}_١$ ، $\hat{أ}_٢$ ، $\hat{أ}_٣$ ، إذا اتضح أن $أ_٣$ غير معنوية إحصائياً فإننا نختار الحالة التي نفترض فيها أن م = ٢ .

(٦) يوجد هناك فرصة كبيرة لوجود مشكلة الامتداد الخطى المتعدد في حالة استخدام طريقة ألمون ، وذلك لأن المتغيرات المركبة $س_.$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، تم اشتقاقها من نفس مجموعة المتغيرات الأصلية $س_ز$ ، $س_{ز-١}$ ، $س_{ز-٢}$ ، $س_{ز-٣}$.

ويترتب على هذه المشكلة وجود بعض المعلمات المقدرة غير المعنوية إحصائياً. وإن كان يتعين مراعاة أنه في بعض الحالات قد تكون المعلمات المقدرة للمتغيرات المركبة س ٠ ، س ١ ، س ٢ غير معنوية إحصائياً دون أن يعني ذلك بالضرورة أن المعلمات المقدرة للمتغيرات الأصلية غير معنوية إحصائياً .

ويمكن توضيح كيفية اشتقاق المتغيرات المركبة من المثال (١٣–١) الموضح بالجدول (١٣–٥) .

مثال (١٣–١)

كيفية اشتقاق المتغيرات المركبة

افترض أن ص تشير إلى المخزون من منتج معين لدى قطاع صناعي معين ، وأن س تشير إلى حجم المبيعات وكليهما يقاس بقيمته (مليون دولار) .

جدول (١٣–٥)

السنة	المخزون (١) ص ز	المبيعات (٢) س ز	(٣) س ز-١	(٤) س ز-٢	(٥) س ز-٣	(٦) س ٠	(٧) س ١	(٨) س ٢
١	٢	١٠	–	–	–	–	–	–
٢	٣	١٢	١٠	–	–	–	–	–
٣	٥	١٤	١٢	١٠	–	–	–	–
٤	٥	١٥	١٤	١٢	١٠	٥١	٦٨	١٥٣
٥	٤	١٦	١٥	١٤	١٢	٥٧	٧٩	١٧٩
٦	٦	١٨	١٦	١٥	١٤	٦٣	٨٨	٢٠٣
٧	٦	٢٠	١٨	١٦	١٥	٦٩	٩٥	٢١٧
٨	٧	٢٥	٢٠	١٨	١٦	٧٩	١٠٤	٢٣٦
٩	٨	٢٥	٢٥	٢٠	١٨	٨٨	١١٩	٢٦٧
١٠	٩	٣٠	٢٥	٢٥	٢٠	١٠٠	١٣٥	٣٠٥
١١	١٠	٣٢	٣٠	٢٥	٢٥	١١٢	١٥٥	٣٥٥
١٢	١٥	٣٥	٣٢	٣٠	٢٥	١٢٢	١٦٧	٣٧٧

وباستخدام النسق (١٣-٣٨) يمكن اشتقاق المتغيرات المركبة الموضحة بالأعمدة (٦) ، (٧) ، (٨) . ومن ثم يمكن تقدير المعادلة (١٣-٣٩-) باستخدام الأعمدة (١) ، (٦) ، (٧) ، (٨) من خلال ٩ مشاهدات فقط بالجدول (١٣-٥) .

(١٣-٢-٢) طرق تقدير نماذج الانحدار الذاتي Autoregrssive Models

لعله من المفيد أن نركز في هذا القسم على نقطتين أساسيتين ، أولهما أنواع نماذج الانحدار الذاتي ، وثانيهما طرق تقدير هذه الأنواع من النماذج .

أولاً – أنواع نماذج الانحدار الذاتي .

يمكن التفرقة بين ثلاثة أنواع من نماذج الانحدار الذاتي :

(أ) نموذج كويك — Koyck's Scheme

(ب) نموذج التوقعات المتوافقة — Adaptive Expectation

(جـ) نموذج التعديل الجزئي — Partial Adjustment Model

(أ) نموذج كويك Koyck's Scheme

افترض أن النموذج الأصلي المراد تقديره هو نموذج ذو عدد لانهائي من الفجوات الموزعة ويأخذ الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب. س ز + ب ١ س ز-١ + ب ٢ س ز-٢ +....... +ع ز ...(١٣-٤١)

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots\ldots + u_t$$

ولتقدير هذا النموذج افترض كويك أن معلمات النموذج كلها ذات إشارة واحدة ، وأن تأثير المتغير التفسيري ذو الفجوة يتناقص عبر الزمن . أي أن القيم المطلقة للمعلمات تتناقص عبر الزمن بحيث تكون أكبر في السنوات الأحدث وأقل في السنوات الأبعد . ومن ثم فإن ب. > ب ١ > ب ٢ > ب ٣ .... > ب ت حيث ت (K) = عدد الفجوات الزمنية. ولقد لخص كويك هذا بافتراضه أن السلوك الزمني للمعلمات يمكن وصفه من خلال المعادلة التالية :

ب ر = ب. م ر .... (١٣-٤٢)

$$\beta_i = \beta_0 \lambda^i$$

حيث :

ب ر = معلمة المتغير التفسيري ذو الفجوة ر (β_i)

ب . = معلمة المتغير التفسيري في سنة الأساس (الأولى) (β_0)

ر = رقم الفجوة الزمنية (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ....) (i)

م = معدل التناقص ، مع ملاحظة أن صفر < م < ١ (λ)

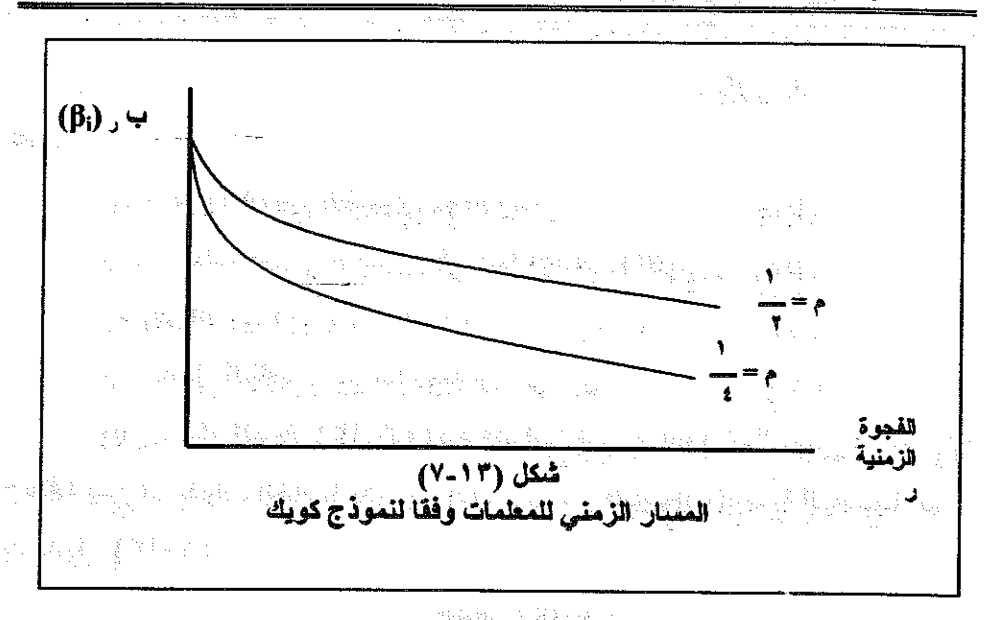
وباستخدام الصيغة (١٣-٤٢) مع افتراض قيم مختلفة لـ "م" يمكن أن نوضح العلاقة بين المعلمات الخاصة بالمتغير التفسيري عبر الفجوات الزمنية المختلفة كما بالجدول (١٣-٦) .

جدول (١٣-٦)

قيم المعلمات عند مستويات مختلفة لمعدل التناقص م

الفجوة	المعلمة	قيمة المعلمة بافتراض م (λ) = ½	قيمة المعلمة بافتراض م (λ) = ¼
٠	β_0 = ب. = ب. م⁰ = ب.	ب. = ب. $(\frac{1}{2})^{0}$ = ب.	ب. = ب. $(\frac{1}{4})^{0}$ = ب.
١	$\lambda\,\beta_0$ = ب١ = ب. م¹ = م ب.	ب١ = ب. $(\frac{1}{2})$ = $\frac{1}{2}$ ب.	ب١ = ب. $(\frac{1}{4})$ = $\frac{1}{4}$ ب.
٢	$\lambda^2\,\beta_0$ = ب٢ = ب. م² = م² ب.	ب٢ = ب. $(\frac{1}{2})^{2}$ = $\frac{1}{4}$ ب.	ب٢ = ب. $(\frac{1}{4})^{2}$ = $\frac{1}{16}$ ب.
٣	$\lambda^3\,\beta_0$ = ب٣ = ب. م³ = م³ ب.	ب٣ = ب. $(\frac{1}{2})^{3}$ = $\frac{1}{8}$ ب.	ب٣ = ب. $(\frac{1}{4})^{3}$ = $\frac{1}{64}$ ب.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

ويلاحظ من الجدول (١٣-٦) أن قيمة المعلمات تتناقص عبر الزمن كلما بعدت الفجوات الزمنية عن سنة الأساس . ويمكن وصف سلوك المعلمات عبر الفجوات الزمنية المختلفة باستخدام الشكل (١٣-٧) .



شكل (١٣-٧)
المسار الزمني للمعلمات وفقا لنموذج كويك

ويمكن توضيح المضاعف طويل الأجل كما سبق في المعادلة (١٣-١٦) كما يلي :

المضاعف طويل الأجل = ف = $\sum_{ر}^{م}$ ب ر = ب. ($\frac{1}{١ - م}$)

$$M = \Sigma\beta_i = \beta_0(\frac{1}{1-\lambda})$$

وبالتعويض عن قيم المعلمات المختلفة من الجدول (١٣-٦) في المعادلة الأصلية (١٣-٤١) نحصل على :

ص ز = أ + ب . س ز + (م ب .) س ز-١ + (م٢ ب .) س ز-٢ + .. + ع ز .... (١٣-٤٣)

وبالحصول على نفس المعادلة السابقة للفترة " ز - ١ " :

ص ز-١ = أ + ب . س ز-١ + (م ب .) س ز-٢ + (م٢ ب .) س ز-٣ + ... + ع ز-١ .... (١٣-٤٤)

وبضرب المعادلة (١٣-٤٤) في م نحصل على :

م ص ز-١ = م أ + (م ب .) س ز-١ + (م ٢ ب .) س ز-٢ + (م٣ ب .) س ز-٣ + ... + م ع ز-١ ....(١٣-٤٥)

وبطرح المعادلة (١٣-٤٥) من المعادلة (١٣-٤٣) نحصل على:

ص ز – م ص ز-١ = أ (١ – م) + ب . س ز + (ع ز – م ع ز-١)

∴ ص ز = أ (١ – م) + ب . س ز + م ص ز-١ + و ز .... (١٣-٤٦)

$$Y_t = \alpha(1-\lambda)_t + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + W_t$$

حيث :

و ز = ع ز – م ع ز-١ $(W_t = u_t - \lambda u_{t-1})$ ..... (١٣-٤٧)

وتسمى المعادلة (١٣-٤٦) تحويل كويك Koyock's Transformation

وهي المعادلة المراد تقديرها الآن بدلاً من المعادلة الأصلية (١٣-٤١) . ويلاحظ على تحويل كويك ما يلي :

(١) أنه خفض عدد المعلمات المراد تقديرها من عدد لانهائي بالمعادلة (١٣-٤١) إلى عدد محدود في المعادلة (١٣-٤٦) ، حيث يتعين تقدير المعلمات أ ، ب . ، م فقط بدلاً من أ ، ب ، ب ١ ، ب ٢ ، .... ، ب ∞ .

(٢) إذا قدرنا النموذج المصاغ في المعادلة (١٣-٤٦) على النحو التالي :

ص ز = بˆ + بˆ . س ز + مˆ ص ز-١ + و ز .... (١٣-٤٨)

$$Y_t = \beta + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + W_t$$

حيث بˆ = أˆ (١ – مˆ) ← $(\hat{\beta} = \hat{a}(1-\hat{\lambda}))$ فمن الممكن تقدير أي عدد من معلمات النموذج الأصلي (١٣-٤١) . فبتقدير ب ، ب . ، م ، يمكن التوصل إلى :

أˆ = بˆ / (١ - مˆ) ، بˆ ١ = مˆ بˆ . ، بˆ ٢ = مˆ ٢ بˆ . وهكذا .

$$\alpha = \frac{\beta}{1-\lambda}, \quad \beta_1 = \lambda\beta_0, \quad \beta_2 = \lambda^2\beta_0$$

(٣) يلاحظ أن النموذج الأصلي (١٣-٤١) كان نموذج فجوة موزعة يحتوي فقط على متغيرات خارجية ذات فجوة ، غير أن طريقة كويك قد حولت هذا النموذج إلى نموذج انحدار ذاتي به متغير تابع ذو فجوة (ص ز-١) كمتغير تفسيري . ومن ثم فإن طريقة كويك تكون قد خففت مشكلة الامتداد الخطي المتعدد وذلك بإحلالها متغير

واحد هو ص ز-١ محل عدد من المتغيرات التفسيرية س ز-١ ، س ز-٢ ، .... التي يحتمل وجود ارتباط قوي بينها .

(٤) ولكن من ناحية أخرى يلاحظ أن ظهور المتغير ص ز-١ كمتغير تفسيري بالمعادلة (١٣-٤٦) المراد تقديرها يترتب عليه حدوث مشاكل عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير . فالمتغير ص ز-١ مرتبط مع الحد العشوائي و ز ، حيث أن ص ز-١ مرتبط مع ى ز-١ كما بالمعادلة (١٣-٤٤) ، هذا في حين أن ى ز-١ أحد مكونات " و ز " كما يتضح من المعادلة (١٣-٤٧) . ومن ثم فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة (١٣-٤٦) يترتب عليه الحصول على تقديرات تتسم بالتحيز وعدم الاتساق .

(٥) يترتب على تحويل كويك ظهور مشكلة الارتباط الذاتي وهذا يتضح من المعادلة (١٣-٤٧) التي تشير لارتباط قيم الحد العشوائي عبر الزمن . هذا بالرغم من أن هذه المشكلة قد لا تكون موجودة أصلاً في النموذج الأصلي (١٣-٤١) . ونتيجة لوجود تلك المشكلة فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير تؤدى للحصول على تقديرات متحيزة تتصف بعدم الاتساق .

وعلى العكس من ذلك إذا كان النموذج الأصلي بالمعادلة (١٣-٤١) يعاني من وجود مشكلة ارتباط ذاتي ممثلة في :

ى ز = م ى ز-١ + ق ز .... (١٣-٤٩)

فإن استخدام تحويل كويك يترتب عليه اختفاء هذه المشكلة . ويتضح هذا من التعويض من المعادلة (١٣-٤٩) في المعادلة (١٣-٤٧) عن ى ز فنحصل على :

و ز = م ى ز-١ - م ى ز-١ + ق ز ، أي أن : و ز = ق ز

نخلص مما سبق بأن طريقة المربعات الصغرى العادية لا تصلح لتقدير تحويل كويك ، ولا بد من البحث عن طريقة أخرى للتقدير . وسوف نتعرض لبعض هذه الطرق في القسم الثاني من هذا الجزء .

ب – نموذج التوقعات المتوافقة Adaptive expectations

يرجع الفضل في هذا النموذج إلى كاجان P.Cagan ، وهو يستخدم في الحالات التي تعتمد فيها القيمة الحالية للمتغير التابع على القيمة المتوقعة Expected level أو المستوى الدائم Permanent level للمتغير التفسيري . ويمكن كتابة الصيغة العامة لهذا النموذج على النحو التالي :

صـ ز = أ + ب . س* + ع .... (١٣-٥٠)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X^*_t + u_t$$

حيث س* = القيمة المتوقعة للمتغير التفسيري (X_t)

صـ = القيمة الحالية للمتغير التابع (Y_t)

ومن اهم الأمثلة الاقتصادية التي تنطبق عليها خصائص نموذج التوقعات المتوافقة ما يلي

(١) دالة الطلب في فترات التضخم السريع حيث تكون الكمية المطلوبة في الفترة الحالية صـ ز دالة في السعر المتوقع س* ز خاصة إذا كانت السلعة قابلة للتخزين .

(٢) دالة استهلاك فريدمان التي تأخذ الصيغة

صـ = ب س* + ع

حيث يكون الاستهلاك في الفترة الحالية صـ دالة في الدخل الدائم س* ز وليس الدخل المؤقت .

(٣) دالة الطلب النقدي حيث تكون صـ ز هي الكمية المطلوبة من النقود . س* ز هو سعر الفائدة المتوقع .

ولكن لما كان من الصعب مشاهدة القيم المتوقعة س* ز . فإننا نعتمد على القيم الماضية في تكوينها . ولذا فإننا نفترض أن :

س* ز = م س ز + (١ – م) س* ز-١ .... (١٣-٥١)

$$X^*_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) X^*_{t-1}$$

أي أن س *ز القيمة المتوقعة للمتغير س ز تمثل متوسط مرجح للقيمة الفعلية بالفترة الحالية س ز والقيمة المتوقعة بالفترة السابقة ، حيث صفر ≤ م ≤ ١ (λ) وتسمى معامل التوقع . فإذا كانت م = ١ فإن هذا يعني أن س*ز = س ز ، أي أن التوقعات تتحقق دون وجود أي انحراف . وإذا كانت م = صفر ، فإن س*ز = س*ز-١ ، أي أن التوقعات تكون ثابتة ولا تتغير من فترة لفترة أخرى .

ومن المعادلة (١٣-٥١) يتضح لنا أن :

س*ز = م س ز + س*ز-١ − م س*ز-١

أي أن :

س*ز = س*ز-١ + م (س ز − س*ز-١) .... (١٣-٥٢)

ولعل هذا يعني أن القيمة المتوقعة للمتغير س ز تساوى القيمة المتوقعة بالفترة السابقة س* ز-١ مضافاً إليها أو مطروحاً منها مقدار تصحيحي يتحدد بالفرق بين القيمة المتوقعة خلال الفترة السابقة والقيمة الفعلية . وبالتعويض عن س*ز من المعادلة (١٣-٥١) في المعادلة (١٣-٥٠) نحصل على :

ص ز = أ + ب١ (م س ز + (١ − م) س*ز-١) + ع ز

∴ ص ز = أ + ب١ م س ز + ب١ (١ − م) س*ز-١ + ع ز .... (١٣-٥٣)

وبالحصول على الصيغة الخاصة بالفترة السابقة من المعادلة (١٣-٥٠) وضربها في (١ − م) نحصل على :

(١ − م) ص ز-١ = أ (١ − م) + ب١ (١ − م) س*ز-١ + (١ − م) ع ز-١

وبطرح هذه الصيغة من المعادلة (١٣-٥٣) نحصل على :

ص ز − (١ − م) ص ز-١ = م أ + ب١ م س ز + (ع ز − (١ − م) ع ز-١)

∴ ص ز = م أ + ب١ م س ز + (١ − م) ص ز-١ + و ز .... (١٣-٥٤)

$$Y_t = \lambda \alpha + \beta_1 \lambda X_t + (1 - \lambda) Y_{t-1} + W_t$$

حيث و ر = ع ر – (١ – م) ع ر-١ $W_t = u_t - (1 - \lambda) u_{t-1}$. (١٣–٥٥)

وبمقارنة المعادلتين (١٣–٥٤) ، (١٣–٥٥) بالمعادلتين (١٣–٤٦) ، (١٣–٤٧) نجد أن نموذج التوقعات المتوافقة متماثل مع نموذج كويك ويعاني من نفس المشاكل التي يعاني منها . ومن ثم لا يمكن في هذه الحالة أن نستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير . وعموماً إذا تمت صياغة المعادلة (١٣–٥٤) في الصورة العامة التالية :

ص ر = ب + حـ س ر + ق ص ر-١ + و ر ....(١٣–٥٦)

$$Y_t = \beta + c X_t + d Y_{t-1} + W_t$$

حيث   ب = أم ، حـ = ب م ، ق = (١ – م)

$$\beta = \lambda \alpha \quad c = \lambda \beta_1 \quad d = (1 - \lambda)$$

فإنه بتقدير المعادلة (١٣–٥٦) باستخدام بيانات عن ص ر ، س ر ، ص ر-١ يمكن تقدير معلمات المعادلة الأصلية (١٣–٥٠) من خلالها . حيث :

ق = ١ – م   ومن ثم : م = ١ – ق $(\lambda = 1 - d)$

و بالتالي   أ = $\frac{\text{ب}}{\text{م}}$ ، حيث $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{م}}\,\hat{\text{أ}}$ $\alpha = \frac{\beta}{\lambda}$

ب $\frac{\text{حـ}}{\text{م}}$ حيث حـ = م ب $\beta_1 = \frac{c}{\lambda}$

وبهذه الطريقة يمكن التوصل لمعلمات المعادلة الأصلية (١٣–٥٠) بتقدير المعادلة (١٣–٥٦) .

(حـ) نموذج التعديل الجزئي : Partial Adjustment Model

يرجع الفضل في هذا النموذج إلى نيرلوف M. Nerlove ، وهو يأخذ الصيغة التالية:

ص*ر = أ + ب ، س ر + ع ر ....(١٣–٥٧)

$$Y^*_t = \alpha + \beta_1 X_t + u_t$$

حيث : ص *ز = المستوى المرغوب للمتغير التابع (Y^*_t)

س ز = المستوى الفعلي للمتغير التفسيري (X_t)

ومن الأمثلة الاقتصادية على ذلك دالة مخزون أو رصيد رأس المال . فرصيد رأس المال المادي المرغوب من قبل صاحب مشروع ما هو الرصيد الذي يلزم لإتمام العملية الإنتاجية بدون قصور في الطاقة الإنتاجية أو بدون فائض فيها (ص*ز) . وهو يتحدد بالمستوى الفعلي لحجم الإنتاج (س ز) . ولكن المتغير ص*ز لا يمكن مشاهدته في الواقع حتى يمكن تقدير المعادلة (١٣-٥٧) من خلاله . وهنا افترض نيرلوف عدد من الافتراضات بشأن المستوى المرغوب لرصيد رأس المال :

(١) أن المستوى الفعلي لرصيد رأس المال (ص ز) عادة ما يكون أقل من المستوى المرغوب (ص*ز) .

(٢) أن التغير الفعلي في رصيد رأس المال (الاستثمار الصافي الفعلي) و الذي يقاس بالفرق (ص ز – ص ز-١) عادة ما يكون أقل من التغير المرغوب (ص*ز – ص ز-١) في أي فترة وذلك لوجود قيود تكنولوجية وقيود مالية وقيود إدارية تحول دون تساوى الإثنين . ومن ثم فإن هذا الافتراض يعنى أن :

λ = (ص ز - ص ز-١) / (ص*ز - ص ز-١) .... (١٣-٥٨)

$$\lambda = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_t^* - Y_{t-1}}$$

حيث صفر < λ < ١

ويسمى " λ " **معامل التعديل** Adjustment Coefficient

ويلاحظ من المعادلة (١٣-٥٨) أن :

ص ز – ص ز-١ = λ (ص*ز – ص ز-١) + ق ز .... (١٣-٥٩)

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda (Y^*_t - Y_{t-1}) + V_t$$

وذلك بعد إضافة الحد العشوائي " ق ز " . وتشير المعادلة (١٣–٥٩) إلى أن التغير الفعلي في رصيد رأس المال (الاستثمار الصافي المحقق) في فترة ما يمثل نسبة مساوية λ من التغير المرغوب (الاستثمار الصافي المرغوب) .

وبإحلال المعادلة (١٣–٥٧) في المعادلة (١٣–٥٩) نحصل على :

ص ز – ص ز-١ = λ (أ + ب ١ س ز + ى ز – ص ز-١) + ق ز

∴ ص ز = λ أ + λ ب ١ س ز + (١ – λ) ص ز-١ + و ز .... (١٣–٦٠)

$$Y_t = \lambda \alpha + \lambda \beta_1 X_t + (1 - \lambda) Y_{t-1} + W_t$$

حيث : و ز = ى ز + ق ز $W_t = u_t + V_t$ .... (١٣–٦١)

وبتقدير المعادلة (١٣–٦٠) يمكن الحصول على المعلمات الخاصة بالمعادلة الأصلية (١٣–٥٧) . وبمقارنة المعادلة (١٣–٦٠) بالمعادلة (١٣–٥٤) نجد أن نموذج التعديل الجزئي يتماثل في صيغته مع نموذج التوقعات المتوافقة ، غير أن هناك وجهين للاختلاف :

(أ) أن النظرية الاقتصادية التي يعبر عنها نموذج التوقعات المتوافقة تختلف عن النظرية الاقتصادية التي يعبر عنها نموذج التعديل الجزئي .

(ب) أن المعادلة (١٣–٥٥) بنموذج التوقعات المتوافقة تشير إلى وجود مشكلة ارتباط ذاتي بين قيم الحد العشوائي عبر الفترات الزمنية المتتالية ، هذا في حين أن المعادلة (١٣–٦١) بنموذج التعديل الجزئي لا تشير إلى وجود مثل هذه المشكلة . فالحد العشوائي و ز هو مجموع حدين هما ى ز ، ق ز وهذا ليس فيه ما يتضمن ارتباط بين قيم " ى ز " أو " ق ز " عبر الفترات المتتالية . وبالطبع إذا ثبت وجود مشكلة ارتباط ذاتي فإن طريقة المربعات الصغرى العادية لا تصلح لتقدير نموذج التعديل الجزئي . أما إذا لم يثبت ذلك فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تصبح ملائمة لتقدير نموذج التعديل الجزئي .

ويستخدم نموذج التعديل الجزئي في تقدير نماذج اقتصادية أخرى مثل دالة الطلب في حالة السلع التي يؤدى استهلاكها لنوع من التعود كالتبغ أو دالة الطلب في حالة السلع المعمرة . وتأخذ دالة الطلب في هذه الحالة الصيغة التالية :

ط ر = أ + ب ١ ل ر + ب ٢ ط ر-١ + ب ٣ ث ر + و ر ...... (١٣-٦٢)

حيث :

ط ر = الكمية المطلوبة من السلعة خلال الفترة " ر "

ل ر = الدخل خلال الفترة " ر "

ط ر-١ = الكمية المستهلكة من السلعة خلال الفترة السابقة " ر - ١ "

ث ر = سعر السلعة خلال الفترة " ر "

ويلاحظ أن ب ٢ تكون موجبة في حاله الطلب على السلع غير المعمرة كالتبغ نظراً لأن استهلاك الفترة الحالية منها يتأثر إيجابيا باستهلاك الفترة السابقة منها . غير أن ب ٢ تكون سالبة في حالة الطلب على السلع المعمره حيث كلما زادت الكمية المشتراة منها في الفترة السابقة كلما قلت الكمية المطلوبة منها في الفترة الحالية .

كما يستخدم أيضاً في تقدير نموذج الطلب النقدي الذي يأخذ الصيغة التالية :

ص*ر = أ س ب١ ١ر س ب٢ ٢ر هـ و (١٣-٦٣)

$$Y^*_t = AX_{1t}^{\beta_1}X_{2t}^{\beta_2}e^{u_t}$$

حيث : ص*ر = الكمية المرغوب الاحتفاظ بها من النقود (الكمية المطلوبة في الأجل الطويل) . (Y^*_t)

س ١ر = سعر الفائدة (X_{1t})

س ٢ر = الدخل القومي الحقيقي (X_{2t})

ولتقدير الصيغة (١٣-٦٣) يتعين تحويلها لصيغة لوغاريتمية على النحو التالي :

لو ص*ر = لو أ + ب١ لو س ١ر + ب ٢ لو س ٢ر + ع .... (١٣ -٦٤)

$$\ln Y_t^* = \ln A + \beta_1 \ln X_{1t} + \beta_2 \ln X_{2t} + u_t$$

وطالما أن ص*ز لا يمكن مشاهدتها في الواقع فإننا نفترض العلاقة التالية بشأنها :

$$\frac{ص_{ز}}{ص_{ز-1}} = \left(\frac{ص^*_{ز}}{ص_{ز-1}}\right)^{\lambda} \quad ....(١٣-٦٥)$$

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \left(\frac{Y_t^*}{Y_{t-1}^*}\right)^{\lambda}$$

حيث ص = الكمية المطلوبة فعلاً من النقود ، λ = معامل التعديل . وبالحصول على لوغاريتم (١٣-٦٥) نجد أن :

$$لو\ ص_{ز} - لو\ ص_{ز-1} = \lambda\,(لو\ ص^*_{ز} - لو\ ص_{ز-1}) \quad ....(١٣-٦٦)$$

وبالتعويض من المعادلة (١٣-٦٤) في المعادلة (١٣-٦٦) عن لو ص*ز نحصل على :

$$لو\ ص_{ز} - لو\ ص_{ز-1} = \lambda\ لو\ أ + \lambda\ ب_1\ لو\ س_{1ز} + \lambda\ ب_2\ لو\ س_{2ز} + \lambda ع - \lambda لو\ ص_{ز-1}$$

$$لو\ ص_{ز} = \lambda\ لو\ أ + \lambda\ ب_1\ لو\ س_{1ز} + \lambda\ ب_2\ لو\ س_{2ز} + (1-\lambda)\ لو\ ص_{ز-1} + \lambda ع \quad ......(١٣-٦٧)$$

ويمكن صياغة (١٣-٦٧) على النحو التالي:

$$لو\ ص_{ز} = أ^* + ب_1^*\ لو\ س_{1ز} + ب_2^*\ لو\ س_{2ز} + ق\ لو\ ص_{ز-1} + و_{ز} \quad ....(١٣-٦٨)$$

$$\ln Y_t = \alpha^* + \beta_1^* \ln X_{1t} + \beta_2^* \ln X_{2t} + K \ln Y_{t-1} + W_t$$

حيث :

$$أ^* = \lambda\ لو\ أ \quad ، \quad ب_1^* = \lambda\ ب_1 \quad ، \quad ب_2^* = \lambda\ ب_2 \quad ، \quad ق = (1-\lambda)$$

$$\alpha^* = \lambda \ln A \quad , \quad \beta_1^* = \lambda \beta_1 \quad , \quad \beta_2^* = \lambda \beta_2 \quad , \quad K = (1-\lambda)$$

وبتقدير المعادلة (١٣-٦٨) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية يمكن تحديد معلمات المعادلة الأصلية (١٣-٦٤) على النحو التالي:

$$\lambda = 1 - ق \qquad (\lambda = 1 - K)$$

$$لو\ أ = أ^* \div \lambda \ ، \ ب_1 = ب_1^* \div \lambda \ ، \ ب_2 = ب_2^* \div \lambda$$

$$\ln A = \alpha / \lambda \quad , \quad \beta_1 = \beta_1^* / \lambda \quad , \quad \beta_2 = \beta_2^* / \lambda$$

ثانياً – طرق تقدير نماذج الانحدار الذاتي :

يأخذ نموذج الانحدار الذاتي الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب ١ ص ز-١ + ب ٢ س ز + و ز .... (١٣-٦٩)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + W_t$$

حيث: س ز = متغير خارجي ——— (X_t)

ص ز-١ = قيمة سابقة للمتغير التابع (Y_{t-1})

ومن المشاكل القياسية التي توجد في هذه الحالة ارتباط المتغير ص والحد العشوائي و ز ، وكذلك وجود مشكلة الارتباط الذاتي التي تتمثل في وجود ارتباط بين قيم الحد العشوائي في الفترات الزمنية المتتالية خاصة في حالتي نموذج كويك ونموذج التوقعات المتوافقة . ويترتب على استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير في ظل وجود هذه المشاكل الحصول على تقديرات متحيزه وغير متسقة وربما غير كفء . ومن أبرز الطرق التي تستخدم في التقدير في هذه الحالة .

١ – طريقة المتغيرات الوسيطة The Instrumental Variable Method

٢ – طريقة المربعات الصغرى العامة The General Least Squares

١ – طريقة المتغيرات الوسيطة :

وتسعى هذه الطريقة لاستخدام متغير وسيط بدلاً من ص ز كمتغير تفسيري يتميز بكونه مرتبطاً ارتباطاً قوياً مع ص ز-١ وغير مرتبط مع الحد العشوائي و ويمكن الحصول على هذا المتغير الوسيط كما يلي :

(أ) نقوم بتقدير الصيغة التالية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية :

ص ز = أ̂ + ب̂ ١ س ز-١ + ب̂ ٢ س ز-٢ + د ز .... (١٣-٧٠)

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{t-1} + \hat{\beta}_2 X_{t-2} + u_t$$

وذلك بافتراض أن أثر المتغير التفسيري يمتد عبر فجوتين زمنيتين (ويمكن أن تكون فجوة واحدة) . ويلاحظ أن الانحدار مقدر هنا بالنسبة للمتغيرات التفسيرية ذات الفجوة وليس بالنسبة للمتغير س ز. ومن المعادلة (١٣-٧٠) يمكن أن نحصل على المتغير صَ ز ($\hat{Y}_t$) حيث :

صَ ز = أَ + بَ ١ س ز-١ + بَ ٢ س ز-٢ .... (١٣-٧١)

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{t-1} + \hat{\beta}_2 X_{t-2}$$

(ب) نقوم بتحديد قيم المتغير صَ ز-١ من القيم التي حصلنا عليها من المعادلة (١٣-٧١) عند المستويات المختلفة للمتغيرات التفسيرية .

(حـ) ثم نقوم بتقدير الصيغة التالية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية :

صَ ز = أ + ب ١صَ ز-١ + ب ٢ س ز + و ز .... (١٣-٧٢)

$$\hat{Y}_t = \alpha + \beta_1 \hat{Y}_{t-1} + \beta_2 X_t + W_t$$

حيث نكون بذلك قد استخدمنا صَ ز-١ كمتغير وسيط بدلاً من ص ز-١ لعدم ارتباطه مع و ز.

ولكن يلاحظ على هذه الطريقة أنها وإن كانت تقضي على مشكلة الارتباط بين ص ز-١ ، و ز ، كما أن تقديراتها تكون متسقة في العينات الكبيرة ، إلا أن استخدامها في حالة العينات الصغيرة يؤدي للحصول على تقديرات متحيزة ، بالإضافة إلى أنها لا تؤدي للتخلص من مشكلة الارتباط الذاتي .

٢ – طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) :

تصلح هذه الطريقة لتقدير نماذج الانحدار الذاتي ، خاصة إذا كان الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى . وتتمثل هذه الطريقة في تخليص البيانات من الارتباط الذاتي ثم استخدامها بعد ذلك في التقدير من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية . فإذا افترضنا أن : ذ = معامل الارتباط الذاتي ، فإننا يمكن شرح خطوات طريقة المربعات الصغرى في التقدير كما يلي :

(أ) نقوم بتقدير المعادلة (١٣-٧٠) كوسيلة للتخلص من الارتباط بين ص ز-١ ، والحد العشوائي د ز .

(ب) ثم نقوم بتحديد قيم الحد العشوائي د ز في الفترات المختلفة باستخدام الصيغة (١٣-٧٠) بعد تقديرها حيث :

د ز = ص ز - أ̂ - ب̂ ١ س ز-١ - ب̂ ٢ س ز-٢ .... (١٣-٧٣)

ومنها نحصل على معامل الارتباط الذاتي المعدل ذ̂ :

$$\hat{\text{د}} = \frac{\sum_{\text{ز}=2}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ز}}\,\text{د}_{\text{ز}-1} / (\text{ن}-1)}{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \text{د}^2_{\text{ز}} / \text{ن}} + \frac{\text{ك}}{\text{ن}} \quad ....(\text{١٣-٧٤})$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \frac{n-1}{n} + \frac{k}{n}$$

حيث: ك = عدد المعلمات المقدرة بالنموذج

ن = حجم العينة

ك/ن = حد تمت إضافته للقضاء على التحيز عند استخدام "ذ̂" بدلاً من "ذ" المجتمع .

(حـ) نقوم بتخليص البيانات من الارتباط الذاتي كما يلي :

ص ز - ذ̂ ص ز-١ = أ + ب١ (ص ز-١ - ذ̂ ص ز-٢) + ب٢ (س ز - ذ̂ س ز-١) + و ز

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \alpha + \beta_1 (Y_{t-1} - \hat{\rho} Y_{t-2}) + \beta_2 (X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + W_t$$

(١٣-٧٥).......

ثم نقوم بتقدير العلاقة :

ص*ز = أ + ب١ ص*ز-١ + ب٢ ص*ز + و ز .... (١٣-٧٦)

حيث :

$$ص^*_{ز} = ص_{ز} - \hat{ذ} ص_{ز-١}$$

$$ص^*_{ز-١} = ص_{ز-١} - \hat{ذ} ص_{ز-٢}$$

$$س^*_{ز} = س_{ز} - \hat{ذ} س_{ز-١}$$

وتتسم المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العامة في هذه الحالة بالاتساق والكفاءة ، وإن كانت تتسم بالتحيز في حالة العينات الصغيرة .

الجزء الثالث

النماذج القياسية متعددة

المعادلات

Multi-equation Econometric Models

الفصل الرابع عشر

التعريف بالنماذج القياسية متعددة المعادلات

لقد تعرضنا في الجزء السابق لكيفية قياس وتقويم النماذج التي تتكون من معادلة انحدار واحدة Single-equation models ، غير أن الظواهر الاقتصادية غالباً ما لا تكون من البساطة بحيث يمكن وصفها وتحليلها من خلال معادلة انحدار واحدة . ففي حالات كثيرة تتصف الظواهر الاقتصادية بكونها مركبة و تنطوي على عديد من العلاقات المتشابكة . ولا شك أن النماذج ذات المعادلات المتعددة تكون أكثر ملائمة لوصف وتحليل هذا النوع من الظواهر . فإذا أخذنا ظاهرة اقتصادية مثل تقلب سعر سلعة ما عبر الزمن ، لا يمكن أن نصف أو نحلل هذه الظاهرة باستخدام بيانات واقعية من خلال معادلة واحدة . فإذا كان ثمن السلعة يتحدد بالطلب والعرض فإننا نكون في حاجة لنموذج يحتوى على عدد من المعادلات ، واحدة تتعلق بالطلب على السلعة ، وأخرى تتعلق بعرض السلعة ، وثالثة تشير إلى التوازن بين الطلب والعرض .

وإذا كانت النماذج ذات المعادلة الواحدة تهتم بتوضيح جانب واحد فقط من العلاقات ، ألا وهو تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع ، فإن النماذج متعددة المعادلات تأخذ في الحسبان العلاقات بين المتغيرات التفسيرية بعضها وبعض، وما قد يحدثه ذلك من تأثير على المتغير التابع . فإذا كانت الكمية المطلوبة من سلعة ما (ط ،) تتأثر بسعر السلعة (ث ،)، وسعر السلعة البديلة أو المكملة (ث ٢)، ودخل المستهلك (ل) كمتغيرات تفسيرية ، فإن دخل المستهلك كمتغير تفسيري يؤثر على سعر السلعة (ث ،) والذي هو متغير تفسيري أيضاً . بل إن الكمية المطلوبة نفسها تؤثر على سعر السلعة (ث ،) . ويلاحظ هنا أن كل ما تهتم به النماذج ذات المعادلة الواحدة هو تقدير دالة الطلب باستخدام الصيغة التالية : ط ، = د (ث ، ، ث ٢ ، ل)

أي أن نموذج الطلب ذو المعادلة الواحدة يهتم فقط بتحديد مدى تأثير المتغيرات التفسيرية ممثلة في ث ، ، ث ٢ ، ل على المتغير التابع ط ، دون أن يأخذ في الاعتبار

مدى تأثير " ل " على " ث ، " أو تأثير " ط ، " على " ث ، " . ولعل هذا ما يأخذه النموذج المتعدد المعادلات في الحسبان .

وقد يكون من المفيد قبل أن نتعرض لكيفية تقدير النماذج ذات المعادلات المتعددة والمشاكل المتعلقة بها أن نشير إلى بعض التعريفات اللازمة في هذا الصدد .

فالنموذج يحتوى على عدد من المتغيرات أهمها :

(١) متغيرات داخلية Endogenous Variables : وهى المتغيرات التي تتحدد قيمها التوازنية داخل النموذج، ويحتاج التغير فيها لتفسير . ولعل هذا يعنى أن من بين مهام تقدير النموذج تحديد القيم التوازنية للمتغيرات الداخلية وتفسير التغير فيها . ومن الأمثلة على المتغيرات الداخلية السعر و الكمية في نموذج سوق السلعة .

(٢) متغيرات سابقة التحديد Predetermined Variables وهى نوعان :

(أ) متغيرات خارجية Exogenous Varaibles: وهى المتغيرات التي تتحدد قيمها خارج النموذج ، مثال ذلك أسعار عناصر الإنتاج في دالة العرض .

(ب) متغيرات داخلية ذات فجوة زمنية Lagged Endogenous Varaibles وهى تمثل القيم الخاصة بالمتغيرات الداخلية في فترات سابقة مثال ذلك الكمية المباعة من السلعة في الفترة السابقة عندما تدرج كمتغير تفسيري في دالة متغيرها التابع هو الكمية المباعة من السلعة في الفترة الحالية .

وتستخدم المتغيرات سابقة التحديد كمتغيرات تفسيرية في النماذج المختلفة ولا يكون هناك حاجة لتفسير سلوكها وإنما تستخدم هي لتفسير سلوك المتغيرات الداخلية .

وسوف نتعرض في هذا الفصل لأهم أنواع النماذج متعددة المعادلات، على أن نتعرض في فصل مستقل آخر لأهم المشاكل التي تواجهنا عند التعامل مع هذه النماذج وعلى رأسها مشكلة التعرف . ونتعرض في فصل تالي لأهم طرق تقدير هذا النوع من النماذج.

ويمكن بوجهٍ عام الإشارة إلى أربعة أنواع من النماذج :

١ – نماذج المعادلات الآنية Simultaneous-Equation Systems

٢ – نماذج المعادلات المتتابعة — Recursive Equation Systems

٣ – نماذج المجموعات المتتابعة — Block-Recursive Equation Systems

٤ – نماذج المعادلات غير المرتبطة ظاهرياً — System of Seemingly Unrelated Equations

وسوف نتعرض في هذا القسم لكل نوع من هذه المعادلات بشيء من التفصيل خاصةً النوع الأول .

(١٤-١) : نماذج المعادلات الآنية :

Simultaneous Equation Systems

يمكن تعريف نموذج المعادلات الآنية بأنه ذلك النموذج الذي لا يمكن تحديد القيمة التوازنية لواحد من متغيراته الداخلية على الأقل دون استخدام جميع المعادلات التي يحتويها في آن واحد . ومن ثم نجد أن من خصائص هذا النموذج ما يلي :

(أ) أن تكون المتغيرات الداخلية بمعادلات النموذج مرتبطة ارتباطاً تبادلياً فيما بينها فتظهر كمتغيرات تابعة تارة وكمتغيرات تفسيرية تارة أخرى . مثال ذلك :

ص١ = أ٠ + أ١ ص٢ + أ٢ ص٣ + أ٣ س١ + أ٤ س٢ + ع١

ص٢ = ب٠ + ب١ ص١ + ب٢ ص٣ + ب٣ س١ + ب٤ س٢ + ع٢   ...(١٤-١)

ص٣ = حـ٠ + حـ١ ص١ + حـ٢ ص٢ + حـ٣ س١ + حـ٤ س٢ + ع٢

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_3 + \beta_3 X_1 + \beta_4 X_4 + u_2$$
$$Y_3 = C_0 + c_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 X_1 + C_4 X_4 + u_3$$

فمن الواضح أن هذا النموذج يحتوى على ثلاثة متغيرات داخلية هي ص١ ، ص٢ ، ص٣ ، وهي تظهر كمتغيرات تابعة تارة وكمتغيرات تفسيرية تارة أخرى . فعلى سبيل المثال نجد أن ص١ متغير تابع بالمعادلة الأولى يتأثر بكلٍ من ص٢ ، ص٣ كمتغيرين تفسيريين ، ولكنها تظهر في المعادلتين الثانية والثالثة كمتغير تفسيري يؤثر في كلٍ من

ص ٢ ، ص ٣ . وهكذا الأمر بالنسبة لكلٍ من ص ٢ ، ص ٣، ومن ثم لا يمكن تحديد قيمة أي منهم دون معرفة القيمتين الأخرتين .

(ب) نجد أن المتغيرات التفسيرية ترتبط بالحدود العشوائية كنتيجة للخاصية الأولى ، الأمر الذي يؤدى لعدم توفر افتراض أساسي من افتراضات طريقة المربعات الصغرى العادية ألا وهو : أن الحد العشوائي يؤثر على المتغير التابع دون أن يؤثر على المتغيرات التفسيرية بالنموذج حتى لا يحدث هناك تداخل في التأثيرات . ولا شك أن عدم توافر هذا الافتراض يجعل طريقة المربعات الصغرى العادية غير صالحة لتقدير معلمات هذا النموذج ، حيث تكون المعلمات المقدرة بواسطتها متحيزة وغير متسقة . فمن المعادلة الأولى نجد أن الحد العشوائي " ء ١ " يؤثر على المتغير التابع ص ١ ، ولكن ص ١ يؤثر على ص ٢ بالمعادلة الثانية ومن ثم فإن " ء ١ " يؤثر على ص ٢ وذلك من خلال تأثيره على ص ١ . أي أن ء ١ ← ص ١ ← ص ٢ . وبالنظر للمعادلة الأولى مرة أخرى نجد أن ص٢ أحد المتغيرات التفسيرية بالنسبة للمتغير ص ١ وهو في نفس الوقت يتأثر بالحد العشوائي " ء ١ " . و يمكن أن نوضح بنفس الطريقة أن ء ١ ترتبط مع ص ٣ بالمعادلة الأولى ، وأن ء ٢ ترتبط مع ص ١ ، ص ٣ بالمعادلة الثانية وأن ء ٣ ترتبط مع ص ١ ، ص ٢ بالمعادلة الثالثة .

ومن الممكن إثبات أن ارتباط الحد العشوائي بأحد المتغيرات المستقلة يؤدى لتحيز المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . فمن المعروف أنه يمكن تقدير معامل الانحدار البسيط بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية من خلال الصيغة التالية :

$$\hat{ب} = \frac{\sum ص\,س}{\sum س^2} \qquad \hat{\beta} = \frac{\Sigma yx}{\Sigma x^2}$$

وبالتعويض عن ص = ب س + د $(y_i = \beta x_i + e_i)$ في الصيغة السابقة نحصل على :

$$\hat{ب} = \frac{\sum (س)(ب\ س + د)}{\sum س^2}$$

$$\hat{ب} = \frac{\sum (ب\ س^2 + س\ د)}{\sum س^2} = \frac{ب \sum س^2}{\sum س^2} + \frac{\sum س\ د}{\sum س^2}$$

$$\hat{ب} = ب + \frac{\sum س\ د}{\sum س^2} \qquad \hat{\beta} = \beta + \frac{\Sigma x_i e_i}{\Sigma x_i^2} \qquad (٢-١٤)$$

ومن ثم إذا كان هناك ارتباط بين المتغير التفسيري س والحد العشوائي " د " فإن $\sum$ س د ≠ صفر وبالتالي فإن " $\hat{ب}$ " تكون مقدر متحيز للمعلمة ب . ومن ناحية أخرى مهما كبر حجم العينة فإنه ليس هناك ما يضمن أن يصبح $\sum$ س د مساوياً للصفر ومن ثم فإن $\hat{ب}$ تصبح مقدر غير متسق .

ولكن يتعين ملاحظة أن من الأسباب الأخرى التي يمكن أن تؤدى لوجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والخطأ العشوائي وجود أخطاء قياس في المتغيرات نفسها . فإذا افترضنا أن نموذج الانحدار الحقيقي مكتوباً في صيغة انحرافات كما يلي :

$$ص = ب\ س + د \qquad .... (٣-١٤)$$

$$y_i = \beta x_i + e_i$$

حيث تشير " د " إلى الخطأ العشوائي الراجع لحذف بعض المتغيرات التفسيرية أو لسوء تعيين النموذج ، و افترضنا أيضاً أنه عند قياس المتغير التفسيري استخدمنا القيمة "س *" التي تختلف عن " س " الحقيقية بمقدار يساوى " هـ " نتيجة لوجود خطأ في القياس ، فإن هذا يعنى أن :

$$س^* = س + هـ \qquad .... (٤-١٤)$$

ومن ثم : س = س* − هـ

وبالتعويض عن " س" بقيمتها في (١٤-٣) نحصل على :

ص = ب س * - ب هـ + د

∴ ص = ب س* + (د - ب هـ)

ومن ثم :

ص = ب س * + د * .... (١٤-٥)

$$y_i = \beta x^*_i + e^*_i$$

و حيث أن د * كخطأ عشوائي يحتوى على " هـ " وهو خطأ القياس (د* = د - هـ ب) فإن " س* " ترتبط مع " د* " وذلك لارتباط "س* " مع " هـ " كما هو واضح من المعادلة (١٤-٤) . ولعل هذا يعني أيضاً أن وجود أخطاء في قياس المتغيرات التفسيرية يؤدى لعدم دقة المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نظراً لاتصافها بالتحيز وعدم الاتساق ، ولذا يتعين البحث عن طرق أخرى للقياس غير طريقة المربعات الصغرى العادية .

أمثلة اقتصادية لنماذج المعادلات الآنية :

١ - نموذج السوق :

يتكون نموذج السوق من ثلاث معادلات على النحو التالي:

ك ط = أ. + أ ١ ث + د ١ .... (١٤-٦) دالة الطلب .

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + u_1$$

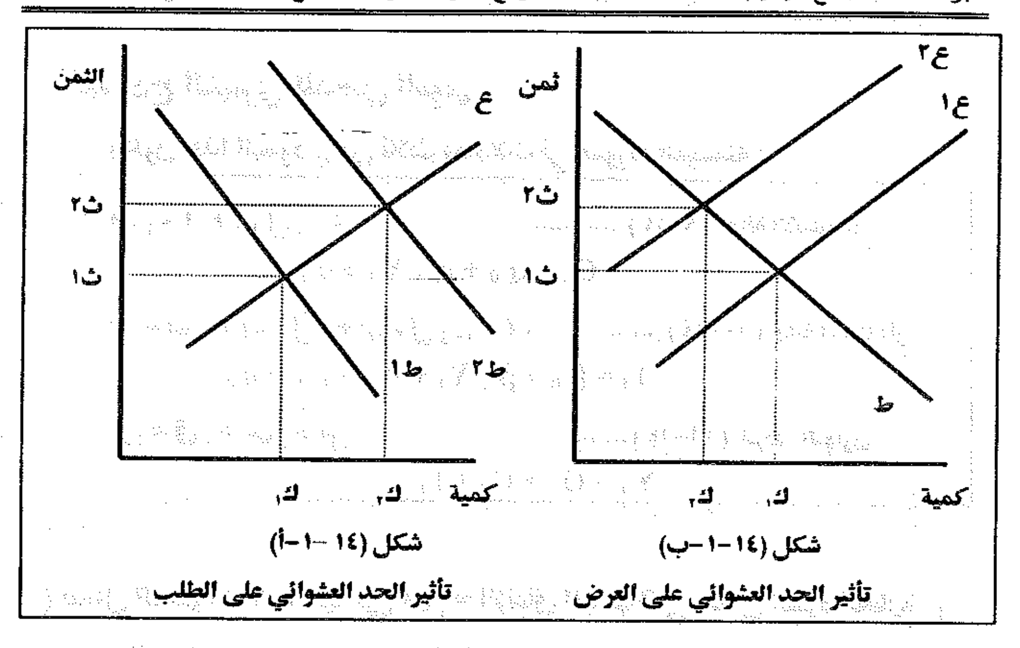
ك ع = ب. + ب ١ ث + د ٢ .... (١٤-٧) دالة العرض .

$$Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + u_2$$

ك ط = ك ع .... (١٤-٨) شرط التوازن .

$$Q_d = Q_s$$

حيث ك ط = كمية مطلوبة ، ك ع = كمية معروضة ، ث = سعر السلعة . ولعل من أهم خصائص هذا النموذج هو أن الحدود العشوائية د ١ ، د ٢ لا تؤثر فقط على المتغير التابع ممثلاً في (الكمية المطلوبة والمعروضة) وإنما تؤثر أيضاً على المتغير التفسيري ممثلاً في السعر . ويمكن توضيح هذا من الشكلين (١٤-١-أ) و (١٤-١-ب) . فعلى سبيل المثال إذا تغير الحد العشوائي د ١ بدالة الطلب نتيجة لحدوث إشاعة عن احتمال



شكل (١٤-١-أ)
تأثير الحد العشوائي على الطلب

شكل (١٤-١-ب)
تأثير الحد العشوائي على العرض

اختفاء سلعة ما في المستقبل القريب فإن هذا يؤدي لزيادة الطلب بالشكل (١٤-١-أ) من " ط١ " إلى " ط٢ " مما يترتب عليه زيادة سعر التوازن وزيادة كمية التوازن في نفس الوقت . ومن ثم فإن الحد العشوائي في هذه الحالة يكون قد أثر على كلٍ من الكمية والثمن . وكذلك الأمر بالنسبة لدالة العرض ، فإذا تغير الحد العشوائي بدالة العرض نتيجة لسوء الأحوال الجوية فإن هذا من شأنه أن يؤدي لانتقال دالة العرض من " ع١ " إلى "ع٢ " ، الأمر الذي يترتب عليه انخفاض الكمية و ارتفاع الثمن. ومن ثم فإن الحد العشوائي يكون قد أثر مرة أخرى على كلٍ من الكمية والثمن .

ويلاحظ في هذا الصدد أن تأثير الحدود العشوائية على المتغيرات التفسيرية يترتب عليه أن تكون نتائج القياس الناجمة عن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية غير دقيقة على النحو الذي أوضحناه سابقاً .

ويلاحظ من ناحية أخرى أن تحديد ثمن التوازن كمتغير داخلي أو كمية التوازن كمتغير داخلي تحتاج لاستخدام كل معادلات النموذج آنياً.

٢ - النموذج الكينزي للدخل القومي :

يتكون هذا النموذج من ثلاث معادلات في صورته المبسطة :

س ز = أ ٠ + أ ١ ل ز + ع ١ .... (١٤-٩) دالة الاستهلاك

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_1$$

م ز = ب ٠ + ب ١ ل ز + ب ٢ ل ز-١ + ع ٢ .... (١٤-١٠) دالة الاستثمار

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_2$$

ل ز = ق ز + س ز + م ز .... (١٤-١١) شرط التوازن

$$Y_t = G_t + C_t + I_t$$

حيث :

أ) تتمثل المتغيرات الداخلية في س ز = الإنفاق الاستهلاكي خلال الفترة الحالية ز ، م ز = الإنفاق الاستثماري خلال الفترة الحالية ز ، ل ز = الدخل الكلى خلال الفترة الحالية ز .

ب) تتمثل المتغيرات سابقة التحديد في : ق ز = الإنفاق الحكومي كمتغير خارجي ، ل ز-١ = الدخل الكلى خلال الفترة السابقة ز - ١ .

جـ) تتمثل الحدود العشوائية في ع ١ ، ع ٢ .

ويلاحظ على هذا النموذج أنه لا يمكن تحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي فيه دون استخدام كل معادلات النموذج . فلتحديد القيمة التوازنية للاستهلاك لا بد من معرفة قيمة ل ز ، ولتحديد قيمة ل ز لا بد من معرفة م ز ، ق ز وكذلك س ز . وهكذا يتعين استخدام كل المعادلات دفعة واحدة لتحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي بالنموذج . ويترتب على ذلك وجود ارتباط ليس فقط بين الحدود العشوائية والمتغيرات التابعة ، ولكن أيضاً بينها وبين المتغيرات التفسيرية . فمن المعادلة (١٤-٩) يؤدى التغير في الحد العشوائي ع ١ إلى تغير س ز ، ولكن تغير س ز يؤدى لتغير ل ز بالمعادلة (١٤-١١) ، ومن ثم فإن " ع ١ " يؤثر على ل ز كمتغير تفسيري بالمعادلة (١٤-٩) من خلال تأثيره على س ز (ع ١ ← س ز ← ل ز) . وكذلك الأمر

بالنسبة للمعادلة (١٤–١٠) حيث يؤدى التغير في الحد العشوائي "ع ٢ " إلى تغير "م ز"، ولكن تغير "م ز" يؤدى لتغير " ل ز " بالمعادلة (١٤–١١) . ومن ثم فإن "ع ٢ " يؤثر على " ل ز " كمتغير تفسيري بالمعادلة (١٤–١٠) من خلال تأثيره على م ز (ع ٢ ← م ز ← ل) . ونتيجة لهذا فإن طريقة المربعات الصغرى العادية لا تعد صالحة لتقدير معلمات هذا النموذج .

٣ – نموذج الأجور – الأسعار :

من أبرز نماذج الأجور – الأسعار نموذج فيليبس Philips الذي يتكون من معادلتين على النحو التالي:

حـ ز = أ . + أ ١ ى ز + أ ٢ ن ز + ع ١ .... (١٤–١٢) دالة الأجور

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 P_t + u_1$$

ن ز = ب . + ب ١ حـ ز + ب ٢ س ز + ب ٣ و ز + ع ٢ .... (١٤–١٣) دالة الأسعار

$$P_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 C_t + \beta_3 M_t + u_2$$

حيث :

حـ ز = معدل التغير في الأجور النقدية خلال الفترة ز (W_t)

ى ز = معدل البطالة خلال الفترة ز (L_t)

ن ز = معدل التغير في الأسعار خلال الفترة ز (P_t)

س ز = معدل التغير في تكلفة رأس المال خلال الفترة ز (C_t)

و ز = معدل التغير في سعر واردات المواد الخام خلال الفترة ز (M_t)

ع ١، ع ٢ = الحدود العشوائية . (u_1 , u_2)

وتشير المعادلة (١٤–١٢) إلى أن معدل التغير في الأجور النقدية يتأثر بعاملين ، أولهما معدل البطالة ، حيث كلما ارتفع معدل البطالة كلما قلت مقدرة النقابات العمالية أو العمال على المطالبة برفع الأجور ، وثانيهما معدل التغير في الأسعار ، حيث كلما ارتفع معدل التضخم كلما أدى هذا لزيادة معدل الارتفاع في الأجور النقدية للمحافظة على الأجور الحقيقية على الأقل ثابتة .

وتشير المعادلة (١٤-١٣) إلى أن معدل التغير في الأسعار يتحددُ بمعدلات التغير في تكلفة عناصر الإنتاج ممثلة في :

أ – معدل التغير في الأجور .

ب – معدل التغير في تكلفة رأس المال .

حـ – معدل التغير في سعر المواد الخام المستوردة .

ويلاحظ من هذا النموذج أن معدل التغير في الأجور يتحدد بمعدل التغير في الأسعار كما بالمعادلة (١٤-١٢) ، كما أن معدل التغير في الأسعار يتحدد بمعدل التغير في الأجور كما بالمعادلة (١٤-١٣) . ومن ثم فإن معادلات النموذج مرتبطة مع بعضها البعض ، ولذا لا يمكن تحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي دون استخدام كل معادلات النموذج . ولقد ترتب على هذا أن الحدود العشوائية أصبحت مرتبطة مع المتغيرات التفسيرية . فمن المعادلة (١٤-١٢) نجد أن الحد العشوائي " ع ١ " يؤثر على "حـ ز " ولكن "حـ ز " يؤثر على "ن ز " بالمعادلة (١٤-١٣) ، ومن ثم فإن " د ١ " يؤثر على "ن ز " من خلال تأثيره على "حـ ز " بالمعادلة (١٤-١٢) ، (ع ١ ← حـ ز ← ن ز) . ومن ناحية أخرى نجد أن " ع ٢ " يؤثر على " ن ز " بالمعادلة (١٤-١٣) ولكن " ن ز " يؤثر على "حـ ز " بالمعادلة (١٤-١٢) ومن ثم فإن " ع ٢ " يؤثر على " حـ ز " كمتغير تفسيري بالمعادلة (١٤-١٣) من خلال تأثيره على ن ز (ع ٢ ← ن ز ← حـ ز) .

ويتضح مما سبق أنه لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في تقدير دوال نماذج المعادلات الآنية نظراً لما يحدث من تحيز وعدم اتساق في معلماتها المقدرة . يضاف إلى هذا ما قد يحدث من صعوبات في التعرف على معادلات هذه النماذج في بعض الحالات وهو ما يعرف بمشكلة التعرف . ومن ثم فإن من أهم المشاكل التي تعترض الباحث عند تقدير نماذج المعادلات الآنية :

(١) تحيز وعدم اتساق المعلمات المقدرة عند استخدام طريقة المربعات العادية .

(٢) مشكلة التعرف Identification problem .

وسوف نتعرض في الفصل التالي لمشكلة التعرف ، ونتعرض في الفصل الذي يليه للطرق المختلفة التي تمكن من تقدير النماذج ذات المعادلات الآنية .

(١٤-٢) نماذج المعادلات المتتابعة : Recursive Equation Systems

يقال على نموذج ما أنه ذو معادلات متتابعة إذا كان لا يمكن تحديد القيم التوازنية لمتغيراته الداخلية إلا بالتتابع . فإذا كان لدينا ثلاث متغيرات داخلية ص١ ، ص٢ ، ص٣ ، فعلينا تحديد ص١ أولاً بصفة مستقلة ، ثم بالتعويض عن قيمتها التوازنية نحصل على القيمة التوازنية للمتغير ص٢ ، وبالتعويض عن قيمتي ص١ ، ص٢ نحصل على القيمة التوازنية للمتغير ص٣ . ويأخذ هذا النوع من النماذج الصيغة التالية :

ص١ = أ٠ + أ١ س١ + أ٢ س٢ + ع١ (١٤-١٤)

ص٢ = ب٠ + ب١ ص١ + ب٢ س١ + ب٣ س٢ + ع٢ (١٤-١٥)

ص٣ = حـ٠ + حـ١ ص١ + حـ٢ ص٢ + حـ٣ س١ + حـ٤ س٢ + ع٣ (١٤-١٦)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_2 + u_2$$
$$Y_3 = C_0 + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 X_1 + C_4 X_2 + u_3$$

حيث : ص١ ، ص٢ ، ص٣ ، متغيرات داخلية ، س١ ، س٢ متغيران خارجيان ، ع١ ، ع٢ ، ع٣ حدود عشوائية . ويلاحظ من هذا النموذج أنه نظراً لكون س١ ، س٢ قيمتهما معطاة ، فبالتعويض عنهما في المعادلة الأولى يمكن معرفة قيمة ص١ التوازنية . وبمعرفة قيمة ص١ بجانب س١ ، س٢ يمكن الحصول على القيمة التوازنية للمتغير ص٢ بالتعويض عن قيم هذه المتغيرات في المعادلة الثانية . وبمعرفة قيم ص١ ، ص٢ ، بجانب س١ ، س٢ يمكن الحصول على القيمة التوازنية للمتغير ص٣ بالتعويض عن قيم هذه المتغيرات في المعادلة الثالثة . ومن ثم فإن معرفة القيمة التوازنية لمتغير داخلي ما لازمة لتحديد القيمة التوازنية للمتغير الداخلي الذي يليه .

ومن أهم خصائص هذا النموذج :

(أ) لا يوجد هناك اعتماد تبادلي بين المتغيرات الداخلية . فيلاحظ مثلاً أن ص١ تؤثر على ص٢ دون أن تتأثر بها ، وكذلك الأمر بالنسبة للمتغير ص٣ الذي يتأثر بكلٍ من ص٢ ، ص١ دون أن يؤثر فيهما . ولعل هذا يعني أن العلاقة التي توجد بين أي متغيرين داخليين هي علاقة سببية ذات اتجاه واحد .

(ب) يترتب على ما سبق أن الحدود العشوائية وإن كانت تؤثر في المتغيرات التابعة إلا أنها لا تؤثر في المتغيرات المستقلة . فيلاحظ مثلاً أن ع١ يؤثر في ص١ ولكنه لا يؤثر في س١ أو س٢ لأنهما متغيران خارجيان يتحددان من خارج النموذج . كما أن ع٢ يؤثر في ص٢ دون أن يؤثر في ص١ بالمعادلة الثانية وذلك لأن ص٢ لا تؤثر في ص١ ، هذا بالإضافة إلى أنها لا تؤثر في س١ ، س٢ . وكذلك الأمر بالنسبة للمعادلة الثالثة حيث يؤثر ع٣ في ص٣ دون أن يؤثر في أي من ص١ أو ص٢ ، وذلك لأن ص٣ لا تؤثر في أيٍ من المتغيرين . ومن ثم فإن أحد الافتراضات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى العادية القائل بعدم وجود ارتباط بين الحد العشوائي والمتغيرات التفسيرية يتوفر في هذه الحالة .

(حـ) إذا كانت قيم الحدود العشوائية الثلاثة ع١ ، ع٢ ، ع٣ غير مرتبطة ببعضها البعض فإنه من الممكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير دوال النماذج ذات المعادلات المتتابعة . وفي هذه الحالة يتم تقدير كل معادلة بصفة مستقلة باستخدام البيانات المشاهدة المتوفرة عن المتغيرات التابعة والتفسيرية ، وبعد ذلك يمكن تحديد القيم التوازنية للمتغيرات الداخلية بدلالة القيم المحددة للمتغيرات الخارجية على التوالي.

أما إذا كانت قيم الحدود العشوائية مرتبطة مع بعضها فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تصبح غير ملائمة للتقدير في هذه الحالة . وعلينا استخدام إحدى الطرق التي سوف نتعرض لها في الفصل السادس عشر .

مثال اقتصادي: نموذج المنتجات القطنية

افترض أن نسق المعادلات التالية يصف نموذج المنتجات القطنية :

ث ق = أ . + أ ، ت + ع .... (١٤-١٧)

$$Pc = \alpha_0 + \alpha_1 C + u_1$$

ث ص = ب . + ب ، ث ق + ب ٢ ر + ع ٢ .... (١٤-١٨)

$$P_s = \beta_0 + \beta_1 P_c + \beta_2 r + u_2$$

ك = حـ . + حـ ، ث ص + حـ ٢ ض + ع ٣ .... (١٤-١٩)

$$Q_c = C_0 + C_1 P_s + C_2 t + u_3$$

حيث :

ث ق = سعر القطن الخام (P_c)

ت = تكلفة إنتاج الوحدة من القطن الخام (C)

ث ص = متوسط سعر الوحدة من المنتجات القطنية المصنوعة (P_s)

ر = متوسط تكلفة الوحدة من المدخلات المستوردة (r)

ك = الكمية المباعة من المنتجات القطنية بالسوق المحلي (Q_c)

ض = معدل الضريبة الجمركية الفعال على الواردات من المنتجات القطنية (t)

ع ، ، ع ٢ ، ع ٣ = الحدود العشوائية (u_1 , u_2 , u_3)

ويلاحظ هنا أن ث ق ، ث ص ، ك متغيرات داخلية ، ت ، ر ، ض ، متغيرات خارجية . وتوضح المعادلة الأولى أن ثمن الوحدة من القطن الخام يتحدد بتكلفة إنتاج الوحدة ، كما توضح المعادلة الثانية أن ثمن الوحدة من المنتجات القطنية يتحدد بثمن الوحدة من القطن الخام وتكلفة الوحدة من المدخلات المستوردة . أما المعادلة الثالثة فإنها توضح أن الكمية المباعة من المنتجات القطنية المحلية تتحدد بثمن الوحدة من المنتجات القطنية المحلية ومعدل الضريبة الفعال على الواردات من المنتجات القطنية .

ويمكن في هذه الحالة استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير كل دالة بصفة مستقلة ، ثم تحديد القيم التوازنية للمتغيرات الداخلية بالتتابع .

(١٤-٣) نماذج المجموعات المتتابعة :

Block-Recursive Equation System

يحتوى نموذج المجموعات المتتابعة على عدد من المعادلات التي يمكن تقسيمها لعدد من المجموعات ، كل مجموعة تكون فيما بينها نموذج فرعى ذو معادلات آنية . غير أن المعلومات الخاصة بالمتغيرات الداخلية بالمجموعة الأولى تلزم لتحديد القيم التوازنية للمتغيرات الداخلية بالمجموعة الثانية . ويمكن توضيح إحدى صيغ هذه النماذج فيما يلي:

ص١ = أ. + أ١ ص٢ + أ٢ س١ + أ٣ س٢ + ع١ ..... (١٤-٢٠)

ص٢ = ب. + ب١ ص١ + ب٢ س١ + ب٣ س٢ + ع٢ ... (١٤-٢١)

ص٣ = حـ. + حـ١ ص١ + حـ٢ ص٢ + حـ٣ س١ + حـ٤ س٢ + ع٣ ... (١٤-٢٢)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_2 + u_2$$
$$Y_3 = C_0 + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 X_1 + C_4 X_2 + u_3$$

فالمعادلتين (١٤-٢٠) ، (١٤-٢١) تمثلان مجموعة من المعادلات الآنية ، حيث ص١ تتأثر بالمتغير ص٢ وكذلك ص٢ تتأثر بالمتغير ص١ . أما المعادلة (١٤-٢٢) فهي تمثل مجموعة ثانية ، ولتحديد القيمة التوازنية للمتغير ص٣ في هذه المجموعة يتعين أن تتوفر معلومات عن قيم ص١ ، ص٢ الموجودة بالمجموعة الأولى . ويلاحظ هنا أنه وإن كانت ص٣ تتأثر بكلٍ من ص١ ، ص٢ إلا أنها لا تؤثر في أي منهما . ولذلك من الممكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة (١٤-٢٢) لعدم وجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والحد العشوائي بها ، غير أن هذه الطريقة لا تصلح لتقدير الدالتين (١٤-٢٠) ، (١٤-٢١) لارتباط الحدود العشوائية بالمتغيرات

التفسيرية بهما . ومن ثم يجب استخدام إحدى الطرق الصالحة لتقدير المعادلات الآنية لقياس معلمات هاتين المعادلتين معاً .

مثال اقتصادي : نموذج تحديد الاستثمار

ف ز = أ . + أ ١ ن ز + أ ٢ ل ز + ع ١ .... (١٤-٢٣) دالة سعر الفائدة.

$$i_t = \alpha_0 + \alpha_1 M_t + \alpha_2 Y_t + u_1$$

ل ز = ب . + ب ١ ف ز + ب ٢ ل ز-١ + ع ٢ .... (١٤-٢٤) دالة الدخل.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 i_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_2$$

ث ز = حـ . + حـ ١ ف ز + حـ ٢ ل ز + حـ ٣ س ز + ع ٣ (١٤-٢٥) دالة الاستثمار.

$$I_t = C_0 + C_1 i_t + C_2 Y_t + C_3 X_t + u_3$$

حيث :

ف ز = سعر الفائدة خلال الفترة ز (i_t)

ن ز = كمية النقود خلال الفترة ز (M_t)

ل ز = الناتج القومي الإجمالي خلال الفترة ز (Y_t)

ل ز-١ = الناتج القومي الإجمالي خلال الفترة ز - ١ (Y_{t-1})

ث ز = الاستثمار الإجمالي خلال الفترة ز (I_t)

س ز = نسبة التشغيل في الصناعات الرأسمالية خلال الفترة ز (X_t)

ويلاحظ أن ف ز ، ل ز ، ث ز متغيرات داخلية ، ن ز ، ل ز-١ ، س ز متغيرات سابقة التحديد . كما يلاحظ أن المعادلتين (١٤-٢٣) ، (١٤-٢٤) تكونان مجموعة من المعادلات الآنية ، أما المعادلة الثالثة (١٤-٢٥) فإنها تمثل مجموعة أخرى تحتاج لمعلومات عن ف ز ، ل ز لتحديد القيمة التوازنية للاستثمار . ويتضح هنا أن ث ز وإن كانت تتأثر بالمتغيرين الداخليين ف ز ، ل ز إلا أنها لا تؤثر فيهما .

(١٤-٤) نماذج المعادلات غير المرتبطة ظاهرياً

Systems of Seemingly Unrelated Equations (SURE)

يتكون النموذج ذو المعادلات غير المرتبطة ظاهرياً من مجموعة من المعادلات التي لا تعتمد متغيراتها الداخلية على بعضها البعض بما يوحي بأنها غير مرتبطة ظاهرياً ، إلا أنها تكون مرتبطة بالفعل لأسباب أخرى خفية . ومن إحدى صيغ هذه النماذج الصيغة التالية :

ص١ = أ. + أ١ س١ + أ٢ س٢ + ع١ ..... (١٤-٢٦)

ص٢ = ب. + ب١ س٣ + ب٢ س٤ + ع٢ ... (١٤-٢٧)

ص٣ = حـ. + حـ١ س٥ + حـ٢ س٦ + ع٣ .... (١٤-٢٨)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_3 + \beta_2 X_4 + u_2$$
$$Y_3 = C_0 + C_1 X_5 + C_2 X_6 + u_3$$

حيث : ص١ ، ص٢ ، ص٣ متغيرات داخلية ، س١ ، س٢ ، ...... ، س٦ متغيرات سابقة التحديد . ومن أهم خصائص هذا النموذج :

(أ) أن المتغيرات الداخلية لا تعتمد على بعضها البعض وهذا يوحي بأن المعادلات الثلاثة غير مرتبطة . بالإضافة إلى ذلك نجد أن المعادلات الثلاثة لا تشترك في أي من المتغيرات التفسيرية ، فهي في المعادلة (١٤-٢٦) تتمثل في س١ ، س٢ ، وفي المعادلة (١٤-٢٧) تتمثل في س٣ ، س٤ ، وفي المعادلة (١٤-٢٨) تتمثل في س٥ ، س٦ ، وهذا أمر يؤكد الإيحاء السابق بأن هذه المعادلات غير مرتبطة .

(ب) إذا كانت الحدود العشوائية ع١ ، ع٢ ، ع٣ غير مرتبطة فإن هذا يؤكد أن النموذج السابق ذو معادلات غير مرتبطة فعلياً وليس ظاهرياً ، أي أنها تصبح Actually unrelated equations . وفي هذه الحالة يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معادلات النموذج السابق دون أخطاء في التقدير ، حيث تتصف المعلمات المقدرة في هذه الحالة بعدم التحيز والاتساق والكفاءة .

(حـ) إذا كانت الحدود العشوائية مرتبطة ، أي أن (ر ٢،١، ≠ صفر ، ر ٢،١، ≠ صفر ، ر ٢،٢، ≠ صفر) فإن النموذج السابق يطلق عليه اسم النموذج ذو المعادلات غير المرتبطة ظاهرياً (حيث أنها تكون مرتبطة فعلياً) . وفي هذه الحالة يترتب على استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معادلات هذا النموذج الحصول على معلمات مقدرة تتصف بعدم التحيز والاتساق ولكنها لا تتصف بالكفاءة . وبمعنى آخر فإن المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في هذه الحالة تتصف بعدم الكفاءة . ولتلاشي هذه المشكلة يتعين استخدام طريقة أخرى في التقدير تسمى طريقة المربعات الصغرى العامة General Least Squares (GLS) أو مدخل زلنر-أتكن Zelliner-Atkin Approach وهو يعطى نتائج تتصف بعدم التحيز ، والاتساق والكفاءة ، وسوف نوضح هذا المدخل في فصلٍ تالي .

مثال اقتصادي : توزيع الإنفاق الحكومي

إذا افترضنا أننا نريد التنبؤ بالأنصبة النسبية للاستخدامات المختلفة للإنفاق الحكومي على المستوى المحلى المتمثلة في :

(أ) الإنفاق على خدمات البوليس والإطفاء (س) (C)

(ب) الإنفاق على المدارس (م) (M)

(حـ) الإنفاق على أغراض أخرى (ى) (L)

حيث الإنفاق الحكومي (ق) = س + م + ى (G = C + M + L)

فمن الممكن عمل ذلك بتقدير النموذج التالي:

ص١ = أ. + أ١ ل + أ٢ ك + ع١ .....(١٤-٢٩)

ص٢ = ب. + ب١ ل + ب٢ ع + ع٢ ...(١٤-٣٠)

ص٣ = حـ. + حـ١ ل + حـ٢ ك + حـ٣ ع + ع٣ ....(١٤-٣١)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 H + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 S + u_2$$
$$Y_3 = C_0 + C_1 X + C_2 H + C_3 S + u_3$$

حيث :

ص١ = س / ق = النسبة المنفقة من ميزانية الحكم المحلي على البوليس والإطفاء $Y_1 = \frac{C}{G}$

ص٢ = م / ق = النسبة المنفقة من ميزانية الحكم المحلي على المدارس $Y_2 = \frac{M}{G}$

ص٣ = ى / ق = النسبة المنفقة من ميزانية الحكم المحلي على الأغراض الأخرى $Y_3 = \frac{L}{G}$

ص١ + ص٢ + ص٣ = ١ $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$

ك = الكثافة السكانية = عدد الأفراد في الكيلو متر مربع سكن بكردون المدينة (H)

ل= متوسط دخل الأسرة (X)

ع= عدد الأطفال في سن التعليم (S)

ويلاحظ على هذا النموذج ما يلي :

(أ) أن المتغيرات الداخلية الممثلة في ص١ ، ص٢ ، ص٣ لا تعتمد على بعضها البعض ومن ثم فإن المعادلات تبدو ظاهرياً وكأنما هي مستقلة .

(ب) يوجد هناك ارتباط بين الحدود العشوائية ء١ ، ء٢ ، ء٣ ، ولعل هذا يرجع لحقيقة مؤداها أن مج (ر=١ إلى ٣) صر = ١ . فلكل مشاهدة (سنة أو مدينة) نجد أن مجموع الأنصبة النسبية يساوى ١ ، أي أن :

١ = (أ. + ب. + حـ.) + (أ٢ + حـ٢) ك + (أ١ + ب١ + حـ١) ل + (ب٢ + حـ٣) ع + (ء١ + ء٢ + ء٣) . ... (١٤-٣٢)
$(\alpha_0 + \beta_0 + C_0) + (\alpha_2 + C_2)H + (\alpha_1 + \beta_1 + C_1)X + (\beta_2 + C_3)S + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 1$

وحتى تتحقق المعادلة (١٤-٣٢) بالنسبة لكل مشاهدة حرفياً فإن :

ء١ + ء٢ + ء٣ = صفر ، ومن ثم فإن زيادة ء١ أو نقصه لا بد أن يؤثر على ء٢، ء٣

وهكذا بالنسبة لكل من ء٢، ء٣.

الفصل الخامس عشر

مشكلة التعرف

Identification Problem

تنشأ مشكلة التعرف أساساً في الحالات التي يقوم فيها الباحث بتقدير نموذج مكون من عدد من المعادلات . ففي حالة تعدد معادلات النموذج يوجد هناك احتمال أن تتماثل بعض هذه المعادلات في الصيغة الرياضية والمتغيرات ، الأمر الذي يجعل من الصعب على الباحث أن يتعرف على العلاقة التي ينسب إليها الدالة المقدرة .

وسوف نتعرض في هذا الفصل لنقاط ثلاث على أن نتناول كلٍ منها في مبحث مستقل على النحو التالي :

المبحث الأول : صياغة مشكلة التعرف .

المبحث الثاني : حالات التعرف .

المبحث الثالث : شروط التعرف .

المبحث الأول

صياغة مشكلة التعرف

تعتبر مشكلة التعرف مشكلة متعلقة بتعيين النموذج أكثر من كونها متعلقة بتقدير النموذج . ويقال أن نموذجاً ما أو معادلة ما متعرف عليها إذا كانت لها صيغة إحصائية وحيدة لا تشترك فيها مع غيرها من النماذج أو المعادلات . وبمعنى آخر إذا كان لا يوجد هناك نماذج أو معادلات أخرى تأخذ نفس الصيغة الإحصائية وتحتوي على نفس المتغيرات . وفى هذه الحالة يمكن الحصول على مقدرات وحيدة للنموذج أو المعادلة لا يشتبه فيها أن تكون مقدرات معلمات نماذج أو معادلات أخرى . ويقال أن نموذجاً ما أو معادلة ما غير متعرف عليها إذا كانت تتماثل مع غيرها من النماذج أو المعادلات في صياغتها الإحصائية وتحتوى على نفس متغيراتها . وفى هذه الحالة نجد أن مقدرات معلمات النموذج أو المعادلة قد تكون متعلقة بها أو قد تكون متعلقة بنماذج أو معادلات أخرى من تلك التي تتماثل معها في الصيغة الإحصائية .

وحتى نتفهم مشكلة التعرف دعنا نأخذ مثالاً اقتصادياً . افترض أن نموذج السوق لسلعةٍ ما يأخذ الصيغة التالية :

ك ط = أ + ب ث + ع١ .... دالة الطلب

$$Q_d = \alpha + \beta P + u_1$$

ك ع = جـ + ق ث + ع٢ .... دالة العرض .... (١٥-١)

$$Q_s = C + KP + u_2$$

ك ط = ك ع .... دالة الطلب

$$Q_d = Q_s$$

حيث : ك ط = الكمية المطلوبة ، ك ع = الكمية المعروضة ، ث = السعر .

بادئ ذي بدء حتى يمكن التعرف على نموذج ما يتعين أن يكون هذا النموذج كاملاً . ويقال على النموذج أنه كامل إذا كان يحتوى على الأقل على عدد

من المعادلات يساوى عدد المتغيرات الداخلية . ويعتبر نموذج السوق السابق نموذجاً كاملاً ، حيث أنه يحتوى على ثلاث معادلات وثلاث متغيرات داخلية هي ك ط ، ك ع ، ث . بالإضافة إلى ذلك ، يتعين أن تكون كل معادلة من معادلات النموذج السلوكية متعرف عليها حتى يمكن التعرف على النموذج بكامله . وفي نموذج السوق السابق يتعين أن تكون دالة الطلب ودالة العرض متعرف عليهما حتى يكون هذا النموذج متعرف عليه . أما فيما يتعلق بالمعادلات المعبرة عن شروط التوازن مثل : ك ط = ك ع ، أو المعادلات التعريفية مثل : الإيراد الكلي = الكمية × السعر ، أو المتطابقات مثل : كمية النقود × سرعة الدوران = كمية الإنتاج × مستوى الأسعار ، فإنها معرفة بذاتها ولا يثور بشأنها مشكلة تعرف . أي أن مشاكل التعرف تثور فقط بالنسبة للمعادلات السلوكية التي تحتوى على معاملات يتعين تقديرها إحصائياً من بيانات واقعية .

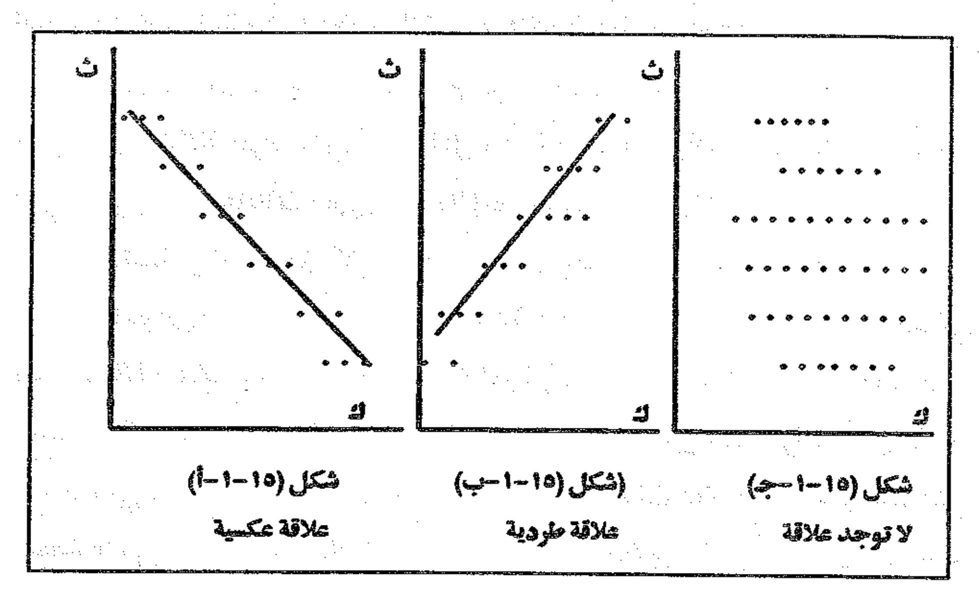
والسؤال الآن : هل كل من دالة الطلب ودالة العرض متعرف عليهما ؟

افترض أننا نريد تقدير معلمات دالة الطلب أ ، ب . بالطبع سوف نستخدم في هذه الحالة بيانات واقعية منشورة عن الكمية (ك) والسعر (ث) لتقدير معلمات هذه الدالة . ولكن هل يمكن أن نعتبر أن المعلمات المقدرة من بيانات واقعية عن الكمية والسعر هي معلمات دالة طلب ؟ ولماذا لا نعتبرها معلمات دالة عرض ؟ فالبيانات التي جمعناها عن الكمية ، إذا كانت تعتبر بيانات كمية مطلوبة فهي تعتبر بيانات كمية معروضة في نفس الوقت . والسعر أيضاً إذا كان يعتبر هو السعر الذي دفعه المستهلك فهو السعر الذي حصل عليه المنتج . وهذا يعنى أن البيانات التي جمعت عن الكمية والسعر إذا كانت تعتبر بيانات طلب فهي تعتبر أيضاً بيانات عرض ، وهي في حقيقة الأمر بيانات عن الكميات والأسعار التوازنية . ولذلك فإن الدالة المقدرة باستخدام هذه البيانات قد تكون دالة طلب وقد تكون دالة عرض وقد تكون دالة مختلطة .

ولكن إذا قام باحثان بتقدير دالة ما من بيانات واقعية عن الكمية والسعر ، وادعى أحدهما أن الدالة المقدرة هي دالة طلب ، في حين ادعى الآخر أنها دالة

عرض ، فكيف نعرف أيهما على حق ؟ أي ما هي الشروط التي يتعين توافرها حتى يمكن أن نتعرف على الدالة المقدرة ما إذا كانت دالة طلب أم دالة عرض ؟

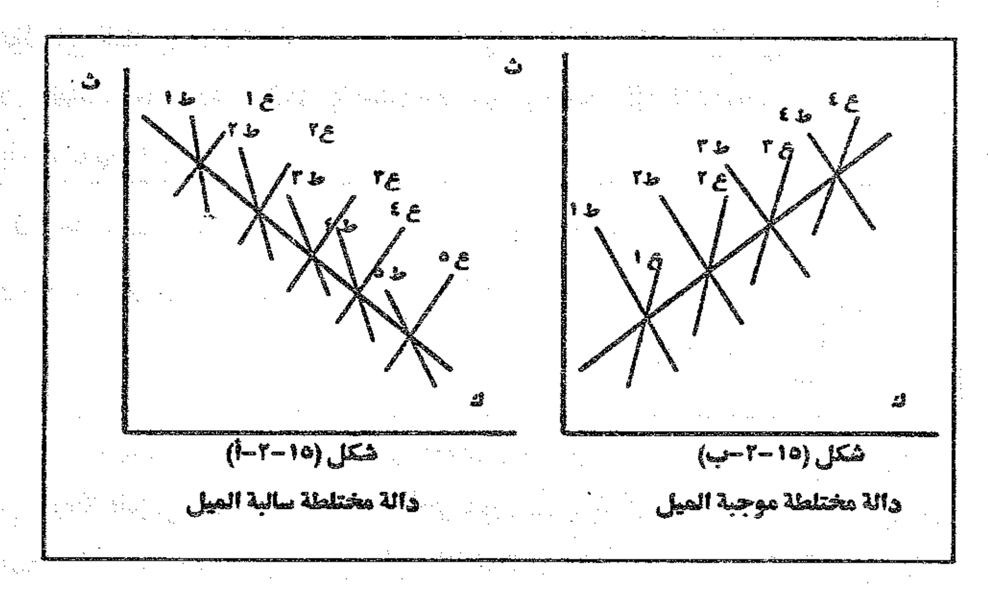
قد يعتقد البعض أنه من الممكن التعرف على طبيعة الدالة المقدرة من خلال شكل انتشارها أو إشارة المعلمة الانحدارية الخاصة بها . فإذا قمنا برصد بيانات عينة عن الكمية والسعر في شكل انتشار ، وحصلنا على أحد الأشكال (١٥-١-أ) ، (١٥-١-ب) ، (١٥-١-جـ) :



شكل (١٥-١-أ) علاقة عكسية — شكل (١٥-١-ب) علاقة طردية — شكل (١٥-١-جـ) لا توجد علاقة

فيقال أنه من الممكن التعرف على الدالة المقدرة من بيانات الشكل (١٥-١-أ) بأنها دالة طلب ، حيث يوضح شكل الانتشار أن العلاقة عكسية بين السعر و الكمية ، كما أن الارتباط قد يكون قوياً بينهما مما يجعل معامل التحديد ر ٢ مرتفعاً . كما يقال أنه من الممكن التعرف على الدالة المقدرة من بيانات الشكل (١٥-١-ب) على أنها دالة عرض ، حيث يوضح الشكل أن العلاقة طردية بين الكمية والسعر . هذا في حين أنه لا يمكن التعرف على الدالة المقدرة من بيانات شكل (١٥-١-جـ) ما إذا كانت دالة طلب أم دالة عرض .

وفى حقيقة الأمر لا يكفى أن تكون المعلمة الانحدارية للدالة المقدرة سالبة حتى نحكم عليها بأنها دالة طلب ، كما لا يكفى أن تكون المعلمة الانحدارية موجبة حتى نحكم على الدالة المقدرة بأنها دالة عرض . فالنقاط التي تكون أشكال الانتشار السابقة هي نقاط توازن تمثل تقاطع أكثر من منحنى طلب وأكثر من منحنى عرض . فليست النقاط الموضحة بشكل الانتشار (١٥-١-أ) واقعة على منحنى طلب واحد بالضرورة ، وليست النقاط الموضحة بشكل الانتشار (١٥-١-ب) واقعة على منحنى عرض واحد بالضرورة ، ولكن ربما نجد أن كل نقطة من نقاط الانتشار تقع على منحنى طلب مختلف ومنحنى عرض مختلف . ولذلك لا يمكن أن ننسب كل هذه النقاط لدالة طلب محددة أو دالة عرض محددة لمجرد أن ميل الدالة المقدرة سالب أو موجب . ولعل هذا يتضح من الشكلين (١٥-٢-أ) ، (١٥-٢-ب) :



شكل (١٥-٢-أ)
دالة مختلطة سالبة الميل

شكل (١٥-٢-ب)
دالة مختلطة موجبة الميل

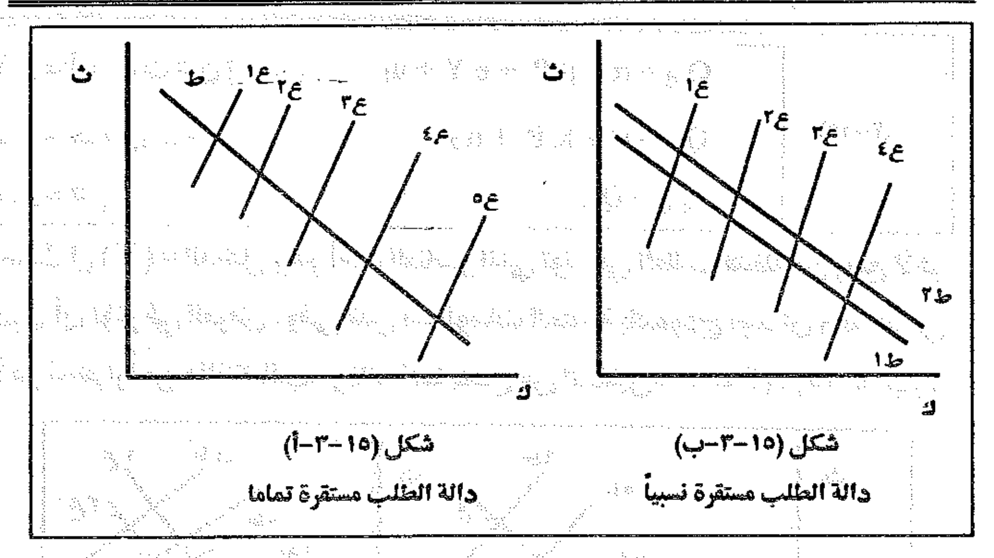
فنقاط الانتشار بالشكل (١٥-٢-أ) تقع على منحنيات طلب ومنحنيات عرض مختلفة ولا يمكن أن ننسبها لمنحنى طلب واحد أو منحنى عرض واحد ، وكذلك الحال بالنسبة للشكل (١٥-٢-ب) . وبالطبع لا يمكن التعرف على الدالة المقدرة من بيانات

الشكل (١٥-٢-أ) بأنها دالة طلب ، كما لا يمكن التعرف على الدالة المقدرة من بيانات الشكل (١٥-٢-ب) بأنها دالة عرض تأخذ الصيغة   ص = أ + ب س + ع .

نخلص من هذا إلى أنه لا يمكن التعرف على دالة الطلب أو دالة العرض في نموذج السوق السابق . وهذا يرجع إلى أن دالة الطلب تحمل نفس صيغة دالة العرض وتستخدم نفس متغيراتها . أي أن دالة الطلب ليس لها صيغة منفردة أو وحيدة تميزها عن دوال النموذج الأخرى ، وكذلك الحال بالنسبة لدالة العرض. ولذلك نحن في حيرة من التعرف على الدالة المقدرة هل هي دالة طلب أم دالة عرض أم دالة مختلطة ؟ وهذا يعني أن أي من الدالتين لابد أن تحتوى على متغيرات مختلفة عن المتغيرات التي تحتوى عليها الدالة الأخرى حتى يمكن التمييز بينهما والتعرف على إحداهما أو كليهما . ولذلك فإننا في حاجة لأن نعرف معلومات إضافية عن العوامل الأخرى التي تؤثر في الطلب ولا تؤثر في العرض ، أو العوامل الأخرى التي تؤثر في العرض ولا تؤثر في الطلب حتى يكون لكل واحدة منها صيغة وحيدة . فإذا افترضنا أن نموذج السوق يأخذ الصيغة التالية :

كط = أ + ب ث + ع١	$Q_d = \alpha + \beta P + u_1$	
كع = جـ + ق ث + هـ ف + ع٢	$Q_s = C + KP + hF + u_2$	(١٥-٢)
كط = كع	$Q_d = Q_S$	

حيث ف (F) = سعر عنصر الإنتاج الأساسي وهو عامل من العوامل التي تؤثر في دالة العرض فتنقلها من وضع لآخر دون أن تؤثر في دالة الطلب . ففي ظل المعلومات المتاحة بالنموذج نجد أن دالة الطلب أكثر استقراراً من دالة العرض وذلك كما يتضح من الشكلين (١٥-٣-أ) ، (١٥-٣-ب) .



شكل (١٥-٣-أ)
دالة الطلب مستقرة تماما

شكل (١٥-٣-ب)
دالة الطلب مستقرة نسبياً

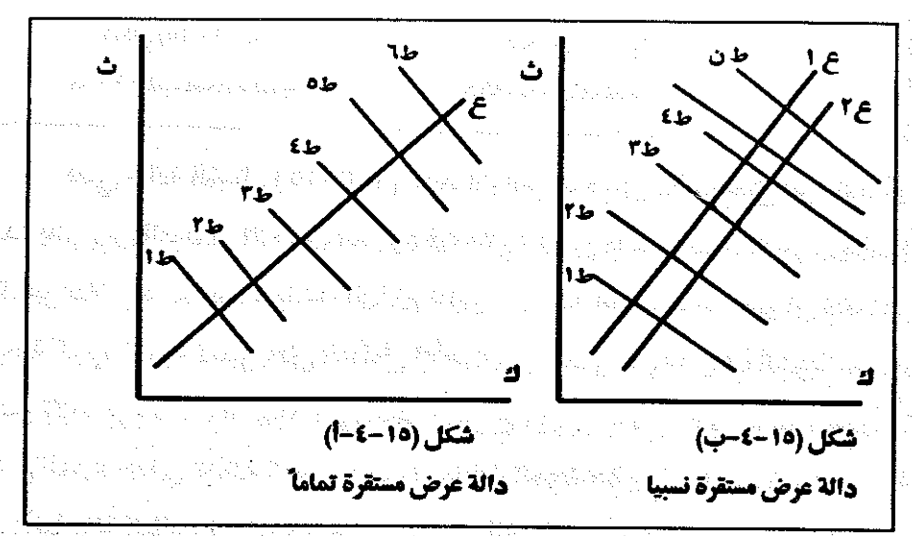
ففي حالة الشكل (١٥-٣-أ) نجد أن الطلب مستقر تماماً خلال فترة التقدير ، وهذا يعني أن العوامل الأخرى المؤثرة فيه مثل الدخل وأسعار السلع الأخرى والذوق لم تتغير خلال هذه الفترة ولذا فإنها لم تظهر في دالة الطلب . أما العرض فلقد تغير بدرجة كبيرة نتيجة لتغير بعض العوامل الأخرى غير السعر مثل الظروف الجوية أو أسعار عناصر الإنتاج وكانت النتيجة هي انتقاله من ع ١ إلى ع٥. وفي ظل هذه المعلومات يمكن التعرف على الدالة المقدرة من البيانات الموضحة بشكل الانتشار (١٥-٣-أ) على أنها دالة الطلب ، ذلك لأنه وإن كانت البيانات المتاحة كلها بيانات توازنية إلا أنها تقع بكاملها على دالة طلب واحدة ، لذا فهي تعتبر بيانات طلب . ولكن لا يمكن التعرف على العلاقة المقدرة من بيانات الكمية (ك) والسعر (ث) على أنها دالة عرض في هذه الحالة نظراً لأنه لا يوجد هناك دالة عرض وحيدة .

وليس من الضروري ألا تتحرك دالة الطلب تماماً حتى يمكن التعرف عليها، ولكن إذا كانت التغيرات فيها طفيفة نتيجة لعوامل عشوائية كما هو الحال بالشكل (١٥-٣-ب) ، في حين أن التغيرات في العرض كبيرة فمن الممكن القول أن دالة الطلب مستقرة نسبياً ويمكن التعرف عليها .

أما إذا أخذ نموذج السوق الصيغة التالية :

كـ ط = أ + ب ث + ن ل + ع ١	$Q_d = \alpha + \beta P + e Y + u_1$	
كـ ع = جـ + ق ث + ع ٢	$Q_s = C + K P + u_2$	(١٥-٣)
كـ ط = كـ ع	$Q_d = Q_s$	

حيث ل (Y) = الدخل وهو أحد العناصر التي تؤثر في الطلب فتنقله من وضع لآخر دون أن تؤثر في العرض . وفي ظل المعلومات المتاحة بالنموذج نجد أن دالة العرض أكثر استقراراً من دالة الطلب، وذلك كما يتضح من الشكلين (١٥-٤-أ) ، (١٥-٤-ب) .



شكل (١٥-٤-أ)
دالة عرض مستقرة تماماً

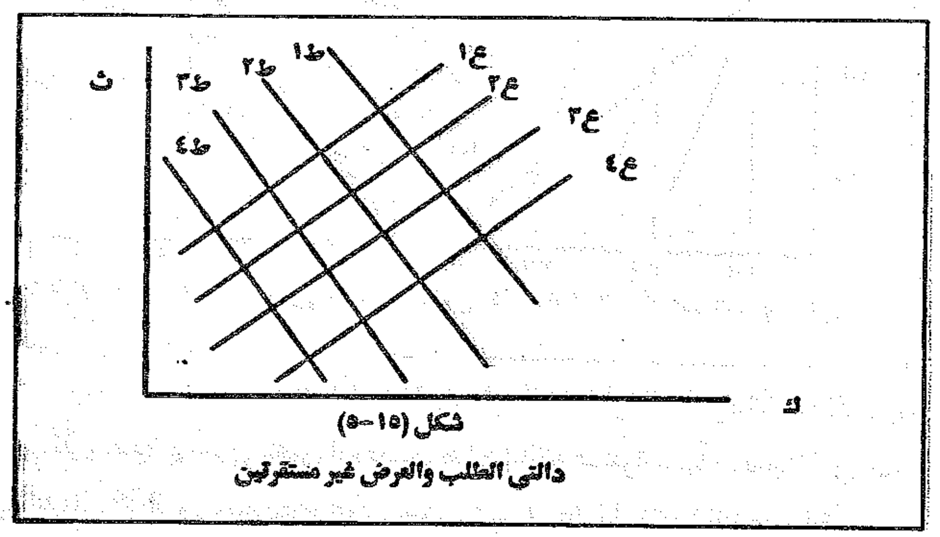
شكل (١٥-٤-ب)
دالة عرض مستقرة نسبيا

ففي الشكل (١٥-٤-أ) نجد أن العرض مستقر تماماً خلال فترة التقدير ، وهذا يعنى أن العوامل الأخرى المؤثرة فيه كأسعار السلع الأخرى ، والتقدم التكنولوجي وأسعار عناصر الإنتاج والظروف الجوية لم تتغير خلال هذه الفترة ، ولذا فإنها لم تظهر في دالة العرض . أما الطلب فلقد تغير بدرجة كبيرة نتيجة لتغير بعض العوامل الأخرى كالدخل فأصبحت دالة الطلب غير مستقرة . ويلاحظ أنه من الممكن التعرف على الدالة المقدرة من البيانات الموضحة بالشكل (١٥-٤-أ) على أنها دالة عرض . ولكن لا يمكن التعرف على دالة الطلب في هذه الحالة . وكذلك الأمر بالنسبة للشكل (١٥-٤-ب) والذي تظهر فيه دالة العرض مستقرة نسبياً بالمقارنة بدالة الطلب .

أما إذا أخذ نموذج السوق الصيغة التالية :

ك ء = أ + ب ث + م ل + ح ١	$Q_d = \alpha + \beta P + e Y + u_1$	(١٥-٤)
ك ع = جـ + ق ث + هـ ف + ح ٢	$Q_s = C + KP + h f + u_2$	
ك ء = ك ع	$Q_d = Q_s$	

فإن كل دالة فيه تحتوي على متغير خارجي لا يوجد في الدالة الأخرى وهما : الدخل (ل) في دالة الطلب ، سعر عنصر الإنتاج الأساسي (ف) في دالة العرض . ومن ثم فإن النموذج يأخذ الشكل (١٥-٥) .

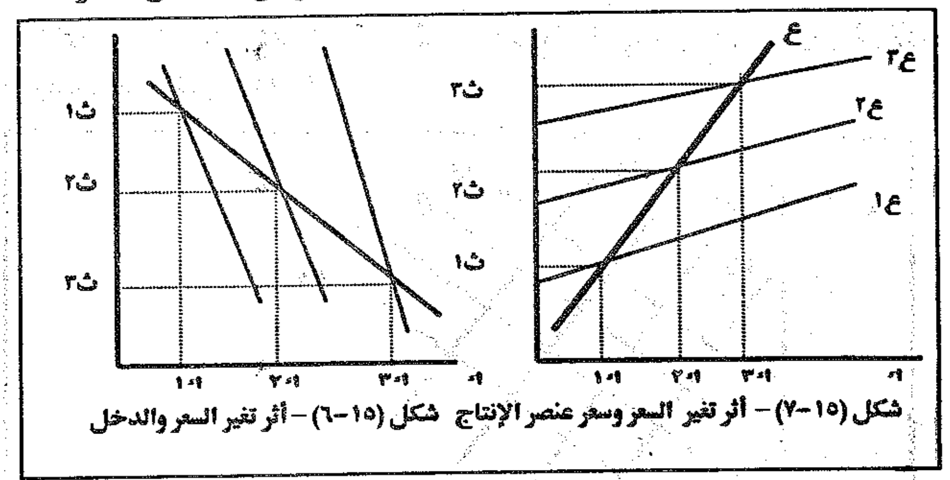


شكل (١٥-٥)

دالتي الطلب والعرض غير مستقرتين

ولعل هذا يعني أن دالة الطلب تصبح غير مستقرة كما تصبح دالة العرض غير مستقرة ، ولذلك فإن الدالة المقدرة من البيانات المتاحة عن الكمية والسعر باستخدام الصيغة : ك = أ + ب ث + ح لا يمكن التعرف عليها كدالة طلب أو دالة عرض ، وإنما هي دالة مختلطة . ولكن إذا جمعنا بيانات عن الدخل " ل " ، وسعر عنصر الإنتاج الأساسي " ف " وأضفنا هذين المتغيرين لدالتي الطلب و العرض كما في النموذج (١٥-٤) فإن دالة الطلب تصبح متميزة عن دالة العرض . ولذلك إذا قدرنا المعادلة الأولى بالنموذج (١٥-٤) يمكن التعرف عليها كدالة طلب ، وإذا قدرنا المعادلة الثانية يمكن التعرف عليها كدالة عرض .

غير أنه يتعين ملاحظة أن دالة الطلب المقدرة سوف تمثل الخط " ط " بدلاً من ط ١ أو ط ٢ أو ط ٣ في الشكل (١٥-٦) . أي أنها تأخذ في الحسبان أثر الدخل بجانب أثر السعر وتعزل كل منهما عن الآخر . كما أن دالة العرض المقدرة تمثل الخط " ع " بدلاً من ع ١ أو ع ٢ أو ع ٣ في الشكل (١٥-٧) . أي أنها تأخذ في الحسبان أثر كل من : ث ، ف ، بدلاً من أثر السعر " ث " فقط ، وتعزل أثر كل منهما عن الآخر .



شكل (١٥-٧) - أثر تغير السعر وسعر عنصر الإنتاج شكل (١٥-٦) - أثر تغير السعر والدخل

ويمكن تلخيص المناقشة السابقة بالقول بأننا إذا أردنا تقدير دالة انحدار بسيط تنتمي إلى نموذج معين يتعين أن تكون هذه الدالة مستقرة نسبياً ، ومتميزة عن غيرها من الدوال الأخرى بالنموذج حتى يمكن التعرف عليها . فكما اتضح سابقاً يمكننا التعرف على دالة الطلب في نموذج السوق إذا كانت مستقرة نسبياً بينما كانت دالة العرض تظهر تغيراً واضحاً ، ويتحقق هذا الشرط إذا كانت بعض المتغيرات التي لا تؤثر في الطلب ظاهرة في دالة العرض مما يجعل الأخيرة غير مستقرة ويجعل الأولى متميزة عنها ، وكذلك الأمر بالنسبة لدالة العرض ، ويعرف هذا بوجه عام " بلغز التعرف " Paradox of Identification . ويعني لغز التعرف أن التعرف على دالة ما يعتمد على بعض المتغيرات الغائبة عنها والتي تكون في نفس الوقت ظاهرة في دوال أخرى بالنموذج . أي من الممكن التعرف على دالة ما عن طريق متغيرات هي لا تحتويها .

المبحث الثاني

حالات التعرف

يمكن تقسيم النماذج من حيث إمكانية التعرف عليها إلى ثلاثة أنواع :

(١) نماذج ناقصة التعريف   Underidentified Models

(٢) نماذج تامة التعريف   Exactly Identified Models

(٣) نماذج زائدة التعريف   Overidentified Models

وسوف نتعرض لهذه الحالات بالتفصيل في هذا المبحث .

(١٥-٢-١) نماذج ناقصة التعريف :

يكون النموذج ناقص التعريف إذا كان عدد معاملات المعادلات المستقلة التي يتم اشتقاقها باستخدام أسلوب الصيغ المختصرة أقل من عدد المعلمات المجهولة بالنموذج الأصلي ، مما يجعل من غير الممكن تقدير كل المعلمات المجهولة بالنموذج. وبالنظر لنموذج السوق (١٥-١) نجد أن المعادلات المستقلة التي يمكن تكوينها عن طريق حل هذا النموذج باستخدام أسلوب الصيغ المختصرة Reduced Forms تتمثل في إثنين فقط نوضحها فيما يلي :

بالتعويض بمعادلتي الطلب و العرض في شرط التوازن نحصل على :

أ + ب ث + ع$_1$ = جـ + ق ث + ع$_2$

(ب ث − ق ث) = (جـ − أ) + (ع$_2$ − ع$_1$)

∴ ث = $\frac{\text{جـ - أ}}{\text{ب - ق}}$ + $\frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ب - ق}}$ .... (١٥-٥)

∴ ث = أ$_1$ + و$_1$ $P = \alpha_1 + W_1$

وتشير المعادلة (١٥-٥) للصيغة المختصرة الأولى بالنموذج وهي تخص سعر التوازن .

وبالتعويض من (١٥-٥) في دالة الطلب أو دالة العرض بالنموذج (١٥-١) نحصل على الصيغة المختصرة الثانية للنموذج وهى تخص كمية التوازن :

$$\text{ك} = \text{أ} + \text{ب} \left(\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} \right) + \text{ع}_1$$

$$\text{ك} = \left[\frac{\text{أب} - \text{أق}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب جـ} - \text{أب}}{\text{ب} - \text{ق}} \right] + \left[\frac{\text{ب ع}_2 - \text{ب ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب ع}_1 - \text{ق ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} \right]$$

$$\text{ك} = \frac{\text{ب جـ} - \text{أق}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب ع}_2 - \text{ق ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} \quad .... \quad (١٥-٦)$$

$$\text{ك} = \text{جـ}_1 + \text{و}_2$$

$$Q = C_1 + W_2$$

ويلاحظ أن لدينا بالنموذج الأصلي أربعة مجاهيل هي أ ، ب ، جـ ، ق ، وهى معلمات النموذج التي يراد تقديرها ، ولكن لدينا معادلتين مستقلتين (١٥-٥) ، (١٥-٦) خاصتين بالسعر و الكمية بهما معاملين فقط هما :

$$\text{أ}_1 = \frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad ، \quad \text{جـ}_1 = \frac{\text{ب جـ} - \text{أق}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

أما و ١ ، و ٢ فهي حدود عشوائية . ولذلك فإن هذا النموذج ناقص التعريف نظراً لأن عدد معاملات الصيغ المختصرة (أ ١ ، جـ ١) (α_1 ، C_1) أقل من عدد المجاهيل بالنموذج الأصلي(أ ، ب ، جـ ، ق) ، ومن ثم لا يمكن التعرف عليه . فإذا جمعنا بيانات عن السعر و الكمية وقدرنا منها دالة انحدار لن يمكن تحديد قيم المجاهيل الأربعة السابقة منها ، وإن كان من الممكن تقدير قيمة مجهولين إثنين لا يمثلان أي من المجاهيل الأربعة السابقة . وباختصار إذا كان النموذج ناقص التعريف فلن يمكن التعرف على المعلمات المقدرة منه . وفى حالتنا هذه لا يمكن التعرف على المعلمات المقدرة ما إذا كانت تخص دالة طلب أو دالة عرض .

(١٥-٢-٢) النماذج تامة التعريف

يكون النموذج تام التعريف إذا كان عدد معاملات الصيغ المختصرة يساوي عدد المعلمات المجهولة المراد تقديرها بالنموذج الأصلي . وفى هذه الحالة يمكن التعرف على النموذج بمعادلاته المختلفة . فإذا كان نموذج السوق يأخذ الصيغة (١٥-٤) فبحل هذا النموذج يمكن الحصول على الصيغ المختصرة التالية :

$$\text{أ} + \text{ب ث} + \text{م ل} + \text{ع}_1 = \text{جـ} + \text{ق ث} + \text{هـ ف} + \text{ع}_2$$

$$(\text{ب ث} - \text{ق ث}) = (\text{جـ} - \text{أ}) + \text{هـ ف} - \text{م ل} + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)$$

$$\text{ث} = \frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} + \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} \qquad (\text{١٥-٧})$$

$$\text{ث} = \text{أ}_1 + \text{أ}_2\text{ف} + \text{أ}_3\text{ل} + \text{و}_1$$

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 F + \alpha_3 Y + W_1$$

وهذه هي الصيغة المختصرة الأولى . وبالتعويض بها في دالة الطلب أو العرض بالنموذج (١٥-٤) نحصل على الصيغة المختصرة الثانية لنموذج السوق كما يلي :

$$\text{ك} = \text{أ} + \text{ب}\left(\frac{\text{حـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} + \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}}\right) + \text{م ل} + \text{ع}_1$$

$$\text{ك} = \text{أ} + \frac{\text{ب حـ} - \text{ب أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{ب م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} + \frac{\text{ب ع}_2 - \text{ب ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} + \text{م ل} + \text{ع}_1$$

$$= \frac{\text{أب} - \text{أق}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب حـ} - \text{ب أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} + \frac{\text{ب م} - \text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} - \frac{\text{ب م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} + \frac{\text{ب ع}_2 - \text{ب ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب ع}_1 - \text{ق ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}}$$

$$\text{ك} = \frac{\text{ب حـ} - \text{أق}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \frac{\text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \frac{\text{ب ع}_2 - \text{ق ع}_1}{\text{ب} - \text{ق}} \qquad (\text{٨-١}$$

$$\text{ك} = \text{حـ}_1 + \text{حـ}_2\text{ف} + \text{حـ}_3\text{ل} + \text{و}_2$$

$$Q = C_1 + C_2 F + C_3 Y + W_2$$

وهذه هي الصيغة المختصرة الثانية التي تخص كمية التوازن .

وبجمع البيانات عن الكمية (ك) ، والسعر (ث) ، والدخل (ل) ، وسعر عنصر الإنتاج الأساسي (ف) يمكن تقدير دوال الصيغ المختصرة (١٥-٧) ، (١٥-٨) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . ومن ثم تكون معاملات الصيغ المختصرة : أ_1 ، أ_2 ، أ_3 ، حـ_1 ، حـ_2 ، حـ_3 الستة معلومة لدينا . وباستخدام هذه المعاملات يمكن تقدير المعلمات الأصلية لنموذج السوق وهى ستة أيضاً وتتمثل في : أ ، ب ، م ، حـ ، ق ، هـ ، حيث :

$$\text{أ}_1 = \frac{\text{حـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{أ}_2 = \frac{\text{هـ}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{أ}_3 = \frac{-\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{حـ}_1 = \frac{\text{ب حـ} - \text{أ ق}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ،}$$

$$\text{حـ}_2 = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{حـ}_3 = \frac{-\text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

وحيث أن لدينا ٦ معاملات للصيغ المختصرة معلومة و ٦ مجاهيل في النموذج الأصلي يمكن تحديد قيم هذه المجاهيل ويكون بذلك النموذج تام التعريف . ويمكن توضيح ذلك من خلال تحديد قيم المعلمات المجهولة للنموذج الأصلي باستخدام قيم المعلمات المعروفة للصيغ المختصرة وذلك كما يلي :

$$\text{ق أ}_3 = \frac{-\text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \therefore \text{ق أ}_3 = \text{حـ}_3 \text{ ومن ثم } \text{ق} = \frac{\text{جـ}_3}{\text{أ}_3} \quad ......(١٥-٩)$$

$$\text{ب أ}_2 = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \therefore \text{ب أ}_2 = \text{حـ}_2 \text{ ومن ثم } \text{ب} = \frac{\text{جـ}_2}{\text{أ}_2} \quad ....(١٥-١٠)$$

هـ = أ_2 (ب - ق) ، وبالتعويض من (١٥-٩) ، (١٥-١٠) عن ب ، ق نحصل على :

$$\text{هـ} = \text{أ}_2 \left(\frac{\text{جـ}_2}{\text{أ}_2} - \frac{\text{جـ}_3}{\text{أ}_3} \right) = \text{جـ}_2 - \frac{\text{أ}_2\text{جـ}_3}{\text{أ}_3} \quad ....(١٥-١١)$$

م = - أ٢ (ب - ق) ، وبالتعويض عن ب ، ق من (١٥-٩) ، (١٥-١٠) نحصل على :

$$م = \frac{-أ_2جـ_2}{أ_2} + حـ_2 = حـ_2 - \frac{-أ_2جـ_2}{أ_2} \quad ....(١٥-١٢)$$

$$ب أ_1 = \frac{ب جـ - ب أ}{ب - ق}$$

$$\therefore حـ_1 - ب أ_1 = \frac{ب جـ - أ ق - ب جـ + أ ب}{ب - ق} = \frac{أ(ب - ق)}{ب - ق} = أ$$

$$\therefore أ = حـ_1 - \frac{أ_1جـ_2}{أ_2} \quad ....(١٥-١٣)$$

(حـ - أ) = أ١ (ب - ق)

∴ حـ = أ١ (ب - ق) + أ

$$= أ_1 \left(\frac{جـ_2}{أ_1} - \frac{جـ_2}{أ_2} \right) + حـ_1 - \frac{أ_1جـ_2}{أ_2}$$

$$= \frac{أ_1جـ_2}{أ_1} - \frac{أ_1جـ_2}{أ_2} + جـ_1 - \frac{أ_1جـ_2}{أ_2}$$

$$حـ = حـ_1 - \frac{أ_1جـ_2}{أ_2} \quad ....(١٥-١٤)$$

وهكذا حددنا قيم أ ، ب ، حـ ، هـ ، ق ، م ، كمجاهيل بدلالة القيم المعلومة للمعاملات أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، حـ١ ، حـ٢ ، حـ٣ . وفى هذه الحالة يمكن التعرف على كلٍ من دالتي الطلب والعرض . ويلاحظ في حالة النموذج تام التعريف أنه يوجد قيمة وحيدة لكل معلمة من المعلمات المقدرة للنموذج .

(١٥-٢-٣) النماذج زائدة التعريف :

يلاحظ في حالة النموذج زائد التعريف أن عدد معاملات الصيغ المختصرة يكون أكبر من عدد المجاهيل المراد تقديرها بالنموذج الأصلي . ويترتب على ذلك أن يكون هناك أكثر من قيمة لبعض المعلمات المقدرة . ولتوضيح ذلك افترض أن نموذج السوق يأخذ الصيغة التالية :

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{أ} + \text{ب ث} + \text{م ل} + \text{ن ر} + \text{ع}_{1}$$

$$\text{ك}_{\text{ع}} = \text{حـ} + \text{ق ث} + \text{هـ ف} + \text{ع}_{2} \quad \text{.........(١٥-١٥)}$$

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ك}_{\text{ع}}$$

حيث ر = الثروة ، وهى أحد العوامل التي تؤثر على طلب المستهلك بجانب الدخل .

وفي هذه الحالة يمكن الحصول على الصيغ المختصرة كما يلي :

$$\text{أ} + \text{ب ث} + \text{م ل} + \text{ن ر} + \text{ع}_{1} = \text{حـ} + \text{ق ث} + \text{هـ ف} + \text{ع}_{2}$$

$$(\text{ب ث} - \text{ق ث}) = (\text{حـ} - \text{أ}) + \text{هـ ف} - \text{م ل} - \text{ن ر} + (\text{ع}_{2} - \text{ع}_{1})$$

$$\text{ث} = \frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} - \frac{\text{ن}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ر} + \frac{\text{ع}_{2} - \text{ع}_{1}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \text{...(١٥-١٦)}$$

$$\text{ث} = \text{أ}_{1} + \text{أ}_{2}\text{ف} + \text{أ}_{3}\text{ل} + \text{أ}_{4}\text{ر} + \text{و}_{1}$$

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 F + \alpha_3 Y + \alpha_4 R + W_1$$

وبالتعويض من (١٥-١٦) في دالة الطلب أو دالة العرض بالنسق (١٥-١٥) نحصل على :

$$\text{ك} = \text{أ} + \text{ب}\left(\frac{\text{حـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} - \frac{\text{ن}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ر} + \frac{\text{ع}_{2} - \text{ع}_{1}}{\text{ب} - \text{ق}}\right) + \text{م ل} + \text{ن ر} + \text{ع}_{1}$$

$$\text{ك} = \frac{\text{أ ب} - \text{أ ق}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب حـ} - \text{أ ب}}{\text{ب} - \text{ق}} + \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ف} - \frac{\text{ب م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} - \frac{\text{ب ن}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ر} + \frac{\text{ب ع}_{2} - \text{ب ع}_{1}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

$$+ \frac{\text{ب م} - \text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ل} + \frac{\text{ب ن} - \text{ق ن}}{\text{ب} - \text{ق}}\text{ر} + \frac{\text{ب ع}_{1} - \text{ق ع}_{1}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

$$ك = \frac{ب حـ - أق}{ب - ق} + \frac{ب هـ}{ب - ق} ف - \frac{ق م}{ب - ق} ل - \frac{ق ن}{ب - ق} ر + \frac{ب ع_2 - ق ع_1}{ب - ق}$$

$$ك = حـ_1 + حـ_2 ف + حـ_3 ل + حـ_4 ر + و_2 \quad .... (15-17)$$

$$Q = C_1 + C_2 F + C_3 Y + C_4 R + W_2$$

وتمثل بذلك كلٍ من (١٥–١٦) ، (١٥–١٧) الصيغ المختصرة للنموذج . وتبلغ معاملات الصيغ المختصرة ثمانية ، وهى كما يلي :

$$أ_1 = \frac{حـ - أ}{ب - ق} \text{ ، } أ_2 = \frac{هـ}{ب - ق} \text{ ، } أ_3 = \frac{- م}{ب - ق} \text{ ، } أ_4 = \frac{- ن}{ب - ق}$$

$$حـ_1 = \frac{ب حـ - أق}{ب - ق} \text{ ، } حـ_2 = \frac{ب هـ}{ب - ق} \text{ ، } حـ_3 = \frac{- ق م}{ب - ق} \text{ ، } حـ_4 = \frac{- ق ن}{ب - ق}$$

وبجمع البيانات عن المتغيرات ث ، ل ، ك ، ر ، ف واستخدامها في تقدير دوال الصيغ المختصرة (١٥–١٦) ، (١٥–١٧) يمكن تحديد قيم المعاملات $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، $أ_4$ ، $حـ_1$ ، $حـ_2$ ، $حـ_3$ ، $حـ_4$. وتمثل هذه معاملات القيم المعلومة بالنموذج . وبالنظر لنموذج السوق في صورته الأصلية (١٥–١٥) نجد أن المعلمات المراد تقديرها والتي تمثل المجاهيل في هذه الحالة عددها سبعة فقط وهى أ ، ب ، ن ، م ، حـ ، ق ، هـ . ونظراً لوجود ثماني معاملات معلومة وسبعة مجاهيل يقال أن النموذج زائد التعريف ، وذلك لأن بعض المعلمات سوف يوجد لها أكثر من قيمة . ومن ثم فإن المعلمات لن تكون وحيدة القيمة في هذه الحالة . فعلى سبيل المثال نجد أن المعلمة الانحدارية للسعر في دالة العرض (ق) يوجد لها أكثر من قيمة حيث :

$$ق أ_3 = \frac{- ق م}{ب - ق} \quad \therefore ق أ_3 = حـ_3 \text{ ، ومن ثم } ق = \frac{حـ_3}{أ_3} \quad .... (15-18)$$

ومن ناحية أخرى :

$$ق\,أ_{٤} = \frac{-ن\,ق}{ب-ق} \quad \therefore\ ق\,أ_{٤} = حـ_{٤} \text{ ، ومن ثم } ق = \frac{جـ_{٤}}{أ_{٤}} \quad ..(١٥-١٩)$$

ولا يوجد هناك ما يضمن أن تكون القيمتين $\frac{جـ_{٣}}{أ_{٣}}$ ، $\frac{جـ_{٤}}{أ_{٤}}$ متساويتين . ولأن (ق) تظهر في المقام بالنسبة لكل معاملات الصيغة المختصرة فإن عدم وجود قيمة وحيدة لها يسبب مشكلة عند حساب قيم كل المعلمات الأخرى . ومن ثم فإن دالة العرض في هذه الحالة تكون دالة غير معرفة ذلك لأن المعلومات المتاحة عنها أكثر من اللازم . ولا يعد أسلوب الصيغ المختصرة أسلوباً ملائماً لتقدير المعلمات إلا في حالة واحدة هي عندما يكون النموذج تام التعريف . أما إذا كان النموذج ناقص أو زائد التعريف فإن هذا الأسلوب لا يصبح ملائماً لتقدير قيم وحيدة لمعلمات النموذج .

ومن الطرق الأخرى التي تستخدم في تقدير المعلمات في حالة النموذج زائد التعريف طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين Two Stage Least Squares Method ، ومثل هذه الطريقة تساعد على تقدير قيم وحيدة للمعلمات . ووفقاً لهذه الطريقة نقوم بالحصول على الصيغة المختصرة للسعر وهى :

$$ث = أ_{١} + أ_{٢}\,ف + أ_{٣}\,ل + أ_{٤}\,ر + و_{١}$$

ثم نقوم بتقدير هذه الصيغة باستخدام أسلوب المربعات الصغرى العادية وذلك كمرحلة أولى فنحصل على قيم محددة للمعاملات $\hat{أ}_{١}$ ، $\hat{أ}_{٢}$ ، $\hat{أ}_{٣}$ ، $\hat{أ}_{٤}$. وبمعرفة هذه المعاملات يمكن تحديد القيم المقدرة للسعر عند المستويات المختلفة للمتغيرات : ف ، ل، ر . وباختصار نجد أن :

$$ث = \hat{ث} + و_{١} \quad \text{حيث} \quad \hat{أ}_{١} + \hat{أ}_{٢}\,ف + \hat{أ}_{٣}\,ل + \hat{أ}_{٤}\,ر = \hat{ث}$$

وفي المرحلة الثانية نقوم بالتعويض عن ث بقيمتها في دوال الطلب والعرض الأصلية حيث :

$$ك\,ط = أ + ب\,(\hat{ث} + و_{١}) + م\,ل + ن\,ر + ع_{١}$$

$ك ع = حـ + ق (\hat{ث} + و_١) + هـ ف + ٤_٢$

أي أن :

$ك ط = أ + ب \hat{ث} + م ل + ن ر + (٤_١ + ب و_١)$

$ك ع = حـ + ق \hat{ث} + هـ ف + (٤_٢ + ق و_٢)$

ومنها نحصل على :

$ك ط = أ + ب \hat{ث} + م ل + ن ر + ز_١$	(١٥–٢٠)
$ك ع = حـ + ق \hat{ث} + هـ ف + ز_٢$	(١٥–٢١)

حيث : $ز_١ = (٤_١ + ب و_١)$ الحد العشوائي بدالة الطلب .

$ز_٢ = (٤_٢ + ق و_١)$ الحد العشوائي بدالة العرض .

ثم نقوم بتقدير دوال الانحدار (١٥–٢٠) ، (١٥–٢١) مرة ثانية باستخدام طريقة المربعات العادية لتحديد القيم المقدرة لمعلمات دالتي الطلب والعرض وذلك من خلال بيانات عن $\hat{ث}$ المقدرة في المرحلة الأولى بدلاً من ث المشاهدة . ويلاحظ في هذا الصدد أن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وإن كانت تساعد على التعرف على النموذج زائد التعريف إلا أنها لا تساعد على تقدير معلمات النموذج ناقص التعريف .

المبحث الثالث

شروط التعرف

لقد أوضحنا في المبحث السابق كيف نختبر مدى قابلية النموذج ككل للتعرف باستخدام أسلوب الصيغ المختصرة . ولكن كثيراً ما يحتوى النموذج على بعض الدوال التي يمكن التعرف عليها ، والبعض الآخر الذي لا يمكن التعرف عليه . ومن الأمثلة على ذلك نموذج السوق التالي:

ك ط = أ + ب ث + م ل + ع ١ $Q_d = \alpha + \beta P + eY + u_1$

ك ع = حـ + ق ث + ع ٢ $Q_s = C + kP + u_2$

ك ط = ك ع $Qd = Qs$

فبالحصول على الصيغ المختصرة لهذا النموذج نجد أن :

أ + ب ث + م ل + ع ١ = حـ + ق ث + ع ٢

ب ث − ق ث = (حـ − أ) − م ل + (ع ٢ − ع ١)

ث = (جـ - أ) / (ب - ق) − م / (ب - ق) ل + (ع ٢ - ع ١) / (ب - ق) .... (١٥−٢٢)

ث = أ ١ + أ ٢ ل + و $P = \alpha_1 + \alpha_2 Y + W_1$

وبالتعويض من (١٥−٢٢) في دالة الطلب نحصل على :

ك = أ + ب [(جـ - أ) / (ب - ق) − م / (ب - ق) ل + (ع ٢ - ع ١) / (ب - ق)] + م ل + ع ١

ك = (أ ب - أ ق) / (ب - ق) + (ب حـ - أ ب) / (ب - ق) − (ب م) / (ب - ق) + (ب ع ٢ - ب ع ١) / (ب - ق) + (ب ع ١ - ق ع ١) / (ب - ق) + (م ب - م ق) / (ب - ق)

ك = (ب جـ - أ ق) / (ب − ق) − (م ق) / (ب − ق) ل + (ب ع ٢ − ق ع ١) / (ب − ق) ....(١٥ − ٢٣)

ك = جـ ١ + جـ ٢ ل + و ٢ $Q = C_1 + C_2 Y + W_1$

ويلاحظ في هذه الحالة أنه وإن كانت معاملات الصيغ المختصرة أربعة :

$$\text{أ}_1 = \frac{\text{هـ} - \text{أ}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{أ}_2 = \frac{-\text{م}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{جـ}_1 = \frac{\text{ب جـ} - \text{أ ق}}{\text{ب} - \text{ق}} \text{ ، } \text{جـ}_2 = \frac{-\text{م ق}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

إلا أن عدد المعلمات المجهولة بنموذج السوق التي تحتاج لتقدير هي خمسة : أ ، ب ، م ، جـ ، ق ، ومن ثم فإن هذا النموذج يعتبر ناقص التعريف . ولكن بالرغم من ذلك فإنه من الممكن التعرف على بعض دواله وإن كان ليس من الممكن التعرف على البعض الآخر . فمن الملاحظ أنه يمكن التعرف على دالة العرض في هذه الحالة ومن ثم تقدير معلماتها . غير أنه ليس من الممكن التعرف على دالة الطلب . وفى هذا الصدد نجد أن معلمات دالة العرض يمكن تقديرها كالتالي بعد تقدير معاملات الصيغ المختصرة :

$$\text{ق أ}_2 = \frac{-\text{ق م}}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \therefore \text{ق أ}_2 = \text{جـ}_2 \text{ ومن ثم } \text{ق} = \frac{\text{جـ}_2}{\text{أ}_2} \quad \text{...(١٥-٢٤)}$$

$$\text{ق أ}_1 = \frac{\text{ق هـ} - \text{أ ق}}{\text{ب} - \text{ق}}$$

$$\therefore \text{جـ}_1 - \text{ق أ}_1 = \frac{\text{ب هـ} - \text{أ ق} - \text{ق هـ} + \text{أ ق}}{\text{ب} - \text{ق}} = \frac{\text{ب جـ} - \text{ق جـ}}{\text{ب} - \text{ق}} = \frac{\text{جـ}(\text{ب} - \text{ق})}{\text{ب} - \text{ق}} \quad \text{.......(١٥-٢٥)}$$

$$\therefore \text{جـ} = \text{جـ}_1 - \text{ق أ}_1$$

وهكذا يمكن تقدير معلمات دالة العرض دون دالة الطلب .

ولكن إذا كانت بعض دوال النموذج يمكن أن تكون غير معرفة ، في حين يكون البعض الآخر معرفاً ، فإننا نصبح في حاجة لمعرفة المعايير التي يمكن من خلالها تحديد ما إذا كانت دالة ما معرفة أم غير معرفة . وتسمى هذه المعايير بشروط التعرف وهى تتمثل في اثنتين :

(١) شرط الرتبة The Order Condition

(٢) شرط المرتبة The Rank Condition

(١٤-٣-١) شرط الرتبة

بالنسبة لأي معادلة حتى تكون معرفة يجب أن يكون العدد الكلى للمتغيرات المستبعدة منها (التي لا تظهر فيها ولكن تظهر في معادلات أخرى بالنموذج)، سواء أكانت متغيرات داخلية أم خارجية ، مساوياً أو أكبر من عدد معادلات النموذج مطروحاً منه واحد .

فإذا كان :

عدد معادلات النموذج = عدد المتغيرات الداخلية = م (m)

العدد الكلى لمتغيرات النموذج (داخلية وخارجية) = ك (K)

عدد المتغيرات (الداخلية والخارجية) بالمعادلة موضع التعرف = ف (F)

عدد المتغيرات المستبعدة أو الغائبة من المعادلة محل التعرف = ك – ف (K- F)

فإن شرط الرتبة يصبح هو :

(ك – ف) ≥ م – ١ ....(١٥ – ٢٦)

$$(K-F)\geq m-1$$

ويعتبر شرط الرتبة ضرورياً للتعرف على معادلة ما من معادلات النموذج ، ولكنه لا يعتبر شرطاً كافياً كما سنوضح فيما بعد . ويلاحظ أن وجود عدد من المتغيرات المستبعدة من الدالة محل التعرف والمدرجة في الدوال الأخرى يتيح الفرصة لإمكانية احتواء كل دال من الدوال الأخرى على متغير مختلف عن المتغيرات التي تحتوي عليها الدالة محل التعرف ، مما يجعل لها صيغة وحيدة .

ويلاحظ أن شرط الرتبة يمكن إعادة صياغته في صيغة أخرى كما يلي :

بالنسبة لمعادلة ما ، حتى يمكن التعرف عليها ، يتعين أن يكون عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة منها أكبر من عدد المتغيرات الداخلية المدرجة بها مطروحاً منه واحد .

ويمكن إثبات أن هذه الصيغة تكافئ الصيغة السابقة تماماً كما يلي :

العدد الكلى لمتغيرات النموذج = ك = م + خ $(K = m + x)$

عدد المتغيرات الداخلية بالمعادلة محل التعرف = م ١ (m_1)

عدد المتغيرات الخارجية بالمعادلة محل التعرف = خ١ (x_1)

العدد الكلى للمتغيرات بالمعادلة محل التعرف = ف = م ١ + خ١ $F = m_1 + x_1$

وبالتعويض عن " ك " في شرط الرتبة بالمعادلة (١٥-٢٦) نجد أن :

م + خ - ف ≥ م - ١ م + خ - ف ≥ م - ١ م + خ - ف ≥ م - ١

خ - ف ≥ - ١

خ ≥ ف - ١	(١٥-٢٧) ....

وبالتعويض عن ف بالمعادلة (١٥-٢٧) نجد أن :

خ ≥ (م ١ + خ ١) - ١

وبطرح " خ ١ " من الطرفين نجد أن :

خ - خ ١ ≥ م ١ - ١	$(x - x_1) \geq m_1 - 1$ .... (١٥ - ٢٨)

حيث :

(خ - خ ١) = عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من الدالة محل التعرف

م ١ = عدد المتغيرات الداخلية بالدالة محل التعرف

مثال (١٥-١)

اختبار شرط الرتبة لنموذج الدخل القومي

افترض أن نموذج الدخل القومي يأخذ الصيغة التالية :

س = أ + أ ١ ل + ع ١

ت = ب + ب ١ ل + ب ٢ ف ١ + ع ٢

ل = س + ت + ق

حيث س = الاستهلاك ، ل = الدخل ، ت = الاستثمار ، ف $_1$ = سعر الفائدة ، ق = الإنفاق الحكومي .

ويلاحظ أن المتغيرات الداخلية بالنموذج (م) = ٣ وتتمثل في الاستهلاك ، و الاستثمار و الدخل ، والمتغيرات الخارجية بالنموذج (خ) = ٢ وهى تتمثل في سعر الفائدة والإنفاق الحكومي ، وبالتالي فإن العدد الكلى لمتغيرات النموذج : ك = ٥ .

ويعتبر هذا النموذج كاملاً ، حيث : عدد المعادلات = عدد المتغيرات الداخلية = ٣

ويمكن التحقق من مدى توافر شرط الرتبة لكل معادلة كما يلي :

بالنسبة لدالة الاستهلاك :

ك – ف = ٥ – ٢ = ٣

م – ١ = ٣ – ١ = ٢

ك – ف > م – ١

ومن ثم فإن شرط الرتبة لهذه الدالة يكون قد تحقق . ويمكن التأكد من ذلك باستخدام الصيغة (١٥–٢٨) :

خ – خ $_1$ = ٢ – صفر = ٢

م $_1$ – ١ = ٢ – ١ = ١

خ – خ $_1$ > م – ١

أما عن دالة الاستثمار :

ك – ف = ٥ – ٣ = ٢

م – ١ = ٣ – ١ = ٢

ك – ف = م – ١

وباستخدام الصيغة (١٥–٢٨) نجد أن :

خ – خ $_2$ = ٢ – ١

م $_2$ – ١ = ٢ – ١ = ١

خ – خ $_2$ = م $_2$ – ١

ومن ثم فإن شرط الرتبة يكون قد تحقق بالنسبة لدالة الاستثمار .

أما عن المعادلة الثالثة بنموذج الدخل القومي فهي تمثل شرط توازن لا يحتاج لتعرف بطبيعته .

(١٥-٣-٢) شرط المرتبة

ينص هذا الشرط على أنه بالنسبة لنموذج يحتوى على عدد من المعادلات "م" ، فإن أي معادلة من هذه المعادلات تكون معرفة إذا كان من الممكن إيجاد محدد واحد لا صفري على الأقل من الرتبة (م – ١) (م – ١) من معادلات المتغيرات المستبعدة من هذه المعادلة . وهذا يعنى أنه لا يكفي أن يكون عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة أكبر من عدد المتغيرات الداخلية بالمعادلة مطروحاً منه واحد حتى يمكن التعرف على المعادلة محل الاهتمام ، ولكن يتعين أن تكون المتغيرات المستبعدة من الدالة محل التعرف موزعة على كل دوال النموذج الأخرى وليست مركزة في معادلة واحدة .

ولتوضيح كيفية التحقق من شرط الرتبة نتبع الخطوات التالية على المثال السابق :

(أ) نقوم بتحويل معادلات النموذج إلى معادلات صفرية كما يلي :

− ص + ٠ ت + أ١ ل + ٠ ف١ + ٠ ق + أ + ع١ = صفر

٠ ص − ت + ب١ ل + ب٢ ف١ + ٠ ق + ب + ع٢ = صفر

ص + ت − ل + ٠ ف١ + ق + ٠ + ٠ = صفر

(ب) مع إهمال الحدود العشوائية يمكن كتابة المعلمات كما بالجدول (١٥-١) :

جدول (١٥-١)

جدول المعلمات

المتغيرات / المعادلات	س	ت	ل	ف١	ق	١
الأولى	-١	٠	أ١	٠	٠	أ
الثانية	٠	-١	ب١	ب٢	٠	ب
الثالثة	١	١	-١	٠	١	٠

(حـ) نقوم باستبعاد صف المعلمات للمعادلة المراد التعرف عليها . فإذا كنا نريد اختبار التعرف بالنسبة للمعادلة الأولى نقوم باستبعاد الصف الأول . ثم نقوم باستبعاد الأعمدة ذات المعاملات اللاصفرية التي تظهر في المعادلة المراد التعرف عليها . ومن ثم يتبقى لدينا معاملات المتغيرات المستبعدة من الدالة محل التعرف والتي تظهر في المعادلات الأخرى . ففي حالة المعادلة الأولى نستبعد العمود الأول (س) . والثالث (ل) والسادس (١) فيصبح جدول المعاملات (١٥-٢) كما يلي :

جدول (١٥-٢)

استبعاد المعاملات اللاصفرية

المتغيرات / المعادلات	س	ت	ل	ف١	ق	١
الأولى	-١	٠	أ١	٠	٠	أ
الثانية	٠	-١	ب١	ب٢	٠	ب
الثالثة	١	١	-١	٠	١	٠

(د) نحصل على جدول المعاملات المستبعدة من المعادلة محل التعرف (الأولى) كما يلي بالجدول (١٥-٣) .

جدول (١٥-٣)

المعاملات المستبعدة

المتغيرات / المعادلات	ت	$ف_١$	ق
الثانية	١-	$ب_٢$	٠
الثالثة	١	٠	١

ثم نقوم بتكوين محدد أو مجموعة من المحددات من الرتبة (م - ١) (م - ١) ونختبر قيمتها . فإذا كان هناك محدد على الأقل قيمته غير صفرية تكون المعادلة معرفة .

وفي مثالنا هذا يمكن تكوين ثلاثة محددات من الرتبة (٣ - ١) (٣ - ١) = ٢ × ٢ :

$$\Delta ١ = \begin{vmatrix} ١- & ب_٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = (-١)(٠) - (ب_٢)(١) = -ب_٢$$

$$\Delta ٢ = \begin{vmatrix} ١- & ٠ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (-١) - (٠) = -١$$

$$\Delta ٣ = \begin{vmatrix} ب_٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = (ب_٢) - (٠) = ب_٢$$

وبافتراض أن $ب_٢ \neq$ صفر ، إذن هناك ٣ محيددات من الرتبة ٢ × ٢ لها قيم غير صفرية ومن ثم يتحقق شرط المرتبة للمعادلة الأولى .

ويعتبر شرط المرتبة شرطاً كافياً . ويلاحظ في هذا الصدد أنه إذا تحقق شرط المرتبة بالنسبة لمعادلة ما وكانت : (ك - ف) = (م - ١) فإن المعادلة تكون تامة التعريف، أما إذا كانت (ك - ف) > (م - ١) فإن المعادلة تكون زائدة التعريف. ويلاحظ من المثال السابق أن دالة الاستهلاك زائدة التعريف حيث (ك - ف) > (م - ١) .

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

$\Delta_1 =$ [illegible]

$\Delta_2 =$ [illegible]

$\Delta_3 =$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

الفصل السادس عشر

طرق تقدير النماذج متعددة المعادلات

Multi - Equations Methods

يوجد هناك نوعان من طرق تقدير النماذج متعددة المعادلات ، أولهما طرق المعادلة الواحدة ومن أمثلتها طريقة المربعات الصغرى العادية ، وطريقة الصيغ المختصرة ، وطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين ، وطرق التقدير المختلط ، وثانيهما طرق النموذج ومن أهمها طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل . وسوف نتعرض في هذا الفصل لهذين النوعين من الطرق في مبحثين مستقلين :

المبحث الأول : طرق المعادلة الواحدة .

المبحث الثاني : طرق النموذج .

المبحث الأول

طرق المعادلة الواحدة

Single - Equation Methods

تتسم هذه الطرق بأنها تقدر كل معادلة من معادلات النموذج بصورة مستقلة، ومن ثم فإنها تأخذ في الحسبان القيود المفروضة على كل معادلة والمعلومات التي تتضمنها المعادلة بغض النظر عن القيود أو المعلومات التي تتضمنها المعادلات الأخرى .

ويسمى هذا النوع من الطرق بطرق المعلومات المحدودة Limited Information Methods . ومن أهم هذه الطرق :

١ – طريقة المربعات الصغرى العادية **Ordinary Least Squares (OLS)**

٢ – طريقة الصيغ المختصرة **Reduced - Form Method**

٣ – طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين **Two-Stage Least Squares (2SLS)**

٤– طرق التقدير المختلط **Mixed Estimation Methods**

(١٦–١–١) طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)

لقد تعرضنا من قبل بالشرح المفصل لطريقة المربعات الصغرى العادية ، وأهم الافتراضات التي تقوم عليها ، وكيفية استخدامها في التقدير . ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير النماذج ذات المعادلات المتتابعة وذلك عن طريق تقدير كل معادلة من معادلات النموذج بصورة مستقلة . أما في الحالات التي تكون فيها معادلات النموذج مرتبطة مع بعضها البعض بطريقة أو بأخرى فإن طريقة المربعات الصغرى العادية لا تصبح ملائمة للقياس على النحو الذي فصلناه سابقاً .

(١٦–١–٢) طريقة الصيغ المختصرة

تسمى هذه الطريقة أيضاً بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة Indirect Least Squares Method (ILS) . وتستخدم هذه الطريقة في حالة النماذج تامة

التعريف Exactly Identified ، ولكنها لا تصلح في حالة النماذج ناقصة التعريف Underidentified أو زائدة التعريف Overidentified . ويلاحظ أن من المشاكل التي تعاني منها النماذج ذات المعادلات الآنية أن المتغيرات الداخلية يكون بينها علاقات تبادلية ذات اتجاهين كما هو الحال في نموذج السوق مثلاً ، حيث يؤثر السعر على الكمية ، كما تؤثر الكمية على السعر ، الأمر الذي يؤدى لوجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والحدود العشوائية على النحو الذي شرحناه من قبل . وطريقة المربعات الصغرى الغير مباشرة تجعل المتغيرات الداخلية دالة في المتغيرات سابقة التحديد فتقضى على التداخل بين المتغيرات الداخلية في العلاقات . ولقد تعرضنا لهذه الطريقة بالشرح من قبل في فصل التعرف . وسوف نأخذ مثالاً رقمياً هنا ونحاول استخدام هذه الطريقة في القياس من خلاله .

مثال (١٦-١)
تقدير النموذج باستخدام طريقة الصيغ المختصرة

افترض أن نموذج السوق يأخذ الصيغة التالية :

ك$_{ط}$ = أ + ب ث + م ل + ع$_{1}$	دالة الطلب	
ط$_{ع}$ = جـ + ق ث + هـ ف + ع$_{2}$	دالة العرض	...... (١٦-١)
ك$_{ط}$ = ك ع	شرط التوازن	

حيث : ك$_{ط}$ = الكمية المطلوبة ، ك$_{ع}$ = الكمية المعروضة ، ث = ثمن السلعة وهذه هي المتغيرات الداخلية ، ل = الدخل ، ف = سعر العنصر الأساسي في إنتاج السلعة، وهما متغيران خارجيان .

ويلاحظ هنا أن هذا النموذج كامل حيث يحتوى على عدد من المعادلات يساوى عدد المتغيرات الداخلية = ٣ ، كما أنه معرف تعريف تام كما اتضح من قبل . ولتقدير معادلات هذا النموذج باستخدام بيانات جدول (١٦-١) وفقاً لطريقة الصيغ المختصرة نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بالحصول على الصيغ المختصرة للمتغيرين الداخليين ك ($ك_{ط}$ = $ك_{ع}$) ، ث وذلك باستخدام نفس الأسلوب المتبع في فصل التعرف السابق ، فنحصل على الصيغتين التاليتين :

$$ث = أ_{١} + أ_{٢} ف + أ_{٣} ل + و_{١} \quad \text{.............. (١٦-٢)}$$

$$ك = جـ_{١} + جـ_{٢} ف + جـ_{٣} ل + و_{٢} \quad \text{.............. (١٦-٣)}$$

حيث :

$$أ_{١} = \frac{جـ - أ}{ب - ق} \quad ، \quad أ_{٢} = \frac{هـ}{ب - ق} \quad ، \quad أ_{٣} = \frac{-م}{ب - ق}$$

$$جـ_{١} = \frac{ب جـ - أق}{ب - ق} \quad ، \quad جـ_{٢} = \frac{ب هـ}{ب - ق} \quad ، \quad جـ_{٣} = \frac{-ق م}{ب - ق}$$

وحيث أن لدينا ٦ معلمات للصيغ المختصر هي $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، $جـ_{١}$ ، $جـ_{٢}$ ، $جـ_{٣}$ و ٦ معلمات مجهولة بنموذج السوق الأصلي هي أ ، ب ، م ، جـ ، ق ، هـ ، فإن هذا النموذج يكون تام التعريف .

جدول (١٦-١)

بيانات السوق

المشاهدات	الكمية (ك) بالطن	الثمن (ث) بالجنيه	متوسط الدخل (ل) بالمائة	ثمن العنصر (ف) بالجنيه
١	٧	٢	١٢	١
٢	٨	٣	١٤	٢
٣	٩	٥	١٥	٣
٤	١١	٧	٢١	٥
٥	١٥	٨	٢٣	٦
٦	٢٠	٦	٢٥	٧
٧	٢٦	٩	٣٠	٨
٨	٢٩	٦	٣٥	٨
٩	٣٥	٩	٤٠	٩
١٠	٤٠	١٥	٤٥	١١

(٢) نقوم باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معلمات الصيغ المختصرة بالمعادلتين (١٦-٢) ، (١٦-٣) باستخدام البيانات المعطاة بالجدول (١٦-١) عن ث ، ف ، ل ، ك. ويلاحظ من (١٦-٢) ، (١٦-٣) أن ث ، ك كمتغيرين داخليين يتحددان بمتغيرين خارجيين هما : ف ، ل .

وتتم عملية الحسابات كما يلي :

(أ) نحصل على المتوسطات :

$$\bar{ك} = \sum ك \div ن = ٢٠٠ \div ١٠ = ٢٠$$

$$\bar{ث} = \sum ث \div ن = ٧٠ \div ١٠ = ٧$$

$$\bar{ف} = \sum ف \div ن = ٦٠ \div ١٠ = ٦$$

$$\bar{ل} = \sum ل \div ن = ٢٦٠ \div ١٠ = ٢٦$$

(ب) ثم نحصل على انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية كما بالجدول (١٦-٢) ،

حيث : $ك_1 = ك - \bar{ك}$ ، $ث_1 = ث - \bar{ث}$

$ف_1 = ف - \bar{ف}$ ، $ل_1 = ل - \bar{ل}$

جدول (١٦-٢) - بيانات السوق

ك	ث	ف	ل	ك١	ث١	ف١	ل١	ك١ف١	ك١ل١	ث١ف١	ث١ل١	ف١²	ل١²	ف١ل١
٧	٢	١	١٢	-١٣	-٥	-٥	-١٤	٦٥	١٨٢	٢٥	٧٠	٢٥	١٩٦	٧٠
٨	٣	٢	١٤	-١٢	-٤	-٤	-١٢	٤٨	١٤٤	١٦	٤٨	١٦	١٤٤	٤٨
٩	٥	٣	١٥	-١١	-٢	-٣	-١١	٣٣	١٢١	٦	٢٢	٩	١٢١	٣٣
١١	٧	٥	٢١	-٩	٠	-١	-٥	٩	٤٥	٠	٠	١	٢٥	٥
١٥	٨	٦	٢٣	-٥	١	٠	-٣	٠	١٥	٠	-٣	٠	٩	٠
٢٠	٦	٧	٢٥	٠	-١	١	-١	٠	٠	-١	١	١	١	-١
٢٦	٩	٨	٣٠	٦	٢	٢	٤	١٢	٢٤	٤	٨	٤	١٦	٨
٢٩	٦	٨	٣٥	٩	-١	٢	٩	١٨	٨١	-٢	-٩	٤	٨١	١٨
٣٥	٩	٩	٤٠	١٥	٢	٣	١٤	٤٥	٢١٠	٦	٢٨	٩	١٩٦	٤٢
٤٠	١٥	١١	٤٥	٢٠	٨	٥	١٩	١٠٠	٣٨٠	٤٠	١٥٢	٢٥	٣٦١	٩٥
مجـ ك = ٢٠٠	مجـ ث = ٧٠	مجـ ف = ٦٠	مجـ ل = ٢٦٠					مجـ ك١ف١ = ٣٣٠	مجـ ك١ل١ = ١٢٠٢	مجـ ث١ف١ = ٩٤	مجـ ث١ل١ = ٣١٧	مجـ ف١² = ٩٤	مجـ ل١² = ١١٥٠	مجـ ف١ل١ = ٣١٨

(جـ) ونقوم بتقدير الصيغة المختصرة (١٦-٢) باستخدام المعادلات الطبيعية التالية:

$$\sum \text{ث}_١ \text{ف}_١ = \text{أ}_٢ \sum \text{ف}_١^٢ + \text{أ}_٣ \sum \text{ف}_١ \text{ل}_١$$

$$\sum \text{ث}_١ \text{ل}_١ = \text{أ}_٢ \sum \text{ف}_١ \text{ل}_١ + \text{أ}_٣ \sum \text{ل}_١^٢$$

وبالتعويض عن هذه المعادلات من الجدول (١٦-٢) نحصل على :

$$٩٤\,\text{أ}_٢ + ٣١٨\,\text{أ}_٣ = ٩٤$$

$$٣١٨\,\text{أ}_٢ + ١١٥٠\,\text{أ}_٣ = ٣١٧$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٩٤ & ٣١٨ \\ ٣١٨ & ١١٥٠ \end{vmatrix} = ١٠٨١٠٠ - ١٠١١٢٤ = ٦٩٧٦$$

$$\Delta\text{أ}_٢ = \begin{vmatrix} ٩٤ & ٣١٨ \\ ٣١٧ & ١١٥٠ \end{vmatrix} = ١٠٨١٠٠ - ١٠٠٨٠٦ = ٧٢٩٤$$

$$\Delta\text{أ}_٣ = \begin{vmatrix} ٩٤ & ٩٤ \\ ٣١٨ & ٣١٧ \end{vmatrix} = ٢٩٧٩٨ - ٢٩٨٩٢ = -٩٤$$

$$\therefore \text{أ}_٢ = \frac{\Delta\text{أ}_٢}{\Delta} = \frac{٧٢٩٤}{٦٩٧٦} = ١{,}٠٤٥$$

$$\text{أ}_٣ = \frac{\Delta\text{أ}_٣}{\Delta} = \frac{-٩٤}{٦٩٧٦} = -٠{,}٠١٣٥$$

$$\text{أ}_١ = \bar{\text{ث}} - \text{أ}_٢\,\bar{\text{ف}} - \text{أ}_٣\,\bar{\text{ل}}$$

$$\text{أ}_١ = ٧ - ١{,}٠٤٥\,(٦) + ٠{,}٠١٣٥\,(٢٦) = ٧ - ٦{,}٢٧ + ٠{,}٣٥١ = ١{,}٠٨١$$

(د) ثم نقوم بتقدير الصيغة المختصرة (١٦-٣) باستخدام المعادلات الطبيعية التالية :

$$\sum \text{ك}_١ \text{ف}_١ = \text{جـ}_٢ \sum \text{ف}_١^٢ + \text{جـ}_٣ \sum \text{ف}_١ \text{ل}_١$$

$$\sum \text{ك}_١ \text{ل}_١ = \text{جـ}_٢ \sum \text{ف}_١ \text{ل}_١ + \text{جـ}_٣ \sum \text{ل}_١^٢$$

وبالتعويض من الجدول (١٦-٢) في المعادلات الطبيعية السابقة نحصل على :

٩٤ جـ$_{٢}$ + ٣١٨ جـ$_{٣}$ = ٣٣٠

٣١٨ جـ$_{٢}$ + ١١٥٠ جـ$_{٣}$ = ١٢٠٢

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٩٤ & ٣١٨ \\ ٣١٨ & ١١٥٠ \end{vmatrix} = ٦٩٧٦$$

$$\Delta_{جـ٢} = \begin{vmatrix} ٣٣٠ & ٣١٨ \\ ١٢٠٢ & ١١٥٠ \end{vmatrix} = ٣٧٩٥٠٠ - ٣٨٢٢٣٦ = -٢٧٣٦$$

$$\Delta_{جـ٣} = \begin{vmatrix} ٩٤ & ٣٣٠ \\ ٣١٨ & ١٢٠٢ \end{vmatrix} = ١١٢٩٨٨ - ١٠٤٩٤٠ = ٨٠٤٨$$

$$جـ_{٢} = \frac{\Delta_{جـ٢}}{\Delta} = \frac{-٢٧٣٦}{٦٩٧٦} = -٠,٣٩٢$$

$$جـ_{٣} = \frac{\Delta_{جـ٣}}{\Delta} = \frac{٨٠٤٨}{٦٩٧٦} = ١,١٥٤$$

جـ$_{٠}$ = $\bar{ك}$ − جـ$_{٢}$ $\bar{ف}$ − جـ$_{٣}$ $\bar{ل}$

جـ$_{٠}$ = ٢٠ + ٠,٣٩٢ (٦) −١,١٥٤ (٢٦) = ٢٠ + ٢,٣٥٢ − ٣٠ = −٧,٦٤

(هـ) يتضح مما سبق أن معادلتي الصيغ المختصرة تصبحان كما يلي :

ث = ١,٠٨١ + ١,٠٤٥ ف − ٠,٠١٣٥ ل
ك = −٧,٦٤ − ٠,٣٩٢ ف + ١,١٥٤ ل .... (١٦-٤)

ومن الممكن تقدير معلمات النموذج الأصلي (١٦-١) باستخدام المعلمات المقدرة بالنموذج (١٦-٤) حيث :

$$\text{ق} = \frac{\text{ج}_{\text{٣}}}{\text{أ}_{\text{٣}}} = \frac{\text{١,١٥٤}}{\text{-٠,٠١٣٥}} = \text{-٨٥,٤٨}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ج}_{\text{٢}}}{\text{أ}_{\text{٢}}} = \frac{\text{-٠,٣٩٢}}{\text{١,٠٤٥}} = \text{-٠,٣٧٥}$$

$$\text{هـ} = \text{ج}_{\text{٢}} - \frac{\text{أ}_{\text{٢}}\,\text{ج}_{\text{٣}}}{\text{أ}_{\text{٣}}} = \text{-٠,٣٩٢} - \frac{\text{١,٠٤٥ (١,١٥٤)}}{\text{-٠,٠١٣٥}}$$

$$= \text{-٠,٣٩٢} + \text{٨٩,٣٣} = \text{٨٨,٩٣٨}$$

$$\text{م} = \text{ج}_{\text{٣}} - \frac{\text{أ}_{\text{٣}}\,\text{ج}_{\text{٢}}}{\text{أ}_{\text{٢}}} = \text{١,١٥٤} - \frac{\text{(-٠,٠١٣٥)(-٠,٣٩٢)}}{\text{١,٠٤٥}}$$

$$= \text{١,١٥٤} - \text{٠,٠٠٥} = \text{١,١٤٩}$$

$$\text{أ} = \text{ج}_{\text{١}} - \frac{\text{أ}_{\text{١}}\,\text{ج}_{\text{٢}}}{\text{أ}_{\text{٢}}} = \text{-٧,٦٤} - \frac{\text{١,٠٨١ (-٠,٣٩٢)}}{\text{١,٠٤٥}}$$

$$= \text{-٧,٦٤} + \text{٠,٤٠٥} = \text{-٧,٢٣٥}$$

$$\text{جـ} = \text{ج}_{\text{١}} - \frac{\text{أ}_{\text{١}}\,\text{ج}_{\text{٣}}}{\text{أ}_{\text{٣}}} = \text{-٧,٦٤} - \frac{\text{١,٠٨١ (١,١٥٤)}}{\text{-٠,٠١٣٥}}$$

$$= \text{-٧,٦٤} + \text{٩٢,٤٠٥} = \text{٨٤,٧٦٥}$$

∴ نموذج السوق الأصلي يصبح :

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{-٧,٢٣٥} - \text{٠,٣٧٥ ث} + \text{١,١٤٩ ل}$$

$$\text{ك}_{\text{ع}} = \text{٨٤,٧٦٥} - \text{٨٥,٥ ث} + \text{٨٨,٩٤ ف} \qquad \text{....... (١٦-٥)}$$

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ك}_{\text{ع}}$$

(١٦-١-٣) طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين

تستخدم طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في تقدير النماذج أو المعادلات زائدة التعريف . ولما كان من بين المشاكل التي تعانى منها النماذج ذات

المعادلات الآنية وجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والحد العشوائي ، فإن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تحاول إزالة هذه المشكلة عن طريق إيجاد متغير وسيط Instrumental variable يستخدم بدلاً من المتغير التفسيري المرتبط بالحد العشوائي ، على أن يتوفر في هذا المتغير الوسيط عدد من الخصائص :

(أ) أن يكون المتغير الوسيط مرتبطاً ارتباطاً قوياً مع المتغير التفسيري الأصلي حتى يصلح لأن يكون ممثلاً عنه أو بديلاً له .

(ب) أن يكون المتغير الوسيط غير مرتبط مع الحد العشوائي .

وحتى نتعرف على كيفية استخدام هذه الطريقة دعنا نأخذ مثالاً :

افترض أننا نريد تقدير النموذج التالي :

$$ص_{١} = أ_{٠} + أ_{١} ص_{٢} + أ_{٢} س_{١} + أ_{٤} س_{٢} + ع_{١}$$

$$ص_{٢} = ب_{٠} + ب_{١} ص_{١} + ع_{٢} \quad .... (١٦-٦)$$

حيث :

$ص_{١}$ = الدخل الكلي

$ص_{٢}$ = كمية النقود

$س_{١}$ = الإنفاق الاستثماري الخاص

$س_{٢}$ = الإنفاق الحكومي

ومن ثم فإن المعادلة الأولى تشير إلى أن الدخل الكلي في المجتمع يتحدد بكمية النقود ، وحجم الاستثمار الخاص ، والإنفاق الحكومي . وتشير المعادلة الثانية إلى أن كمية النقود $ص_{٢}$ تتحدد على أساس حجم الدخل الكلي في المجتمع ($ص_{١}$) . ويلاحظ من هذا النموذج أن $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ متغيرين داخليين ، في حين أن $س_{١}$ ، $س_{٢}$ متغيرين خارجيين . كما يلاحظ أن هذا نموذج ذو معادلات آنية ، حيث $ص_{١}$ يتحدد بالمتغير الداخلي $ص_{٢}$ وكذلك $ص_{٢}$ يتحدد بالمتغير $ص_{١}$ في نفس الوقت . ومن ثم

فإن $ص_2$ كمتغير تفسيري بالمعادلة الأولى يرتبط مع الحد العشوائي $ع_1$ ، وكذلك الأمر بالنسبة لـ $ص_1$ كمتغير تفسيري في المعادلة الثانية ، حيث يرتبط مع الحد العشوائي $ع_2$.

وبفحص النموذج (١٦–٦) نجد أن المعادلة الأولى ناقصة التعريف ، أما المعادلة الثانية فهي زائدة التعريف . ولذلك فليس هناك سبيل لتقدير المعادلة الأولى وهي في هذه الصورة ، غير أنه من الممكن تقدير المعادلة الثانية زائدة التعريف باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين كما يلي :

المرحلة الأولى: نقوم بالحصول على الصيغة المختصرة لمعادلة المتغير التفسيري بالمعادلة الثانية وذلك بجعله دالة في المتغيرات سابقة التحديد بالنموذج ككل وهى $س_1$ ، $س_2$ ، حيث :

$ص_1 = \hat{ج}_0 + \hat{ج}_1 س_1 + \hat{ج}_2 س_2 + و_1$	.... (١٦–٧)
حيث : $ص_1 = \hat{ص}_1 + و_1$	.... (١٦–٨)
$\hat{ص}_1 = \hat{ج}_0 + \hat{ج}_1 س_1 + \hat{ج}_2 س_2$	.... (١٦–٩)

وبتقدير المعادلة (١٦–٧) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية يمكن أن نحدد القيم المقدرة للمتغير $ص_1$ ممثلة في $\hat{ص}_1$ عند المستويات المختلفة للمتغيرين $س_1$ ، $س_2$. وفي هذه الحالة يعتبر $\hat{ص}_1$ متغير وسيط يصلح لأن يكون ممثلاً للمتغير التفسيري $ص_1$ ذلك لأنه يحقق الشروط السابقة التي ذكرناها . فهو يرتبط ارتباطاً قوياً بالمتغير الأصلي $ص_1$ كما يتضح من المعادلة (١٦–٨) ، كما أنه لا يرتبط بالحد العشوائي $و_1$ ، ذلك لأن $\hat{ص}_1$ يتحدد بالمتغيرين الخارجيين $س_1$ ، $س_2$ وهما غير مرتبطين بالحد العشوائي $و_1$. ولذا نجد أن $\hat{ص}_1 = ص_1 - و_1$ ، أي أنه يمثل قيمة المتغير الأصلي $ص_1$ بعد أن استبعدنا منها أثر الحد العشوائي $و_1$.

المرحلة الثانية : نقوم بالتعويض من المعادلة (١٦–٨) في المعادلة الثانية بالنموذج (١٦–٦) التي نريد تقديرها فنحصل على :

$\text{ص}_{٢} = \text{ب}_{.} + \text{ب}_{١}(\hat{\text{ص}}_{١} + \text{و}_{١}) + \text{ع}_{٢}$

$\therefore \text{ص}_{٢} = \text{ب}_{.} + \text{ب}_{١}\,\hat{\text{ص}}_{١} + \text{ز}$ .... (١٦-١٠)

حيث $\text{ز} = (\text{ب}_{١}\,\text{و}_{١} + \text{ع}_{٢})$ وهو يمثل الحد العشوائي في معادلة كمية النقود (١٦-١٠). ويلاحظ أن كل ما حدث في المعادلة (١٦-١٠) هو أننا أحللنا المتغير الوسيط $\hat{\text{ص}}_{١}$ بدلاً من $\text{ص}_{١}$ حتى نحصل على متغير غير مرتبط مع الحد العشوائي "ز"، ثم نقوم بتقدير المعادلة (١٦-١٠) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية من خلال بيانات $\text{ص}_{٢}$ المشاهدة، $\hat{\text{ص}}_{١}$ المقدرة من المرحلة الأولى.

مثال (١٦-٢)

تقدير النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين

افترض أن البيانات المعطاة بالجدول (١٦-٣) تخص مجتمع ما، ومن ثم يمكن تطبيق المرحلتين السابقتين كما يلي:

نقوم بتقدير الصيغة المختصرة:

$\text{ص}_{١} = \hat{\text{ج}}_{.} + \hat{\text{ج}}_{١}\,\text{س}_{١} + \hat{\text{ج}}_{٢}\,\text{س}_{٢} + \text{و}_{١}$

فنحصل على:

$\text{ص}_{١} = -٤٥{,}٨١ + ٤{,}٩٢\,\text{س}_{١} + ٣{,}١٩\,\text{س}_{٢} + \text{و}_{١}$ .... (١٦-١١)

(٠,٤٨) (١,٠٤) $\text{ر}^{٢} = ٠{,}٩٨٩٧$

وبتحديد قيم $\hat{\text{ص}}_{١}$ عند المستويات المختلفة للمتغيرين $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$ باستخدام الصيغة التالية: $\hat{\text{ص}}_{١} = -٤٥{,}٨١ + ٤{,}٩٢\,\text{س}_{١} + ٣{,}١٩\,\text{س}_{٢}$ ، واستخدام القيم المقدرة $\hat{\text{ص}}_{١}$ في تقدير معادلة كمية النقود (١٦-١٠) نحصل على:

$\text{ص}_{٢} = ٦٠{,}٨٢ + ٠{,}١٦٢\,\hat{\text{ص}}_{١} + \text{ز}$ .... (١٦-١٢)

(٢,٩٨) (٠,٠٠٣٤) $\text{ر}^{٢} = ٠{,}٩٩٤٥$

جدول (١٦ – ٢)

بيانات دالة كمية النقود لمجتمع ما

السنة	الدخل الكلى ص١	كمية النقود ص٢	الاستثمار الخاص س١	الإنفاق الحكومي س٢
١٩٨٠	٥٠٣,٧	١٤٤,٢	٧٤,٨	٥٣,٥
١٩٨١	٥٢٠,١	١٤٨,٧	٧١,٧	٥٧,٤
١٩٨٢	٥٦٠,٣	١٥٠,٩	٨٣,٠	٦٣,٤
١٩٨٣	٥٩٠,٥	١٥٦,٥	٨٧,١	٦٤,٢
١٩٨٤	٦٣٢,٤	١٦٣,٧	٩٤,٠	٦٥,٢
١٩٨٥	٦٨٤,٩	١٧١,٣	١٠٨,١	٦٦,٩
١٩٨٦	٧٤٩,٩	١٧٥,٤	١٢١,٤	٧٧,٨
١٩٨٧	٧٩٣,٩	١٨٦,٩	١١٦,٦	٩٠,٧
١٩٨٨	٨٦٤,٢	٢٠١,٧	١٢٦,٠	٩٨,٨
١٩٨٩	٩٣٠,٣	٢٠٨,٧	١٣٩,٠	٩٨,٢
١٩٩٠	٩٧٧,١	٢٢١,٤	١٣٦,٣	٩٦,٢
١٩٩١	١٠٥٤,٩	٢٣٥,٣	١٥٣,٧	٩٧,٦
١٩٩٢	١١٥٨,٠	٢٥٥,٨	١٧٩,٣	١٠٤,٩
١٩٩٣	١٢٩٤,٩	٢٧١,٥	٢٠٩,٤	١٠٦,٦
١٩٩٤	١٣٩٦,٧	٢٨٣,٨	٢٠٨,٩	١١٦,٤

ويتضح من المعادلة (١٦–١٢) أن المقدرة التفسيرية للنموذج كبيرة تساوى ٩٩,٥ ٪، وأن المعلمة الانحدارية معنوية إحصائياً. وإذا قارنا النتيجة التي حصلنا عليها بالمعادلة (١٦–١٢) باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين مع النتيجة التي حصلنا عليها من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية باستخدام الصيغة الأصلية التالية :

ص٢ = ب. + ب١ ص١ + ع٢

نجد أن الأخيرة أعطت النتيجة التالية :

ص٢ = ٦٠,٤٢ + ٠,١٦٣ ص١ + ع٢ .... (١٦–١٣)

(٠,٠٠٣٣)   ر² = ٠,٩٩٤٥

ويتضح من المقارنة أن النتيجتين متماثلتين تقريباً . ولكن هذا لا يحدث في كل الحالات . ولعل السبب في تماثل النتائج في هذه الحالة هو أنه عند تقدير الصيغة المختصرة (١٦-١١) وجدنا أن ر ٢ = ٠,٩٨٩٧ الأمر الذي يعنى أن الارتباط بين ص١ ، كمتغير أصلي ، ص̂١ كمتغير وسيط قوى جداً ويكاد يكون تاماً . ومن ثم فإن التقدير باستخدام ص̂١ لم يختلف كثيراً عنه باستخدام ص١ . ولذلك نتوقع أنه كلما انخفضت " ر ٢ " لمعادلة الصيغة المختصرة ، كلما زاد الاختلاف بين تقديرات طريقتي المربعات الصغرى العادية و المربعات الصغرى ذات المرحلتين ، و العكس صحيح .

ولتعميم التحليل السابق افترض أن المعادلة زائدة التعريف تأخذ الصيغة التالية (١٦-١٤) :

ص٢ = ب٠ + ب١ ص١ + ب٢ س١ + ع٢ .... (١٦-١٤)

$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 X_1 + u_2$$

ومن ثم بتقدير الصيغة المختصرة للمتغير الداخلي ص١ لنحصل على ص̂١ ، ونعوض بها في المعادلة الأصلية (١٦-١٤) فنحصل على :

ص٢ = ب٠ + ب١ ص̂١ + ب٢ س١ + ز .... (١٦-١٥)

$$\hat{Y}_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 X_1 + W$$

ولتقدير المعادلة (١٦-١٥) نحصل على صيغة الانحرافات لهذه المعادلة :

ص٢ = ب̂١ ص̂١ + ب̂٢ س١ + ز .... (١٦-١٦)

ثم نضرب الصيغة (١٦-١٦) في ص ، ونجمع ، ثم في س ، ونجمع فنحصل على المعادلتين الطبيعيتين التاليتين :

Σ ص٢ ص̂١ = ب̂١ Σ ص̂١ ٢ + ب̂٢ Σ ص̂١ س١

Σ ص٢ س١ = ب̂١ Σ ص̂١ س١ + ب̂٢ Σ س١ ٢ . (١٦-١٧)

وبحل هاتين المعادلتين باستخدام أسلوب المحددات نجد أن المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات ذات المرحلتين كما يلي :

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sum \text{ص}_2\,\hat{\text{ص}}_1 & \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 \\ \sum \text{ص}_2\,\text{س}_1 & \sum \text{س}_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum \hat{\text{ص}}_1^2 & \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 \\ \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 & \sum \text{س}_1^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{(\sum \hat{\text{ص}}_2\,\hat{\text{ص}}_1)(\sum \text{س}_1^2) - (\sum \text{ص}_2\,\text{س}_1)(\sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1)}{\sum \hat{\text{ص}}_1^2 \sum \text{س}_1^2 - (\sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1)} \quad \text{....(16-18)}$$

$$\hat{\text{ب}}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \sum \hat{\text{ص}}_1^2 & \sum \text{ص}_2\,\hat{\text{ص}}_1 \\ \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 & \sum \text{ص}_2\,\text{س}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum \hat{\text{ص}}_1^2 & \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 \\ \sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1 & \sum \text{س}_1^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\text{ب}}_2 = \frac{(\sum \hat{\text{ص}}_1^2)(\sum \text{ص}_2\,\text{س}_1) - (\sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1)(\sum \text{ص}_2\,\hat{\text{ص}}_1)}{\sum \hat{\text{ص}}_1^2 \sum \text{س}_1^2 - (\sum \hat{\text{ص}}_1\,\text{س}_1)^2} \quad \text{.......(16-19)}$$

أما عن تباينات المعلمات المقدرة لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين فيمكن تقديرها باستخدام الصيغ التالية :

$$\text{ع}^{*2}_{\hat{\text{ب}}_1} = \text{ع}^{*2}_{\text{ز}} \frac{\sum \text{س}^2_1}{\sum \text{ص}^2_1 \sum \text{س}^2_1 - (\sum \hat{\text{ص}}_1 \text{س}_1)^2} \quad \text{..........}(16-20)$$

$$\text{ع}^{*2}_{\hat{\text{ب}}_2} = \text{ع}^{*2}_{\text{ز}} \frac{\sum \hat{\text{ص}}^2_1}{\sum \hat{\text{ص}}^2_1 \sum \text{س}^2_1 - (\sum \hat{\text{ص}}_1 \text{س}_1)^2} \quad \text{...........}(16-21)$$

حيث :

$$\text{ع}^{*2}_{\text{ز}} = \frac{\sum \text{ز}^2}{\text{ن - ك}} = \frac{\sum (\text{ص}_2 - \hat{\text{ب}}_1 \hat{\text{ص}}_1 - \hat{\text{ب}}_2 \text{س}_1)^2}{\text{ن - ك}} \quad \text{...}(16-22)$$

ملاحظات تخص طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين :

(١) يتعين توفر عدد من الافتراضات حتى تكون هذه الطريقة صالحة للتطبيق أهمها :

(أ) أن تكون العينة كبيرة لحد ما ، حيث أن القيم المقدرة باستخدام العينات الصغيرة تكون متحيزة .

(ب) يتعين أن يكون تعيين النموذج صحيحاً ولا يوجد هناك ارتباط بين المتغيرات التفسيرية في نفس المعادلة .

(٢) إذا كانت بعض معادلات النموذج ناقصة التعريف وبعضها زائدة التعريف فإن استخدام هذه الطريقة يمكّن من تقدير المعادلات زائدة التعريف بالرغم من كون المعادلات ناقصة التعريف غير قابلة للتقدير . أي أن هذه الطريقة تمكن من تقدير بعض معادلات النموذج دون حاجة للمعلومات المتوفرة عن كل معادلات النموذج .

(٣) من السهل تطبيقها حيث أن كل ما يحتاجه الباحث عند استخدامها هو عدد المتغيرات سابقة التحديد بالنموذج ليبنى على أساسها الصيغ المختصرة .

(٤) عندما تكون " $ر^{٢}$ " للصيغة المختصرة المقدرة بالمرحلة الأولى أكبر من ٠,٨ فإن نتائج التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تكون قريبة من نتائج التقدير الناجمة عن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية .

(٥) يلاحظ أن تباينات المعلمات المقدرة التي نحصل عليها من المرحلة الثانية $ع^{*٢}_{\hat{ب}_١}$، $ع^{*٢}_{\hat{ب}_٢}$ ليست دقيقة وذلك لأنها بنيت على أساس تباين الحد العشوائي $ع^{٢}_{ز}*$. ومن المعروف أن $ع^{٢}_{ز}* \neq ع^{٢}_{د_٢}*$ الذي يعبر عن تباين الحد العشوائي بالمعادلة الأصلية (١٦-١٤) الممثل في (د ٢) ، حيث : ز = (ب ١ و ١ + د ٢) كما يتضح بالمعادلة (١٦-١٠) . ولذلك يتعين أن نجرى بعض التعديلات لتصحيح هذا التحيز في قيمة تباينات المعلمات المقدرة . ولعمل ذلك نقوم بحساب :

$$ع^{*٢}_{ز} = \frac{\sum (ص_٢ - \hat{ب}_١ \hat{ص}_١ - \hat{ب}_٢ ص_١)^٢}{ن - ك}$$

$$ع^{٢}_{د} = \frac{\sum (ص_٢ - \hat{ب}_١ ص_١ - \hat{ب}_٢ ص_١)^٢}{ن - ك}$$

ونلاحظ أنه عندما $ر^{٢} = ١$ في معادلة الصيغة المختصرة بالمرحلة الأولى فإن :

$$ع^{٢}_{د} / ع^{*٢}_{ز} = ١ \text{ ، وعندما } ر^{٢} < ١ \text{ فإن } ع^{٢}_{د} / ع^{*٢}_{ز} \neq ١$$

ولإجراء التصحيح نقوم بضرب :

$$ع^{*٢}_{\hat{ب}_١} \times (ع^{٢}_{د} / ع^{*٢}_{ز}) \text{ ، } ع^{*٢}_{\hat{ب}_٢} \times (ع^{٢}_{د} / ع^{*٢}_{ز})$$

لنحصل على قيم أكثر دقة لتباينات المعلمات المقدرة .

(١٦-١-٤) طرق التقدير المختلط :

يمكن تعريف طرق التقدير المختلط بأنها تلك الطرق التي تخلط معلومات العينة مع معلومات أخرى عن معلمات النموذج متاحة من مصادر خارجية . ومن أهم

المصادر الخارجية التي يمكن الحصول منها على معلومات عن النماذج محل التقدير : النظرية الاقتصادية ، والقوانين، والدراسات القياسية التطبيقية السابقة . وسوف نتعرض هنا لطريقتين فقط من هذه الطرق هما :

أولاً : طريقة المربعات الصغرى المقيدة Restricted Least Squares

ثانياً : طريقة مزج بيانات السلسلة الزمنية والبيانات القطاعية
Pooling Cross-Section and Time-Series Data

أولاً : طريقة المربعات الصغرى المقيدة :

وتطبق هذه الطريقة عندما يكون لدينا معلومات مسبقة عن قيم محددة لبعض المعلمات . فإذا افترضنا أننا نريد تقدير العلاقة التالية :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ع .... (١٦-٢٣)

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

والتي يمكن صياغتها في صورة انحرافات كما يلي :

ص = ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ع .... (١٦-٢٤)

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

وكان لدينا معلومات مسبقة عن قيمة ب ١ حيث ب ١ = ق ← ($\beta_1 = k$) ، فبالتعويض عن ب ١ بقيمتها في (١٦-٢٤) نحصل على :

ص = ق س ١ + ب ٢ س ٢ + ع

ص − ق س ١ = ب ٢ س ٢ + ع ($y - k x_1 = \beta_2 x_2 + u$)

ويمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة التالية :

ص * = ب* ٢ س ٢ + ع .... (١٦-٢٥)

$$y^* = \beta^*_2 x_2 + u$$

حيث : ص * = ص − ق س ١

ومن الممكن تقدير العلاقة (١٦- ٢٥) باستخدام طريقة صغرى العادية على النحو التالي :

$$\text{ب}^*_{٢} = \frac{\sum \text{ص}^* \text{س}_{٢}}{\sum \text{س}^{٢}_{٢}} = \frac{\sum (\text{ص} - \text{ق س}_{١})\, \text{س}_{٢}}{\sum \text{س}^{٢}_{٢}} \quad ..... \quad (١٦-٢٦)$$

$$\text{ب}^*_{٢} = \frac{\sum \text{ص س}_{٢} - \text{ق} \sum \text{س}_{١} \text{س}_{٢}}{\sum \text{س}^{٢}_{٢}} \quad .... \quad (١٦-٢٧)$$

$$\beta_2^* = \frac{\Sigma y x_2 - k \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_2^2}$$

مثال (١٦-٣)

استخدام طريقة التقدير المختلط

افترض أن : $\text{ب}_{١} = \text{ق} = \frac{١}{٢}$ وكانت البيانات المتاحة عن الانحرافات : ص ، س ١ ، س ٢ كما بالجدول (١٦ -٤) :

جدول (١٦-٤)

(١) ص	(٢) س ١	(٣) س ٢	(٤) $\text{ق س}_{١} = \frac{١}{٢} \text{س}_{١}$	(٥) $\text{ص}^* = \text{ص} - \frac{١}{٢} \text{س}$
-٢٠	-٨	١٠	-٤	-١٦
-١٥	-٤	٨	-٢	-١٣
-١٠	-٦	٤	-٣	-٧
صفر	-٢	صفر	-١	١
١٠	صفر	-٤	صفر	١٠
١٥	١٢	-١٢	٦	٩
٢٠	٨	-٨	٤	١٦

ومن ثم يمكن تقدير العلاقة (١٦–٢٥) باستخدام الصيغة (١٦–٢٦) أو الصيغة (١٦–٢٧) من خلال البيانات السابقة . فالأعمدة (٥) ، (٣) بالجدول (١٦–٤) تصلح لتقدير الصيغة (١٦–٢٦) . ولقد اتضح أن " ب* ٢ " المقدرة بطريقة المربعات الصغرى المقيدة أكثر كفاءة من بً ٢ التي يمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرى العادية .

ويمكن تحديد تباين المعلمة المقدرة ب* ٢ باستخدام الصيغة التالية :

ع*^{2}بً٢ = ع^{2}د (١ / ∑ س^{2}٢) .... (١٦–٢٨)

أمثلة اقتصادية لطريقة المربعات الصغرى المقيدة

١ – نموذج الإيراد الحكومي من الضرائب غير المباشرة

افترض أننا نريد تقدير دالة الإيراد الحكومي من الضرائب غير المباشرة باستخدام الصيغة (١٦–٢٩) :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ب ٣ س ٣ + ... + ع .... (١٦–٢٩) $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + ... + u$

حيث :

ص = متحصلات الحكومة من الضرائب غير المباشرة (Y)

س ١ = إنفاق المستهلكين على المنتجات الغذائية (X_1)

س ٢ = إنفاق المستهلكين على المنتجات النسيجية (X_2)

س ٣ = إنفاق المستهلكين على المنتجات التبغية (X_3)

فإذا قرر المشرّع أن تفرض ضريبة موحدة على استهلاك المنتجات التبغية بنسبة ٧٠٪ من الثمن فإن هذا يفيدنا في تقدير الدالة (١٦–٢٩) ، حيث يمكن اعتبار : ب ٣ = ٠,٧ في هذه الحالة . ومن ثم نقوم باستبعاد أثر س٣ من النموذج على النحو التالي :

ص – ٠,٧ س ٣ = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ... + ع *

∴ ص* = أ + ب ، س ، + ب ، س ، +..... + ع *   .... (١٦–٣٠)

ثم نقوم بتقدير الدالة (١٦–٣٠) باستخدام طريقة المربعات الصغرى المقيدة على النحو الذي تقدم .

٢ – دالة الإنتاج المقيدة :

افترض أننا نريد تقدير دالة الإنتاج لقطاع صناعي معين باستخدام الصيغة التالية (دالة إنتاج كوب– دوجلاس) :

ص = أ س ، ^ب١^ س ، ^ب٢^ هـ ^ع^   .... (١٦–٣١)

$$Y = AX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} e^u$$

حيث : ص = الناتج الكلي للقطاع (Y)

س ، = كمية رأس المال (X_1)

س ، = كمية العمل (X_2)

وافترض أن معلومات هندسية توفرت لدينا تفيد بأن هذا القطاع الصناعي يعمل في ظل ثبات غلة الحجم ، أي أن مضاعفة مدخلات العمل و رأس المال تؤدى لمضاعفة الإنتاج . ومن ثم فإن هذه المعلومات تعنى أن : ب ، + ب ، = ١ ، وبالتالي إذا استطعنا قياس" ب ، " أو" ب ، " يمكن أن نحصل على قيمة المعلمة الأخرى حيث :
ب ، = ١ – ب ، أو ب ، = ١ – ب ، ، وفي هذه الحالة ليس هناك حاجة لقياس المعلمتين ، وإنما يكفي قياس إحداهما على أن نستخدم المعلومات المتوفرة مسبقاً في تحديد قيمة المعلمة الأخرى .

وبقسمة طرفي المعادلة (١٦–٣١) على ، س ، نحصل على :

ص / س ، = أ س ، ^ب١^ س ، ^ب٢^ هـ ^ع^ / س ،

∴ ص / س ، = أ س ، ^ب١^ س ، ^ب٢^ س ، ^-١^ هـ ^ع^

$$\frac{ص}{س_٢} = أ\ س_١^{\ ب_١}\ س_٢^{\ ب_٢-١}\ هـ^{ع}$$

وحيث أن $ب_٢ - ١ = - ب_١$

$$\therefore \frac{ص}{س_٢} = أ\ س_١^{\ ب_١}\ س_٢^{\ -ب_١}\ هـ^{ع}$$

$$\therefore \frac{ص}{س_٢} = أ \left(\frac{س_١}{س_٢}\right)^{ب_١} هـ^{ع}$$

$$\therefore ص^* = أ\ س_١^{*\ ب_١}\ هـ^{ع} \quad ...... (١٦-٣٢)$$

$$Y^* = AX_1^{*\beta_1} e^u$$

حيث :

$ص^* = \frac{ص}{س_٢}$ = الإنتاجية المتوسطة للعامل $\quad Y^* = \frac{Y}{X_2}$

$س_١^* = \frac{س_١}{س_٢}$ = معامل كثافة رأس المال / العمل $\quad X_1^* = \frac{X_1}{X_2}$

وبتقدير المعادلة (١٦-٣٢) باستخدام طريقة المربعات الصغرى المقيدة يمكن تحديد قيمة " $ب_١$ " ومنها يمكن تحديد قيمة " $ب_٢$ ".

٣ – دالة الطلب المقيدة

إذا أردنا تقدير دالة الطلب باستخدام الصيغة التالية :

$$ط = أ\ ل^{ب_١}\ ث^{ب_٢}\ هـ^{ع} \quad .... (١٦-٣٣)$$

$$Y = AX^{\beta_1} P^{\beta_2} e^u$$

حيث :

ط = الإنفاق النقدي على السلعة (Y)

ل = الدخل النقدي (X)

ث = سعر السلعة (P)

ب ١ = مرونة الطلب الدخلية (β_1)

ب ٢ = مرونة الطلب السعرية (β_2)

فإذا أردنا أن نلتزم بالفرض الاقتصادي القائل بأن المستهلك رشيد ولا يخضع لظاهرة الخداع النقدي فإن هذا يتضمن أن : ب ١ + ب ٢ = صفر . وباستخدام هذا القيد يكفي أن نقيس أي من المعلمتين " ب ١ أو ب ٢ " ، حيث إذا حددنا قيمة أحدهما يمكننا تحديد قيمة الأخرى . فوفقاً للقيد السابق ب ١ = − ب ٢ ، ب ٢ = − ب ١ .

وبقسمة طرفي المعادلة (١٦−٣٣) على " ث " نحصل على :

$$\frac{\text{ط}}{\text{ث}} = \frac{\text{أ}}{\text{ث}}\ \text{ل}^{\text{ب}_1}\ \text{ث}^{-\text{ب}_1}\ \text{هـ}^{\text{ع}}$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ث}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ث}}\right)\left(\frac{\text{ل}}{\text{ث}}\right)^{\text{ب}_1}\ \text{هـ}^{\text{ع}}$$

$$\text{ط}^* = \text{أ}^*\ \text{ل}^{*\,\text{ب}_1}\ \text{هـ}^{\text{ع}} \qquad \ldots\ (١٦-٣٤)$$

$$Y^* = A^*\ X^{*\,\beta_1}\ e^u$$

حيث :

ط * = ط / ث = الإنفاق الحقيقي أو الكمية المطلوبة من السلعة $Y^* = \frac{Y}{P}$

أ * = أ / ث = معلمة ناقلة $A^* = \frac{A}{P}$

ل * = ل / ث = الدخل الحقيقي $X^* = \frac{X}{P}$

ب ١ * = مرونة الطلب الدخلية (β_1)

وبتقدير الصيغة (١٦−٣٤) باستخدام طريقة المربعات الصغرى المقيدة يمكن الحصول على قيمة " ب ١ " ومنها " ب ٢ " .

مثال (١٦-٤)
تقدير دالة الاستهلاك المقيدة

افترض أننا نريد تقدير دالة الاستهلاك باستخدام الصيغة التالية :

$$س = أ + ب_{١} ج + ب_{٢} ح + ε \quad .... (١٦-٣٥)$$

حيث :

س = الإنفاق الاستهلاكي

ج = الأجور والمرتبات = دخل العمل

ح = الإيجار والأرباح = دخل الملكية

$ب_{١}$ = الميل الحدي للاستهلاك لدى العمال

$ب_{٢}$ = الميل الحدي للاستهلاك لدى الملاك

فإذا توفرت لدينا معلومات من دراسات قياسية سابقة تفيد بأن $ب_{٢} = ٣/٢\ ب_{١}$ ، أي أن الميل الحدي للاستهلاك لدى طبقة الملاك (الغنية) أقل من الميل الحدي للاستهلاك لدى طبقة العمال (الفقيرة) بمقدار الثلث ، فمن الممكن الاستفادة من هذه المعلومات في تقدير المعادلة (١٦-٣٥) بتحويلها إلى دالة مقيدة . فبالتعويض عن $ب_{٢}$ في المعادلة (١٦-٣٥) نحصل على دالة الاستهلاك المقيدة التالية :

$$س = أ + ب_{١} ج + ٣/٢\ ب_{١} ح + ε$$

$$\therefore س = أ + ب_{١} (ج + ٣/٢\ ح) + ε$$

$$س = أ + ب_{١} ج^{*} + ε \quad .... (١٦-٣٦)$$

حيث $ج^{*} = (ج + ٣/٢\ ح)$

وبتقدير الدالة (١٦-٣٦) نحصل على الميل الحدي للاستهلاك " $ب_{١}$ " ومنه نحصل على $ب_{٢}$. فإذا كانت البيانات الخاصة بالمملكة المتحدة على النحو الموضح بالجدول (١٦-٥) :

جدول (١٦-٥)

بيانات الاستهلاك بالمملكة المتحدة (مليون إسترليني)

السنة	الإنفاق الاستهلاكي س	دخل العمل ج	دخل الملكية ح	الدخل الكلى ل=ج+ح	ج* = ج+٢/٣ح
١٩٤٨	٨٥٥٢	٧٤٣٣	٢٥٢٢	٩٩٥٥	٩١١٤
٤٩	٨٩٠٧	٧٩٢٩	٢٥٧٩	١٠٥٠٨	٩٦٤٨
٥٠	٩٤٠٠	٨٣٢٢	٢٦٥٧	١٠٩٧٩	١٠٠٩٣
٥١	١٠١٥٠	٩٢٢١	٢٧٠٥	١١٩٢٦	١١٠٢٤
٥٢	١٠٦٩١	٩٩٤١	٢٧٧٥	١٢٧١٨	١١٧٩٣
٥٣	١١٤٠٢	١٠٥٦٠	٢٩٣٢	١٣٤٩٢	١٢٥١٥
٥٤	١٢٠٩١	١١٢٣٧	٣٠٢٥	١٤٢٦٢	١٣٢٥٤
٥٥	١٣٠٣٨	١٢٢٨٨	٣١٩٥	١٥٤٨٣	١٤٤١٨
٥٦	١٣٧٤٤	١٣٣٨٤	٣٢٦١	١٦٦٤٥	١٥٥٥٨
٥٧	١٤٥٠٩	١٤١٤٤	٣٤٠٧	١٧٥٥١	١٦٤١٥
٥٨	١٥٢٩٦	١٤٨٩٠	٣٦٤٢	١٨٥٣٢	١٧٣١٨
٥٩	١٦١١٧	١٥٦٧٧	٣٩٥٨	١٩٦٣٥	١٨٣١٦
٦٠	١٦٩٣٣	١٦٣١٠	٤٨٥٣	٢١١٦٣	١٩٥٤٥
٦١	١٧٨٣٠	١٨١٣٨	٤٧٤٢	٢٢٨٨٠	٢١٢٩٩
٦٢	١٨٩١٠	١٩٢١٢	٤٩١٥	٢٤١٢٧	٢٢٤٨٩
٦٣	٢٠٠٨٧	٢٠٣٤٧	٥٢٥٧	٢٥٦٠٤	٢٣٨٥٢
٦٤	٢١٤٥٩	٢١٩٨٥	٥٦٨٥	٢٧٦٧٠	٢٥٧٧٥
٦٥	٢٢٨٨٥	٢٣٨٩٣	٦١٩٧	٣٠٠٩٠	٢٨٠٢٤
٦٦	٢٤٢٣٢	٢٥٦١٠	٦٤٨٢	٣٢٠٩٢	٢٩٩٣١
٦٧	٢٥٣٦٢	٢٦٨٥٧	٦٧٩٦	٣٣٦٥٣	٣١٣٨٨
٦٨	٢٧١١٣	٢٩٠٥٨	٧١٧٤	٣٦٢٣٢	٣٣٨٤١
٦٩	٢٨٦١٨	٣١٣٦٢	٧٢٠٩	٣٨٥٧١	٣٦١٦٩

وباستخدام هذه البيانات في تقدير الصيغ التالية نجد أن :

$$س = \hat{أ} + \hat{ب}_1 ج + \hat{ب}_2 ح + د$$

س = ٢٢٠٣ + ٠,٧٧ ج + ٠,٣٦ ح + د .... (١٦-٣٧)
(١٨٩) (٠,٠٥) (٠,٢١) ر^{٢} = ٠,٩٩

س = أ + ب$_{١}$ ج* + د

س = ٢١٢٠ + ٠,٧٤ ج* + د .... (١٦-٣٨)
(١٣١) (٠,٠١) ر^{٢} = ٠,٩٩٨

س = أ + ب ل + د

س = ١٩٩٥ + ٠,٦٩٧ ل + د .... (١٦-٣٩)
(١٣٩,١) (٠,٠١) ر^{٢} = ٠,٩٩٨

وبمقارنة الصيغ الثلاثة (١٦-٣٧)، (١٦-٣٨)، (١٦-٣٩) نجد أن الصيغة المقيدة (١٦-٣٨) هي أفضلها، ذلك لأن الأخطاء المعيارية عند حدها الأدنى في هذه الصيغة كما يتضح بالجدول (١٦-٦).

جدول (١٦-٦)

المعلمة المقدرة	نسبة الخطأ المعياري من المعلمة المقدرة ٪		
	(١٦-٣٧)	(١٦-٣٨)	(١٦-٣٩)
$\hat{أ}$	٨,٦	٦,٢	٦,٩٦
$\hat{ب}_{١}$	٦,٥	١,٣٥	١,٤٣

ثانياً: طريقة مزج بيانات السلسلة الزمنية والبيانات القطاعية

حتى نتعرف على كيفية عمل هذه الطريقة دعنا نفترض أننا نريد تقدير دالة الطلب باستخدام الصيغة التالية:

ط = أ ل^{ب١} ث^{ب٢} هـ^{ع} $Y = A X^{\beta1} P^{\beta2} e^{u}$ ...... (١٦-٤٠)

و افترض أن لدينا بيانات سلسلة زمنية للفترة ١٩٨٠-١٩٩٥ كما لدينا بيانات عن ميزانية مجموعة من الأسر عام ١٩٩٤ .

يلاحظ عموماً أنه من بين المشاكل التي تواجهنا عند استخدام بيانات سلسلة زمنية وجود ارتباط بين قيم جميع المتغيرات التفسيرية عبر الزمن بما قد يؤدى لوجود ما يسمى بمشكلة الامتداد الخطي المتعدد Multicollnearity . كما أنه من الصعب تقدير العلاقة (١٦-٤٠) باستخدام بيانات قطاعية عن ميزانية الأسر في سنة معينة ذلك لأن معلمة السعر " ب ٢ " لا يمكن تقديرها من هذه البيانات حيث يوجد سعر واحد بالنسبة لجميع الأسر عند نقطة زمنية معينة . ولتفادي هذه المشاكل نقوم بتقدير مرونة الطلب الدخلية من البيانات القطاعية ، خاصة و أن السعر ليس متغيراً فيها ، وذلك باستخدام الصيغة التالية :

ط = ك ل ^ب١^ هـ ^ع^	$Y = K X^{\beta 1} e^{u}$	...... (١٦-٤١)

حيث : ط = الإنفاق على أو الكمية المطلوبة من السلعة (Y)

ل = الدخل النقدي (X)

ب ١ = مرونة الطلب الدخلية (β_1)

ك = معلمة ناقلة (K)

وبعد تقدير "ب ١ " من البيانات القطاعية نقوم باستخدامها لعزل أثر الدخل من بيانات السلسلة الزمنية ، ثم نستخدم هذه البيانات لتقدير مرونة الطلب السعرية . فإذا افترضنا أن ب ١ = ب*١ بعد تقديرها نحصل على :

ط* = لو ط - ب*١ لو ل $Y^{*} = \ln Y - \beta_1^{*} \ln X$

حيث ط* هي مؤشر الكمية المطلوبة بعد عزل أثر الدخل . ثم نستخدم الصيغة (١٦-٤٢) في تقدير مرونة الطلب السعرية " ب ٢ " من خلال بيانات السلسلة الزمنية :

ط * = لو أ + ب ٢ لو ث + د	....	(١٦-٤٢)

وبالحصول على $ب^*_1$ من (١٦-٤١) ، $ب_2$ من (١٦-٤٢) يصبح لدينا دالة الطلب التالية :

$$ط = أ\, ل^{ب^*_1}\, ث^{\bar{ب}_2}\, هـ^{د}$$

ومن مزايا هذه الطريقة :

(١) التخلص من مشكلة الامتداد الخطي المتعدد حيث أن تقدير "$ب_1$" من بيانات قطاعية وتقدير " $ب_2$ " من بيانات سلسلة زمنية لا يتيح فرصة وجود ارتباط بين المتغيرين التفسيريين ل ، ث .

(٢) التخلص من مشكلة التعرف : إذا تم تقدير دالة الطلب باستخدام بيانات سلسلة زمنية فإن هناك احتمال أن تكون الدالة المقدرة دالة عرض . غير أن تقدير مرونة الطلب الدخلية من بيانات قطاعية لا يدع مجالاً للشك أن هذه دالة طلب ، ذلك لأنها تعكس سلوك المستهلك وليس المنتج . وبالتالي تكون الدالة المقدرة هي دالة طلب .

(٣) التخلص من مشكلة التحيز الناجمة عن المعادلات الآنية . فيلاحظ أن تقدير مرونة الطلب الدخلية من بيانات قطاعية لا يتيح فرصة لأن تؤثر الكمية على الدخل وإن كان يتيح فرصة لأن يؤثر الدخل على الكمية .

ولكن من أهم المشاكل التي تواجه الباحث عند استخدام بيانات قطاعية، صعوبة الوصول للقيمة الحقيقية لمرونة الطلب الدخلية . فالبيانات القطاعية عن ميزانيات الأسر تحتوى على الإنفاق الكلى وليس الدخل الكلى لكل أسرة ، بالإضافة إلى الإنفاق على كل سلعة على حدة . ولذلك فإن ما نحصل عليه من البيانات القطاعية هي مرونة الإنفاق على السلعة بالنسبة للإنفاق الكلى وليس الدخل الكلي . أي عندما نقدر الصيغة التالية :

$$ق_1 = أ\, ق^{ب_1}\, هـ^{ع} \quad .... \quad (١٦-٤٣)$$

حيث : $ق_1$ = الإنفاق على السلعة ١ ، ق = الإنفاق الكلي ، فإن " $ب_1$ " هي مرونة الإنفاق على السلعة ١ بالنسبة للإنفاق الكلي . أي أن :

$$\text{ب}_1 = \frac{6\text{ق}_1}{\text{ق}_1} \Big/ \frac{6\text{ق}}{\text{ق}} = \text{م}_{\text{ق}1} \qquad \text{........} \qquad (\text{١٦-٤٤})$$

ولكن ما نحتاجه في دالة الطلب هو مرونة الطلب الدخلية :

$$\text{م}_{\text{ل}1} = \frac{6\text{ط}}{\text{ط}} \Big/ \frac{6\text{ل}}{\text{ل}}$$

حيث : ط = الكمية المطلوبة من السلعة ، ل = الدخل النقدي

ولا شك أن $\text{م}_{\text{ق}1} > \text{م}_{\text{ل}1}$ ذلك لأن (6 ق / ق) < (6 ل / ل) حيث أن زيادة الدخل بنسبة معينة تؤدى لزيادة الإنفاق على السلع الاستهلاكية بنسبة أقل وفقاً لقانون إنجل. وحيث 6 ق / ق هو مقام مرونة الإنفاق $\text{م}_{\text{ق}1}$ ، و 6 ل / ل هو مقام مرونة الدخل $\text{م}_{\text{ل}1}$ فإن $\text{م}_{\text{ل}1} > \text{م}_{\text{ق}1}$.

وللحصول على مرونة الطلب الدخلية $\text{م}_{\text{ل}1}$ من مرونة الإنفاق $\text{م}_{\text{ق}1}$ يتعين أن نحسب الصيغة التالية :

$$\text{م}_{\text{ل}1} = (\text{م}_{\text{ق}1})(\text{م}_{\text{قل}}) - (\text{م}_{\text{ثل}}) \qquad \text{............} \ (\text{١٦-٤٥})^{*}$$

حيث : $\text{م}_{\text{ل}1}$ = مرونة الطلب الدخلية للسلعة 1 = (6 ط 1 / 6 ل) (ل / ط 1)

$\text{م}_{\text{ق}1}$ = مرونة الإنفاق للسلعة 1 = (6 ق 1 / 6 ق) (ق / ق 1)

$\text{م}_{\text{قل}}$ = مرونة الإنفاق الكلي للدخل = (6 ق / 6 ل) (ل / ق)

$\text{م}_{\text{ثل}}$ = مرونة السعر للدخل = (6 ث 1 / 6 ل) (ل / ث 1)

$$^{*}(\text{م}_{\text{ق}1})(\text{م}_{\text{قل}}) - \text{م}_{\text{ثل}} = \frac{6\text{ق}_1}{6\text{ق}} \cdot \frac{\text{ق}}{\text{ق}_1} \cdot \frac{6\text{ق}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ق}} - \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ث}_1} = \frac{6\text{ق}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1} - \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ث}_1}$$

وحيث ق 1 = ث 1 ط 1 ، ث 1 = ث 1 (ل) ، ط 1 = ط 1 (ل) ∴ ق 1 = ث 1 (ل) ط 1 (ل)

$$\therefore \frac{6\text{ق}_1}{6\text{ل}} = \text{ث}_1 \frac{6\text{ط}_1}{6\text{ل}} + \text{ط}_1 \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\frac{\text{ل}}{\text{ث}_1\text{ط}_1}\left(\text{ث}_1 \frac{6\text{ط}_1}{6\text{ل}} + \text{ط}_1 \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}}\right) - \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ث}_1} = \frac{6\text{ط}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ط}_1} + \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ث}_1} - \frac{6\text{ث}_1}{6\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ث}_1}$$

$$= \text{م ط}_1$$

أما عن م ق ر فيمكن تقديرها من خلال تقدير الصيغة :

ق = أ ل ـحـ هـ ؑ

حيث ق = الإنفاق الكلي على الاستهلاك بالمجتمع .

ل = الدخل الكلي للمجتمع .

حـ = م ق ر .

وفيما يتعلق بـ "م ق ر" فهي تقيس التغير في السعر الذي يدفعه الغني ذو الدخل المرتفع عن السعر الذي يدفعه الفقير ذو الدخل المنخفض مقابل النوعية الأحسن للسلعة أو الخدمة الأفضل . وهذه من الصعب تقديرها وهناك من يفترض لها قيمة تحكمية = ٠,١٠ ولكن هذا ينتقد من حيث أنه فرض تحكمي لا يستند لأساس موضوعي .

المبحث الثاني

طرق النموذج

System Methods

تتسم هذه الطرق بأنها تقدر كل معادلات النموذج آنياً أي في وقتٍ واحد . ولذا فإنها تأخذ كل المعلومات والقيود التي تتضمنها معادلات النموذج في الحسبان عند تقدير أي معادلة . وتسمى أيضاً بطرق المعلومات الكاملة Full Information Methods . ومن أكثر هذه الطرق شيوعاً هي طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث : Three Stage Least Squares Method (3SL)

وتستخدم هذه الطريقة عندما يعاني النموذج من المشاكل التالية :

(١) أن يكون النموذج زائد التعريف دون وجود أي معادلات ناقصة التعريف به .

(٢) أن يوجد هناك ارتباط بين الحدود العشوائية في المعادلات المختلفة . أي عندما $ر_{د١د٢} \neq$ صفر ، $ر_{د٢د٣} \neq$ صفر ، $ر_{د١د٣} \neq$ صفر ، حيث يشير "ر" إلى معامل الارتباط ، $د_{ر}$ يشير إلى الحد العشوائي بالمعادلة ر . وهذه الحالة تظهر في النماذج ذات المعادلات غير المرتبطة ظاهرياً التي سبق أن تعرضنا لها . ويلاحظ أنه إذا كانت الحدود العشوائية للمعادلات المختلفة بالنموذج غير مرتبطة فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل يؤدى إلى نفس نتائج طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين .

(٣) أن يوجد هناك ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والحدود العشوائية بمعادلات النموذج ، وهذا يحدث في حالة النماذج ذات المعادلات الآنية ، ويؤدى لوجود مشكلة عدم ثبات التباين .

وتعتبر طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث طريقة مركبة ، فهي تحتوى على نفس خطوات طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين يضاف إلى ذلك طريقة المربعات الصغرى العامة . General Least Squares

ويمكن تلخيص خطواتها فيما يلي :

(١) افترض أن النموذج المراد تقديره يأخذ الصيغة التالية :

ص ١ = أ ٠ + أ ١ ص ٢ + أ ٢ س ١ + أ ٣ س ٢ + ع ١ .... (١٦–٤٦)

ص ٢ = ب . + ب ١ ص ١ + ب ٢ س ٣ + ب ٣ س ٤ + ع ٢ ...... (١٦–٤٧)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + u_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_4 + u_2$$

حيث ص ١ ، ص ٢ متغيرين داخليين ، س ١ ، س ٢ ، س ٣ ، س ٤ متغيرات خارجية.

ويلاحظ أن كلٍ من المعادلتين (١٦–٤٦) ، (١٦–٤٧) زائدة التعريف ، كما أن النموذج ذو معادلات آنية . ولتقدير النموذج يتعين تقدير الصيغ المختصرة للمتغيرين الداخليين ص ١ ، ص ٢ والمتمثلتين في :

ص ١ = حـ . + حـ ١ س ١ + حـ ٢ س ٢ + حـ ٣ س ٣ + حـ ٤ س ٤ + و ١ (١٦–٤٨)

ص ٢ = ق . + ق ١ س ١ + ق ٢ س ٢ + ق ٣ س ٣ + ق ٤ س ٤ + و ٢ (١٦–٤٩)

وباستخدام هاتين الصيغتين يمكن تحديد القيم المقدرة للمتغيرين الوسيطين صٓ ١ ، صٓ ٢ ، حيث :

صٓ ١ = حٓـ . + حٓـ ١ س ١ + حٓـ ٢ س ٢ + حٓـ ٣ س ٣ + حٓـ ٤ س ٤

صٓ ٢ = قٓ . + قٓ ١ س ١ + قٓ ٢ س ٢ + قٓ ٣ س ٣ + قٓ ٤ س ٤

ومن ثم فإن :

ص ١ = صٓ ١ + و ١ $\quad Y_1 = \hat{Y}_1 + W_1$ .... (١٦–٥٠)

ص ٢ = صٓ ٢ + و ٢ $\quad Y_2 = \hat{Y}_2 + W_2$ .... (١٦–٥١)

وبالتعويض من (١٦–٥٠) ، (١٦–٥١) في (١٦–٤٦) ، (١٦–٤٧) نحصل على :

ص ١ = أ. + أ ١ صٓ ٢ + أ ٢ س ١ + أ ٣ س ٢ + ز ١ .... (١٦–٥٢)

ص ٢ = ب. + ب ١ صٓ ١ + ب ٢ س ٣ + ب ٣ س ٤ + ز ٢ ... (١٦–٥٣)

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_2 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + V_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y}_1 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_4 + V_2$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية يمكن تقدير معلمات المعادلتين (١٦-٥٢) ، (١٦-٥٣) ونكون بذلك قد تمكنا من التخلص من مشكلة التعريف الزائد .

(٣) ثم نستخدم طريقة المربعات الصغرى العامة للتخلص من مشكلة ارتباط الحدود العشوائية للمعادلتين (١٦-٥٢) ، (١٦-٥٣) وكذلك للتخلص من مشكلة ارتباط المتغيرات التفسيرية بالحدود العشوائية بالمعادلتين . فمن المعروف أن طريقة المربعات الصغرى العادية تفترض ثبات تباين الحد العشوائي عند كل قيم المتغير التفسيري . ولا شك أن اعتمادها على هذا الافتراض يعني أنها تعطى جميع المشاهدات وزناً متساوياً في تأثيرها على معادلة الانحدار المقدرة . ولذلك فإن هذه الطريقة تسمى طريقة المربعات الصغرى غير المرجحة Unweighted Least Squares ، وإذا اختل هذا الافتراض فإن طريقة المربعات الصغرى العادية أو غير المرجحة تصبح غير ملائمة . فيلاحظ في هذه الحالة أن المشاهدات الأكثر قرباً من خط الانحدار تكون هي الأكثر أهمية في تحديد مساره أما المشاهدات الأكثر بعداً عنه فإنها تكون قليلة الأهمية في تحديد مسار خط الانحدار . وبمعنى آخر يمكن القول أنه كلما زاد تباين الحد العشوائي كلما قل وزن المشاهدات في تأثيرها على مسار خط الانحدار المقدر ، وكلما قل تباين الحد العشوائي $ع^2_د$ كلما زاد وزن المشاهدات في تأثيرها على مسار خط الانحدار . ولذلك يتعين إعطاء المشاهدات ذات التباين الأقل وزناً أكبر من المشاهدات ذات التباين الأكبر . وتحاول طريقة المربعات الصغرى العامة عمل ذلك ، فهي تعطى كل قيمة مشاهدة وزناً = (١ / $ع^2_د$ =) المقابلة لها . ومن ثم تصبح معادلة الانحدار المقدرة :

$$\frac{ص_ر}{ع^2_{در}} = أ_. \frac{1}{ع^2_{در}} + أ_1 \frac{س_{1ر}}{ع^2_{در}} + أ_2 \frac{س_{2ر}}{ع^2_{در}} + \quad \frac{د_ر}{ع^2_{در}} \quad .....(١٦-٥٤)$$

وبالتالي كلما زاد تباين الحد العشوائي كلما قل وزن المشاهدة " ر " في التأثير على المتغير التابع . ولهذا السبب تسمى طريقة المربعات الصغرى العامة بطريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS) Weighted Least Squares Method وهي تهدف لتدنية:

$$\sum \frac{(ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_١ س_{١ر} - \hat{أ}_٢ س_{٢ر})^٢}{ع^٢_{در}} \quad ....\quad (٥٤-١٦)$$

وليس تدنية :

$$\sum (ص_ر - \hat{أ} - \hat{أ}_١ س_١ - \hat{أ}_٢ س_٢)^٢$$

كما هو الحال في طريقة المربعات الصغرى العادية .

كما يلاحظ أيضاً أن قسمة الحد العشوائي $د_ر$ على $ع^٢_{در}$ يقلل من قيمة الحد العشوائي مما يترتب عليه إلغاء أثر ما قد يوجد بينه وبين الحد العشوائي لمعادلة أخرى من ارتباط .

ويوجد في برنامج الكمبيوتر Eviews-4.1 اختيارات تمكن الباحث من تقدير النموذج باستخدام أي طريقة من الطرق المتعارف عليها مثل : OLS , TSL, GLS وغيرها . والمطلوب في حالة طريقتي TLS , GLS تجهيز المتغيرات الوسيطة من خلال تقدير الصيغ الملائمة والتي تتمثل في : $\hat{Y}_1 or \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ ذلك لأن البرنامج يسألك عن : المتغيرات الداخلية Endogenous variables والمتغيرات الخارجية Exogenous variables والمتغيرات الوسيطة Instrument variables والتي لا بد أن تكون بياناتها جاهزة لأنه لا يقوم بحسابها.

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

الفصل السابع عشر

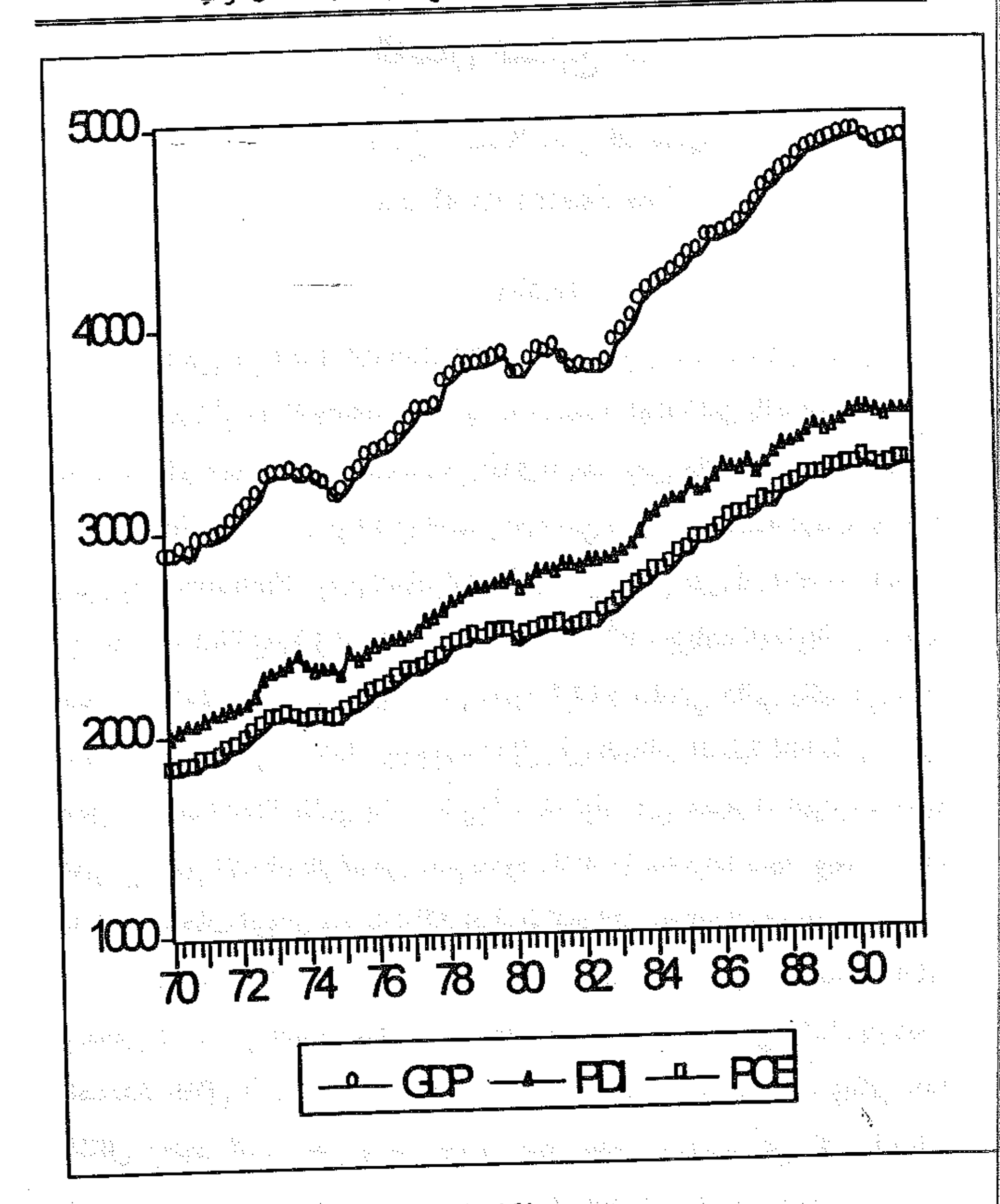
تحليل السلاسل الزمنية

Time Series Analysis

مقدمة

تفترض كل الدراسات التطبيقية التي تستخدم بيانات سلسلة زمنية أن هذه السلسلة مستقرة أو ساكنة Stationary . وصفة الاستقرار أو السكون تلك تتحدد ببعض الخصائص الإحصائية التي سوف نتعرض لها فيما بعد . وفي حالة غياب صفة الاستقرار Stationarity فإن الانحدار الذي نحصل عليه بين متغيرات السلسلة الزمنية غالباً ما يكون زائفاً Spurious . ومن المؤشرات الأولية التي تدل على أن الانحدار المقدر من بيانات سلسلة زمنية زائف كبر معامل التحديد R^2 ، وزيادة المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة بدرجة كبيرة ، مع وجود ارتباط سلسلي ذاتي يظهر في قيمة معامل ديربن واتسون DW . ويرجع هذا إلى أن البيانات الزمنية غالباً ما يوجد بها عامل الاتجاه Trend الذي يعكس ظروفاً معينة تؤثر على جميع المتغيرات فتجعلها تتغير في نفس الاتجاه بالرغم من عدم وجود علاقة حقيقية تربط بينها . ويحدث هذا غالباً في موجات الرواج وموجات الكساد أو الركود التي تجتاح المجتمعات.

والشكل (١٧-١) يمثل المسار الزمني للناتج المحلي الإجمالي GDP والدخل الشخصي المتاح PDI ، والإنفاق الاستهلاكي الشخصي PCE للولايات المتحدة خلال الفترة ١٩٧٠-١٩٩١ باستخدام بيانات ربع سنوية . ويظهر هذا الشكل وجود اتجاه عام واحد يعكس صفة عدم الاستقرار في كل البيانات الموجودة. كما يحتوي الجدول (١٧-١) على البيانات التي اشتق هذا الشكل منها .



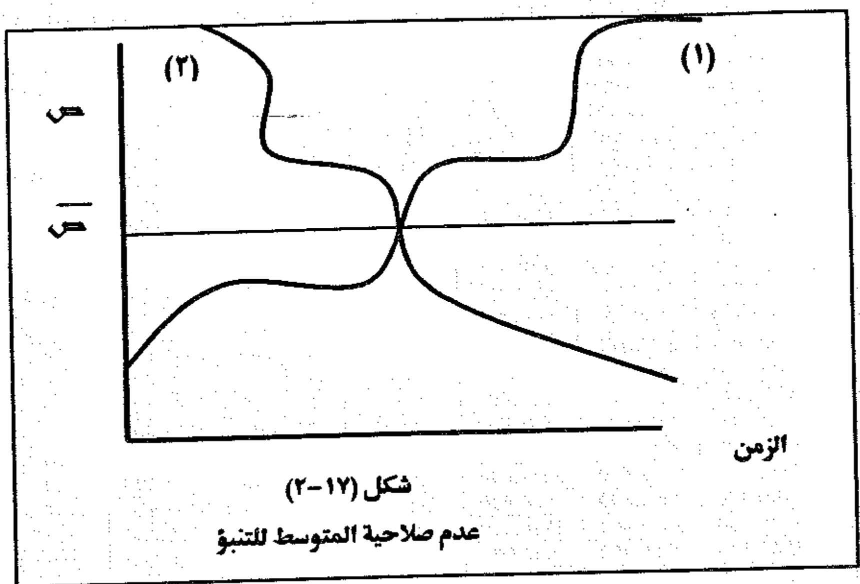
شكل (١٧-١)

الناتج المحلي الإجمالي والدخل الشخصي والإنفاق الاستهلاكي الشخصي في الولايات المتحدة

جدول (١٧-١) بيانات الناتج المحلي والدخل الشخصي المتاح والإنفاق الاستهلاكي الشخصي بالولايات المتحدة

Quarter	GDP	PDI	PCE	Quarter	GDP	PDI	PCE
1970:1	2872.800	1990.600	1800.500	1981:1	3860.500	2783.700	2475.500
1970:2	2860.300	2020.100	1807.500	1981:2	3844.400	2776.700	2476.100
1970:3	2896.600	2045.300	1824.700	1981:3	3864.500	2814.100	2487.400
1970:4	2873.700	2045.200	1821.200	1981:4	3803.100	2808.800	2468.600
1971:1	2942.900	2073.900	1849.900	1982:1	3756.100	2795.000	2484.000
1971:2	2947.400	2098.000	1863.500	1982:2	3771.100	2824.800	2488.900
1971:3	2966.000	2106.600	1876.000	1982:3	3754.400	2829.000	2502.500
1971:4	2980.800	2121.100	1904.600	1982:4	3759.600	2832.600	2539.300
1972:1	3037.300	2129.700	1929.300	1983:1	3783.500	2843.600	2556.500
1972:2	3089.700	2149.100	1963.300	1983:2	3886.500	2867.000	2604.000
1972:3	3125.800	2193.900	1989.100	1983:3	3944.400	2903.000	2639.000
1972:4	3175.500	2272.000	2032.100	1983:4	4012.100	2960.600	2678.200
1973:1	3253.300	2300.700	2063.900	1984:1	4089.500	3033.200	2703.800
1973:2	3267.600	2315.200	2062.000	1984:2	4144.000	3065.900	2741.100
1973:3	3264.300	2337.900	2073.700	1984:3	4166.400	3102.700	2754.600
1973:4	3289.100	2382.700	2067.400	1984:4	4194.200	3118.500	2784.800
1974:1	3259.400	2334.700	2050.800	1985:1	4221.800	3123.600	2824.900
1974:2	3267.600	2304.500	2059.000	1985:2	4254.800	3189.600	2849.700
1974:3	3239.100	2315.000	2065.500	1985:3	4309.000	3156.500	2893.300
1974:4	3226.400	2313.700	2039.900	1985:4	4333.500	3178.700	2895.300
1975:1	3154.000	2282.500	2051.800	1986:1	4390.500	3227.500	2922.400
1975:2	3190.400	2390.300	2086.900	1986:2	4387.700	3281.400	2947.900
1975:3	3249.900	2354.400	2114.400	1986:3	4412.600	3272.600	2993.700
1975:4	3292.500	2389.400	2137.000	1986:4	4427.100	3266.200	3012.500
1976:1	3356.700	2424.500	2179.300	1987:1	4460.000	3295.200	3011.500
1976:2	3369.200	2434.900	2194.700	1987:2	4515.300	3241.700	3046.800
1976:3	3381.000	2444.700	2213.000	1987:3	4559.300	3285.700	3075.800
1976:4	3416.300	2459.500	2242.000	1987:4	4625.500	3335.800	3074.600
1977:1	3466.400	2463.000	2271.300	1988:1	4655.300	3380.100	3128.200
1977:2	3525.000	2490.300	2280.800	1988:2	4704.800	3386.300	3147.800
1977:3	3574.400	2541.000	2302.600	1988:3	4734.500	3407.500	3170.600
1977:4	3567.200	2556.200	2331.600	1988:4	4779.700	3443.100	3202.900
1978:1	3591.800	2587.300	2347.100	1989:1	4809.800	3473.900	3200.900
1978:2	3707.000	2631.900	2394.000	1989:2	4832.400	3450.900	3208.600
1978:3	3735.600	2653.200	2404.500	1989:3	4845.600	3466.900	3241.100
1978:4	3779.600	2680.900	2421.600	1989:4	4859.700	3493.000	3241.600
1979:1	3780.800	2699.200	2437.900	1990:1	4880.800	3531.400	3258.800
1979:2	3784.300	2697.600	2435.400	1990:2	4900.300	3545.300	3258.600
1979:3	3807.500	2715.300	2454.700	1990:3	4903.300	3547.000	3281.200
1979:4	3814.600	2728.100	2465.400	1990:4	4855.100	3529.500	3251.800
1980:1	3830.800	2742.900	2464.600	1991:1	4824.000	3514.800	3241.100
1980:2	3732.600	2692.000	2414.200	1991:2	4840.700	3537.400	3252.400
1980:3	3733.500	2722.500	2440.300	1991:3	4862.700	3539.900	3271.200
1980:4	3808.500	2777.000	2469.200	1991:4	4868.000	3547.500	3271.100

ويلاحظ أنه في حالة وجود اتجاه عام بالتزايد أو التناقص في بيانات السلسلة الزمنية فإنه من الصعب الاعتماد على قيمة المتوسط في التنبؤ كما يتضح بالشكل (١٧-٢).



شكل (١٧-٢)

عدم صلاحية المتوسط للتنبؤ

ففي حالة الاتجاه العام المتزايد (١) لا يمكن استخدام قيمة متوسطة واحدة (ص) للتعبير عن جميع قيم السلسلة سواء أكانت القيم المنخفضة في بداية السلسلة أم في نهاية السلسلة ، ويلاحظ أن الاعتماد هنا على القيمة المتوسطة ص̅ في التنبؤ سوف يعطى قيماً أقل من الواقع . أما في حالة الاتجاه العام المتناقص (٢) فإن الاعتماد على القيمة المتوسطة في التنبؤ يعطى قيماً أعلى من الواقع .

ويلاحظ في هذه الحالة أن متوسط واحد لا يصلح للتعبير عن جميع قيم السلسلة ، فمتوسط القيم المنخفضة مختلف عن متوسط القيم المرتفعة . ولذا فإن تغير المتوسط من مجموعة قيم لأخرى يضعف من مقدرة المتوسط العام على التنبؤ.

ومن ناحية أخرى يعبر التباين عن درجة عدم التأكد في التنبؤ . فإذا اختلف التباين من مجموعة قيم لأخرى بالنسبة لنفس السلسلة فإن هذا يجعل متوسط القيم ذات التباين الأعلى أضعف من متوسط القيم ذات التباين الأقل في التنبؤ ،

ذلك لأن درجة عدم التأكد في الحالة الأولى تكون أكبر منها في الحالة الثانية . ولذا فإن ثبات التباين يعتبر خاصية من خصائص الاستقرار أو السكون .

كما أن الاتجاه العام يتولد عن وجود ارتباط ذاتي قوى بين قيم نفس المتغير . ولذا عندما يكون هذا الارتباط الذاتي منعدماً أو ضعيفاً أو متناقصاً بدرجة كبيرة مع زيادة الفجوة الزمنية فإن هذا يساعد على استقرار أو سكون السلسلة .

وسوف يتم التعرض للجوانب المختلفة لتحليل السلاسل الزمنية في عدد من المباحث بهذا الفصل ، تتمثل في :

المبحث الأول : الخصائص الإحصائية لصفة استقرار (سكون) السلسلة .

المبحث الثاني : كيفية إزالة عدم الاستقرار (عدم السكون) .

المبحث الثالث : التكامل المشترك .

المبحث الأول

الخصائص الإحصائية لصفة استقرار السلسلة

(١٧-١-١) خصائص الاستقرار (السكون) :

تعتبر سلسلة زمنية ما مستقرة Stationary إذا توفرت فيها الخصائص التالية :

(أ) ثبات متوسط القيم عبر الزمن

ق(ص ز)= م .... (١٧-١)

$$E (Y_t) = \mu$$

(ب) ثبات التباين عبر الزمن

ع٢ = مج(ص ز - ص̄)٢ / ن .... (١٧-٢)

$$Var (Y_t) = E (Y_t - \mu)^2 = \delta^2$$

(حـ) أن يكون التغاير بين أي قيمتين لنفس المتغير معتمداً على الفجوة الزمنية بين القيمتين وليس على القيمة الفعلية للزمن الذي يحسب عنده التغاير ، أي على الفرق (ز - ر) بين ز ، ر وليس على (ز) أو (ر) . حيث أن ز فترة ، ر فترة أخرى .

تغا أ = مج (ص ز - م)(ص ز+١ - م) / ن .... (١٧-٣)

$$\gamma_K = E [(Y_t - \mu) (Y_{t+K} - \mu)]$$

حيث أن تغا أ [التغاير Covariance عند الفجوة (أ)] يشير إلى التغاير بين قائمتين من قيم "ص" تفصل بينهما فجوة زمنية طولها " أ" . فإذا كانت أ = صفر ، فإن تغا٠ يشير إلى تباين " ص"، حيث :

$$\text{تغا}_{\cdot} = \frac{\sum (\text{ص}_{ز} - \text{م})(\text{ص}_{ز} - \text{م})}{\text{ن}} = \frac{\sum (\text{ص}_{ز} - \text{م})^{2}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots \quad (١٧-٤)$$

وإذا كانت أ = ١ ، فإن تغا ١ يشير إلى التغاير بين القيم المتتالية لنفس المتغير والتي تفصل بينهما فجوة زمنية واحدة ، أي بين $\text{ص}_{ز}$ ، $\text{ص}_{ز+١}$.

مثال (١٧-١)

سكون السلسلة

افترض أن لدينا متغير "ص" له ١٠ قيم على النحو الموضح بالجدول (١٧-٢) .

جدول (١٧-٢)

الفترة	$\text{ص}_{ز}$	أ = ١ $\text{ص}_{ز+١}$	أ = ٢ $\text{ص}_{ز+٢}$	أ = ٣ $\text{ص}_{ز+٣}$
٠	$\text{ص}_{٠}$	$\text{ص}_{١}$	$\text{ص}_{٢}$	$\text{ص}_{٣}$
١	$\text{ص}_{١}$	$\text{ص}_{٢}$	$\text{ص}_{٣}$	$\text{ص}_{٤}$
٢	$\text{ص}_{٢}$	$\text{ص}_{٣}$	$\text{ص}_{٤}$	$\text{ص}_{٥}$
٣	$\text{ص}_{٣}$	$\text{ص}_{٤}$	$\text{ص}_{٥}$	$\text{ص}_{٦}$
٤	$\text{ص}_{٤}$	$\text{ص}_{٥}$	$\text{ص}_{٦}$	$\text{ص}_{٧}$
٥	$\text{ص}_{٥}$	$\text{ص}_{٦}$	$\text{ص}_{٧}$	$\text{ص}_{٨}$
٦	$\text{ص}_{٦}$	$\text{ص}_{٧}$	$\text{ص}_{٨}$	$\text{ص}_{٩}$
٧	$\text{ص}_{٧}$	$\text{ص}_{٨}$	$\text{ص}_{٩}$	–
٨	$\text{ص}_{٨}$	$\text{ص}_{٩}$	–	–
٩	$\text{ص}_{٩}$	–	–	–

فإذا كانت الفجوة الزمنية التي نتكلم عنها هي : أ = ٢ مثلاً فإن السلسلة الزمنية $\text{ص}_{ز}$ تكون مستقرة بالمفهوم السابق إذا كان :

(أ) متوسط القائمة ص ز يساوى متوسط القائمة ص ز+٢

م . = م ٢

(ب) تباين القائمة ص ز يساوى تباين القائمة ص ز+٢

ع.٢ = ع٢٢

(حـ) التغاير بين القيم المتتالية لـ ص ز (التغاير الذاتي) Autocovariance يساوي

التغاير بين القيم المتتالية لـ ص ز+٢

تغا ص ز ، ص ز+١ = تغا ص ز+٢ ، ص ز+٣

ويتطلب الاستقرار أن يكون هذا التغاير مساوياً للصفر أو لا يختلف جوهرياً عن الصفر (أو متناقصاً بدرجة كبيرة مع زيادة الفجوة الزمنية) .

وبفحص الشكل (١٧-١) يتضح أن متوسط قيم نفس المتغير أو تباينها أو تغايرها ليست ثابتة عبر الزمن بالنسبة لكل المتغيرات . ولذا فهي تمثل بيانات غير مستقرة Nonstationary Time Series .

(١٧-١-٢) اختبارات الاستقرار (السكون) Tests of Stationarity

يوجد هناك عدد من المعايير التي تستخدم في إختبار صفة الاستقرار أو السكون في السلسلة ، وتتمثل هذه المعايير في :

(١) دالة الارتباط الذاتي Autocorrelation Function (ACF) or (AC)

تتمثل دالة الارتباط الذاتي عند الفجوة أ (ك أ) في :

$$ك_أ = \frac{تغا_أ}{تغا_٠} = \frac{التغاير\ عند\ الفجوة\ أ}{التباين} \quad ....(١٧-٥)$$

$$P_k = AC = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

ويلاحظ أن ك١ = ١ عند أ = ٠ حيث نحصل على التغاير بين نفس القيم في الحالتين.

ويمكن حساب الصيغة (١٧–٥) من بيانات عينة على النحو التالي:

تغا أ = مج (ص ز – ص̄)(ص ز+أ – ص̄) / (ن – أ) ....(١٧–٦)

$$\hat{\gamma}_K = \frac{\Sigma(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n-k}$$

تغا ٠ = مج (ص ز – ص̄)^٢ / (ن – ١) ....(١٧–٧)

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\Sigma(Y_t - \bar{Y})^2}{n-1}$$

حيث ن = حجم العينة ، أ (K) = طول الفجوة الزمنية . وبرصد " ك١ "، " أ " في شكل الانتشار عند الفجوات المختلفة نحصل على شكل ارتباط العينة Sample Correlogram.

وتتراوح قيمة معامل ا لارتباط الذاتي " ك١ " بين – ١، + ١ كأي معامل ارتباط. ويتطلب استقرار السلسلة هنا أن يكون " ك̂١ " مساوياً للصفر أو لا يختلف جوهرياً عنه بالنسبة لأي فجوة أ > صفر .

وفي حالة تمتع بيانات السلسلة بالاستقرار فإن معاملات الارتباط الذاتي للعينة غالباً ما يكون لها توزيع طبيعي وسطه الحسابي صفر وتباينه =(١/ن)، حيث ن = حجم العينة . ومن ثم فإن حدود فترة الثقة عند مستوى معنوية ٥ ٪ لعينة كبيرة الحجم تكون هي :

± ١,٩٦ √(١/ن)

وإذا كان " ك̂١ " يقع داخل هذه الحدود فإننا نقبل فرض العدم القائل بأن هذا المعامل يساوي صفر ، وإذا كان يقع خارج هذه الحدود فإننا نرفض فرض العدم

ويكـون " ك ١ " مختلفاً جوهرياً عن الصفر . ويوضح الشكل (١٧-٣) حدود فترة ثقة ٩٥ ٪ لمعامل الارتباط الذاتي للناتج المحلي في الجدول (١٧-١) . وتتمثل هذه

Date: 05/08/04 Time: 21:20
Sample: 1970:1 1991:4
Included observations: 88

Autocorrelation	Partial Correlation	k	AC	PAC	Q-Stat	Prob
*******	*******	1	0.969	0.969	85.462	0.000
*******	*	2	0.935	-0.058	166.02	0.000
*******	.	3	0.901	-0.020	241.72	0.000
*******	.	4	0.866	-0.045	312.39	0.000
******	.	5	0.830	-0.024	378.10	0.000
******	*	6	0.791	-0.062	438.57	0.000
******	.	7	0.752	-0.029	493.85	0.000
*****	.	8	0.713	-0.024	544.11	0.000
*****	.	9	0.675	0.009	589.77	0.000
*****	.	10	0.638	-0.010	631.12	0.000
*****	.	11	0.601	-0.020	668.33	0.000
****	.	12	0.565	-0.012	701.65	0.000
****	.	13	0.532	0.020	731.56	0.000
****	.	14	0.500	-0.012	758.29	0.000
****	.	15	0.468	-0.021	782.02	0.000
***	.	16	0.437	-0.001	803.03	0.000
***	.	17	0.405	-0.041	821.35	0.000
***	.	18	0.375	-0.005	837.24	0.000
***	.	19	0.344	-0.038	850.79	0.000
**	.	20	0.313	-0.017	862.17	0.000
**	*	21	0.279	-0.066	871.39	0.000
**	.	22	0.246	-0.019	878.65	0.000
**	.	23	0.214	-0.008	884.22	0.000
*.	.	24	0.182	-0.018	888.31	0.000
*.	.	25	0.153	0.017	891.25	0.000
*.	.	26	0.123	-0.024	893.19	0.000
*.	.	27	0.095	-0.007	894.38	0.000
*.	.	28	0.068	-0.012	894.99	0.000
.	.	29	0.043	-0.007	895.24	0.000
.	.	30	0.019	-0.005	895.29	0.000

شكل (١٧-٣)

حدود فترة الثقة ومعاملات الارتباط الذاتي

الحدود في النقاط على جانبي العمود الأول . ومن الواضح أن معاملات الارتباط الذاتي كانت خارج حدود فترة الثقة حتى الفجوة ٢٣ ، وهي تتراوح بين ٠,٩٦٩ حتى ٠,٢١٤ في هذا المدى ، مما يشير إلى عدم توافر صفة الاستقرار في هذه السلسلة . وعادةً ما يتم حساب عدد من معاملات الارتباط الذاتي = ٣/١ حجم العينة. وتمثل النقاط الدقيقة على جانبي العمود الأول المكون من النجوم حدود فترة الثقة.

ولإجراء اختبار مشترك لمعنوية معاملات الارتباط الذاتي كمجموعة نستخدم إحصائية "Q" ، والتي تم تقديمها بواسطة Box & Pierce ، حيث :

$$ك = ن \sum_{أ=1}^{ر} \hat{ك}_{أ}^{2} \qquad \text{..............................} \qquad (١٧-٨)$$

$$Q = n\sum_{k=1}^{m} \hat{P}_k^2$$

حيث : ن (n) = حجم العينة

ر (m) = عدد الفجوات

وبالنسبة للعينة الكبيرة فإن Q (ك) لها توزيع كا^{٢} (chi-square) مع درجات حرية = m (ر) عند مستوى معنوية معين . ولو أن Q (ك) المحسوبة تفوق Q (ك) الجدولية نرفض فرض العدم القائل بأن كل معاملات الإرتباط الذاتى مساوية للصفر وتكون السلسلة غير مستقرة ، أما إذا كان العكس نقبل فرض العدم وتكون السلسلة مستقرة أو ساكنة . وبالكشف في الجداول عن كا٢ عند درجات حرية ٣٠ وهي عدد الفجوات الكلية بالشكل (١٧-٣) ومستوى معنوية ١ ٪ نجدها ٥٠,٩ . ولما كانت Q المحسوبة كما بالشكل = ٨٩٥,٢٩ ، فإن هذا يعني أننا نرفض فرض العدم وتكون السلسلة غير مستقرة .

وتوجد هناك إحصائية أخرى بديلة تستخدم في إجراء نفس الاختبار السابق وتسمى Ljung-Box Statistic (LB) .

وتعرف كما يلي :

ب = ن (ن + ٢) $\sum$ (لك^٢ / ن − أ) ← كا^٢ .... (١٧-٩)

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{P}_k^2}{n-k}\right) \rightarrow \chi_m^2$$

وهي لها توزيع كا^٢ وتعطي نتائج أفضل من " Q " في حالة العينات صغيرة الحجم ، مع كونها تصلح للعينات كبيرة الحجم .

(٢) اختبار جذر الوحدة للاستقرار The Unit Root Test of Stationarity

نبدأ في عرض هذا الاختبار بالنموذج التالي الذي يسمى بنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى First-order Autoregressive Model. A R (1) .

ص ز = ص ز-١ + ع ز .... (١٧-١٠)

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

حيث : ع ز = حد الخطأ العشوائي والذي يفترض فيه :

(أ) وسطه الحسابي = صفر ، (ب) تباينه ثابت ، (حـ) قيمه غير مرتبطة ، وعندئذ يسمى بحد الخطأ الأبيض White Noise Error Term .

ويلاحظ أن معامل الانحدار للصيغة (١٧-١٠) = ١ ، وإذا كان هذا هو الأمر في الواقع فإن ذلك يؤدى إلى وجود مشكلة جذر الوحدة التي تعني عدم استقرار بيانات السلسلة ، حيث يوجد هناك اتجاه زمني في البيانات . ولذا إذا قمنا بتقدير الصيغة التالية :

ص ز = ب ص ز-١ + ع ز .... (١٧-١١)

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

واتضح أن : ب = ١ $(\rho = 1)$ فإن المتغير ص ز (Yt) يكون له جذر الوحدة ويعاني من مشكلة عدم الاستقرار أو عدم السكون .

وتعرف السلسلة التي يوجد لها جذر مساوي للوحدة بسلسلة السير العشوائي Random Walk Time Series ، وهى أحد الأمثلة للسلسلة غير الساكنة .

ويمكن إعادة صياغة المعادلة (١٧-١١) في الصيغة التالية :

Δ ص ز = (ب - ١) ص ز-١ + ع ز

Δ ص ز = م ص ز-١ + ع ز .... (١٧-١٢)

$$\Delta Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta Y_t = \lambda Y_{t-1} + u_t$$

حيث : م = ب - ١ $(\lambda = \rho - 1)$

ولقد تم الحصول على الصيغة (١٧-١٢) بطرح ص ز-١ من طرفي المعادلة (١٧-١١) للحصول على الفروق الأولى للمتغير ص ز (Y_t)، حيث :

Δ ص ز = ص ز - ص ز-١ ⟵ $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

والآن يصبح فرض العدم : م = صفر $\lambda = 0$

ويلاحظ أنه إذا ثبت في الواقع أن : م = صفر ، فإن السلسلة الأصلية تكون غير مستقرة :

Δ ص ز = ع ز

$$\Delta Y_t = u_t \quad \text{.....................} \quad (١٧-١٣)$$

وإذا كانت سلسلة الفروق الأولى من سلسلة السير العشوائي ساكنة أو مستقرة فإن السلسلة الأصلية تكون متكاملة من الرتبة الأولى Integrated of Order 1 أي I(1) . أما إذا كانت السلسلة ساكنة أو مستقرة بعد الحصول على الفروق الثانية (الفروق الأولى للفروق الأولى) فإن السلسلة الأصلية تكون متكاملة من الرتبة الثانية أي I(2) وهكذا . وإذا كانت السلسلة الأصلية مستقرة أو ساكنة يقال أنها متكاملة من الرتبة صفر ، أي I(0) .

ويوجد هناك عدد من الاختبارات التي يمكن استخدامها للتأكد من وجود أو عدم وجود جذر الوحدة ، أي لتحديد مدى استقرار السلسلة الزمنية ، وسوف نتعرض لبعض منها في هذا المبحث . ويلاحظ في هذا الصدد أن الفروض التي يتعين اختبارها تتمثل في :

فرض العدم : بيانات السلسلة الزمنية " ص ز " (Y_t) غير مستقرة

ف . : ب = ١ أو م = صفر $\quad H_0: \quad \rho = 1 \;\; or \;\; \lambda = 0$

الفرض البديل : بيانات السلسلة الزمنية " ص ز " (Y_t) مستقرة

ف ١ : ب < ١ أو م < صفر $\quad H_1: \quad \rho < 1 \;\; or \;\; \lambda < 0$

ويلاحظ في هذا الصدد أن السلسة الزمنية لا تكون مستقرة أو متجهة نحو الاستقرار إلا إذا كان معدل التقلب قصير الأجل فيها متناقصاً بما يضمن تقاربها من وضع التوازن طويل الأجل To converge ، ولعل ما يضمن تحقق ذلك هو أن يكون : م < صفر ($\lambda < 0$) . أما إذا كانت : ب > ١ أو م > صفر ($\rho > 1 \, or \;\; \lambda > 0$) فإن هذا يعبر عن تباعد السلسلة الزمنية عن وضع الاستقرار ، أي وضع التوازن طويل الأجل .

ومن أهم الاختبارات التي تستخدم في اختبار جذر الوحدة ما يلي :

(١) اختبار دكي – فولار : Fuller –Dickey Test (DF)

يعتمد هذا الاختبار على ثلاثة عناصر :

(أ) صيغة النموذج .

(ب) حجم العينة .

(جـ) مستوى المعنوية .

ويستخدم في إجراء هذا الاختبار ثلاث صيغ تتمثل في :

- صيغة السير العشوائي البسيطة : Simple Random Walk

ومثل هذه الصيغة لا يوجد بها حد ثابت ولا متغير اتجاه زمني ، وذلك على النحو التالي:

ص ز = ب ص ز-١ + و ز $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$ ....(١٧-١٤)

أو

Δ ص ز = م ص ز-١ + ى ز $\Delta Y_t = \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- **صيغة السير العشوائي مع حد ثابت** Random walk with drift :

ص ز = أ + ب ص ز-١ + و ز $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + u_t$ ....(١٧-١٥)

أو

Δ ص ز = أ + م ص ز-١ + ى ز $\Delta Y_t = \alpha + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- **صيغة السير العشوائي مع حد ثابت واتجاه زمني**

Random walk with drift and trend

ص ز = أ + أ١ ز + ب ص ز-١ + و ز $Y_t = \alpha + \alpha_1 T + \rho Y_{t-1} + u_t$ (١٧-١٦)

أو

Δ ص ز = أ + أ١ ز + م ص ز-١ + ى ز $\Delta Y_t = \alpha + \alpha_1 T + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$

ولإجراء اختبار DF باستخدام الصيغة الأولى نتبع الخطوات التالية :

١- نقوم بحساب ما يسمى " τ " (tau) المحسوبة باستخدام الصيغة التالية :

τ* (المحسوبة) = (بَ - ١) / ع بَ   أو   (مَ - صفر) / ع م

$$\tau^* = \frac{\hat{\rho} - 1}{S_{\hat{\rho}}} \quad \text{or} \quad = \frac{\hat{\lambda} - 0}{S_{\hat{\lambda}}}$$

حيث : ع بَ ، ع م ($S_{\hat{\rho}}; S_{\hat{\lambda}}$) هي الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة .

٢- لا نستطيع مقارنة "* τ " المحسوبة بقيم "t" الجدولية حتى في حالة العينات الكبيرة ، حيث أنها لا تتبع توزيع طبيعي معتدل ، وإنما نبحث عن " τ " الجدولية في جداول معدة خصيصا لذلك من قبل Dickey - Fuller يوجد بها ما يسمى القيم الحرجة Critical values عند حجم عينة معين (n)، ومستوى معنوية معين (١٪ ، ٥ ٪ ، ١٠ ٪) وتوجد هذه الجداول في الملحق الإحصائي بالكتاب . وعند استخدام برامج كمبيوتر متخصصة مثل Eviews فإنها تعطي القيم الحرجة ضمن النتائج دون الحاجة للبحث عنها في الجداول .

٣- إذا كانت "* τ " المحسوبة > " τ " الجدولية نرفض فرض العدم : ب = ١ أو : م =صفر ونقبل الفرض البديل : ب < ١ أو : م < صفر ، وبالتالي تكون السلسلة ساكنة أو مستقرة .

٤- إذا كانت "* τ " المحسوبة < " τ " الجدولية نقبل فرض العدم وبالتالي تكون السلسلة غير ساكنة أو غير مستقرة . ويجب أن نراعي هنا أننا نقارن القيم المطلقة لكل من تاو المحسوبة و تاو الجدولية بغض النظر عن الإشارة .

غير أن اختبار ديكي – فولار DF لا يصبح ملائماً إذا وجدت هناك مشكلة ارتباط ذاتي في الحد العشوائي أو ما يسمى بالارتباط السلسلي Serial correlation ، وذلك بالرغم من كون بيانات المتغيرات المدرجة في العلاقة المقدرة قد تكون مستقرة . وعندئذ نلجأ لاستخدام اختبار آخر يسمى اختبار ديكي – فولر الموسع Augmented Dickey-Fuller (ADF) .

(٢) اختبار ديكي – فولار الموسع ADF :

يعتمد اختبار ديكي – فولار الموسع ADF على نفس العناصر الثلاثة التي سبقت الإشارة إليها في حالة اختبار ديكي – فولار DF ، وهي : صيغة النموذج المستخدم ، وحجم العينة ، ومستوى المعنوية . ويلاحظ في هذا الصدد أن هناك ثلاث صيغ للنموذج الذي يمكن استخدامه في حالة ADF :

١- الصيغة الأولى (I) :

Δ ص ز = م ص ز-١ + $\sum_{ر=1}^{ك}$ ب ر Δ ص ز-ر + ع ز ....(١٧-١٧)

$$\Delta Y_t = \lambda Y_{t-1} + \sum^{k} \rho_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

ويلاحظ على هذه الصيغة أنها لا تحتوي على حد ثابت ولا اتجاه زمني . وتتمثل الفروض في هذه الحالة في :

فرض العدم : م = صفر أو ب = ١ $\lambda = 0$ or $\rho = 1$

الفرض البديل = م > صفر أو ب > ١ $\lambda < 0$ or $\rho < 1$

ويتم إدراج عدد من الفروق ذات الفجوة الزمنية (ك) (k) في الصيغة (١٧-١٧) حتى تختفي مشكلة الارتباط السلسلي معبراً عنها باحصائية DW . ويلاحظ هنا أنه إذا كانت هذه المشكلة تختفي بعد إدراج ثلاثة حدود للفروق مثلا ، فإن هذه الفروق تتمثل في :

Δ ص ز-١ = ص ز-١ − ص ز-٢ $\Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$

Δ ص ز-٢ = ص ز-٢ − ص ز-٣ $\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3}$

Δ ص ز-٣ = ص ز-٣ − ص ز-٤ $\Delta Y_{t-3} = Y_{t-3} - Y_{t-4}$

و بعد تقدير الصيغة السابقة يتم حساب تاو ديكي فولر الموسعة باستخدام الصيغة التالية :

$\tau^* = \frac{\hat{م}}{\hat{ع}_م}$ $\tau^* = \frac{\hat{\lambda}}{S_{\hat{\lambda}}}$ ..(١٨-١٧)

ثم يتم الحصول على القيمة الحرجة $ADF_{\lambda\,(I,n,e)}$ من الجداول المخصصة لذلك للنموذج I ، وحجم العينة n ، ومستوى المعنوية e . وتوجد هذه الجداول في

الملحق الإحصائي للكتاب ، كما أن هناك بعض البرامج التي تعطي القيم الحرجة بصورة تلقائية بعد تغذيتها بالمعلومات المطلوبة . وبعد ذلك يتم مقارنة "τ *" المحسوبة مع القيمة الحرجة وفقا للطريقة التي سوف يتم شرحها فيما بعد .

٢- الصيغة الثانية (II) :

وتختلف هذه الصيغة عن الصيغة الأولى في كونها تحتوي على حد ثابت .

Δ ص ز = أ + م ص ز-١ + ∑ ب ر Δ ص ز-ر + ع ز ....(١٧-١٩)

$$\Delta Y_t = \alpha + \lambda Y_{t-1} + \sum^{k} \rho_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

وتتمثل الفروض المراد اختبارها في هذه الحالة في :

فرضي العدم : H_0:

م = صفر أو ب = ١ $\lambda = 0$ or $\rho = 1$

أ = صفر $\alpha = 0$

الفرضان البديلان : H_1:

م < صفر أو ب < ١ $\lambda < 0$ or $\rho < 1$

أ ≠ صفر $\alpha \neq 0$

وحتى يتم الاختبار يتعين حساب تاو ديكي - فولار الموسع $\hat{\tau}^*_\lambda$ باستخدام الصيغة (١٧-١٨) السابقة ، و تاو للمعلمة الناقلة $\hat{\tau}^*_\alpha$ باستخدام الصيغة التالية :

$\hat{\tau}^*_\alpha$ = أ^ / ع^أ

$$\hat{\tau}^*_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{S_{\hat{\alpha}}} \qquad (١٧-٢٠)$$

ثم يتعين البحث عن القيم الحرجة لكل من أ ، م (λ,α) في الجداول ، حيث :

القيمة الحرجة لـ "م " (λ) هي : $ADF_{\lambda\,(II,n,e)}$

القيمة الحرجة لـ "أ" (α) هي : $ADF\ \alpha_{(II,n,e)}$

على أن يتم المقارنة بين القيم المحسوبة والجدولية على النحو الذي سوف يوضح فيما بعد . وتعطي بعض برامج الكمبيوتر القيم الحرجة بطريقة تلقائية .

٣- الصيغة الثالثة (III) :

وتتضمن هذه الصيغة حداً ثابتاً و اتجاهاً زمنياً :

Δ ص ز = أ +جـ ز + م ص ز-١ + Σ ب ر Δ ص ز-ر + ء ز ....(١٧-٢١)

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \lambda Y_{t-1} + \sum^{k} \rho_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

وتتمثل الفروض المراد اختبارها في :

فروض العدم : H_0 :

م = صفر أو ب = ١ $\lambda = 0 \text{ or } \rho = 1$

أ = صفر $\alpha = 0$

جـ = صفر $\beta = 0$

الفروض البديلة : H_1:

م > صفر أو ب > ١ $\lambda < 0 \text{ or } \rho < 1$

أ ≠ صفر $\alpha \neq 0$

جـ ≠ صفر $\beta \neq 0$

ثم يتم حساب القيم المحسوبة لتاو للمعلمات المختلفة على النحو التالي :

$$\tau^*_\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{S_{\hat{\lambda}}} \qquad\qquad \frac{\hat{م}}{ع_م} = \tau^*_\lambda$$

$$\tau^*_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{S_{\hat{\alpha}}} \qquad\qquad \frac{\hat{أ}}{ع_أ} = \tau^*_\alpha \qquad (٢٢-١٧)$$

$$\tau^*_\beta = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} \qquad\qquad \frac{\hat{جـ}}{ع_{جـ}} = \tau^*_\beta$$

ويتم الحصول على القيم الحرجة لهذه المعلمات إما من الجداول أو من برامج الكمبيوتر المتخصصة ، وهي :

$ADF_{\lambda\,(III,n,e)}$ ، $ADF_{\alpha\,(III,n,e)}$ ، $ADF_{\beta\,(III,n,e)}$

وتتمثل خطوات اختبار ديكي – فولار الموسع ADF في :

الخطوة الأولى :

١- تقدير الصيغة الثالثة (III) ، ثم إجراء اختبار الفرض :

م = صفر أو ب = ١ ($\lambda = 0$ or $\rho = 1$)

٢- إذا كانت : $ADF_{\lambda(III,n,e)} < \tau^*_\lambda$ نرفض فرض العدم القائل بوجود جذر الوحدة ونقبل الفرض البديل بأن بيانات السلسلة للمتغير : ص ر (Y_t) مستقرة أو ساكنة . ثم نتوقف عن إجراء أي اختبارات أخرى .

٣- إذا كانت $ADF_{\lambda(III,n,e)} > \tau^*_\lambda$ نقبل فرض العدم القائل بوجود جذر الوحدة ثم نستمر للنقطة التالية .

٤- نختبر الفرض : جـ = صفر (β=0) وهي معلمة الاتجاه الزمني .

٥-إذا كانت $ADF_{\beta(III,n,e)} > \tau^*_\beta$ نقبل فرض العدم ويؤكد هذا وجود جذر الوحدة ونستمر للخطوة الثانية في الاختبار مباشرة ونسقط ما بقى من نقاط في الخطوة الأولى.

٦- إذا كان $ADF_{\beta(III,n,e)} < \tau^*_\beta$ نرفض فرض العدم للاتجاه الزمني ونقبل الفرض البديل ، وعندئذ نعيد اختبار الفرض: م = صفر (λ=0) باستخدام اختبار "t" في ظل التوزيع المعتدل الطبيعي :

- إذا كانت : $t_{\lambda,n,e} < t^*_\lambda$ نرفض فرض العدم (ب = ١) ونقبل الفرض البديل (ب< ١) وهو ما يعني أن السلسلة الزمنية مستقرة ، ونتوقف عند هذا الحد ولا تكمل اختبارات أخرى .
- إذا كانت : $t_{\lambda,n,e} > t^*_\lambda$ نقبل فرض العدم ، ومن ثم يكون هناك جذر الوحدة بالسلسلة ونستمر للخطوة الثانية .

الخطوة الثانية :

١- نقوم بتقدير الصيغة الثانية للنموذج (II) .

٢- نختبر الفرض : م = صفر أو ب = ١ (λ=0 or ρ= 1) .

٣- إذا كانت : $ADF_{\lambda(II,n,e)} < \tau^*_\lambda$ نرفض فرض العدم القائل بجذر الوحدة ونقبل الفرض البديل (ب <١) ρ<1 ومن ثم تكون السلسلة مستقرة أو ساكنة ونتوقف عند هذا الحد.

٤- إذا كانت : $ADF_{\lambda(II,n,e)} > \tau^*_\lambda$ نقبل فرض العدم القائل بوجود جذر الوحدة ، ونستمر للنقطة التالية .

٥- نختبر الفرض : أ = صفر (α=0) وهي معلمة الحد الثابت في النموذج II .

٦- إذا كانت : $ADF_{\alpha(II,n,e)} > \tau^*_\alpha$ نقبل فرض العدم ، ونستمر مباشرة إلى الخطوة الثالثة مع إسقاط ما تبقى من نقاط في الخطوة الثانية .

٧- إذا كانت : $ADF_{\alpha(II,n,e)} < \tau_{\alpha}^{*}$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ($\alpha \neq 0$) ، ثم نختبر الفرض : م = صفر أو ب = ١ ($\lambda = 0$ or $\rho = 1$) باستخدام إحصائية (t) التابعة للتوزيع المعتدل الطبيعي . ومن ثم :

- إذا كانت : $t_{\lambda,n,e} < t_{\lambda}^{*}$ نرفض فرض العدم (ب = ١) ونقبل الفرض البديل (ب< ١) وهو ما يعني أن السلسلة الزمنية مستقرة ، ونتوقف عند هذا الحد ولا تكمل اختبارات أخرى .
- إذا كانت : $t_{\lambda,n,e} > t_{\lambda}^{*}$ نقبل فرض العدم ، ومن ثم يكون هناك جذر الوحدة بالسلسلة ونستمر للخطوة الثالثة .

الخطوة الثالثة :

١- نقوم بتقدير الصيغة الأولى للنموذج (I) ، ثم نختبر الفرض :
م = صفر أو ب = ١ ($\lambda = 0$ or $\rho = 1$) .

٢- إذا كانت : $ADF_{\lambda(I,n,e)} < \tau_{\lambda}^{*}$ نرفض فرض العدم القائل بجذر الوحدة ونقبل الفرض البديل (ب <١) $\rho < 1$ ومن ثم تكون السلسلة مستقرة أو ساكنة ونتوقف عند هذا الحد.

٣- إذا كانت : $ADF_{\lambda(I,n,e)} > \tau_{\lambda}^{*}$ نقبل فرض العدم القائل بوجود جذر الوحدة ، وتكون السلسلة الزمنية غير مستقرة . ثم نقوم بعمل تصحيحي لجعلها مستقرة بأخذ الفرق الأول لسلسلة البيانات ونعيد الاختبار لنتأكد من أنها مستقرة . ويحدث هذا بالطبع إذا تأكدنا أنها لا تتمتع بخاصية التكامل المشترك على النحو الذي سوف يتم بيانه فيما بعد.

ويلاحظ في هذا الصدد أن القيم الحرجة يمكن الحصول عليها من تحليل Mackinnon المعروف بـ Response Surface Analysis ، ويشار للقيم الحرجة تلك أحياناً بالمصطلح : MK Critical values . وتوجد هناك صيغة إذا تم التعويض فيها بالقيم المطلوبة يمكن الحصول على القيمة الحرجة (MK) لاختبارات جذر الوحدة والتكامل المشترك الذي يستخدم نفس التحليل ، وهي تتمثل في :

$$CV(k, Model, n, e) = b + b_1\left(\frac{1}{n}\right) + b_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17-30)$$

حيث :

القيمة الحرجة Critical value = MK

عدد المتغيرات في صيغة التكامل المشترك = k

في حالة اختبار جذر الوحدة k=1

حجم العينة = n

النموذج : I , II, III = Model

مستوى المعنوية (١ ٪ ، ٥ ٪ ، ١٠ ٪) = e

ويوضح الجدول (١٧-٣) القيم : b , b_1 , b_2 التي نعوض بها في الصيغة (١٧-٣٠) .

وسوف نتعرض فيما بعد للتكامل المشترك في مبحث مستقل ، وهو يستخدم نفس القيم الحرجة في حالة الاعتماد على نفس الصيغ السابقة كمعادلات للتكامل المشترك .

جدول (١٧-٣)

قيم b , b_1 , b_2

k	Model	e	b	b1	b2
1	I	0.01	-2.5658	-1.960	-10.04
1	I	0.05	-1.9393	-0.398	0.0
1	I	0.10	-1.6156	-0.181	0.0
1	II	0.01	-3.4335	-5.999	-29.25
1	II	0.05	-2.8621	-2.738	-8.36
1	II	0.10	-2.5671	-1.438	-4.48
1	III	0.01	-3.9638	-8.353	-47.44
1	III	0.05	-3.4126	-4.039	-17.83
1	III	0.10	-3.1279	-2.418	-7.58
2	II	0.01	-3.9001	-10.534	-30.03
2	II	0.05	-3.3377	-5.967	-8.98
2	II	0.10	-3.0462	-4.069	-5.73
2	III	0.01	-4.3266	-15.531	-34.03
2	III	0.05	-3.7809	-9.421	-15.06
2	III	0.10	-3.4959	-7.203	-4.01
3	II	0.01	-4.2981	-13.790	-46.37
3	II	0.05	-3.7429	-8.352	-13.41
3	II	0.10	-3.4518	-6.241	-2.79
3	III	0.01	-4.6676	-18.492	-49.35
3	III	0.05	-4.1193	-12.024	-13.13
3	III	0.10	-3.8344	-9.188	-4.85
4	II	0.01	-4.6493	-17.188	-59.20
4	II	0.05	-4.1000	-10.745	-21.57
4	II	0.10	-3.8110	-8.317	-5.19
4	III	0.01	-4.9695	-22.504	-50.22
4	III	0.05	-4.4294	-14.501	-19.54
4	III	0.10	-4.1474	-11.165	-9.88
5	II	0.01	-4.9587	-22.140	-37.29
5	II	0.05	-4.4185	13.461	-21.16
5	II	0.10	-4.1327	-10.638	-5.48
5	III	0.01	-5.2497	-26.606	-49.56
5	III	0.05	-4.7154	-17.432	-16.50
5	III	0.10	-4.4345	-13.654	-5.77
6	II	0.01	-5.2400	-26.278	-41.65
6	II	0.05	-4.7048	-17.120	-11.17
6	II	0.10	-4.4242	-13.347	-0.0
6	III	0.01	-5.5127	-30.735	-52.50
6	III	0.05	-4.9767	-20.883	-9.05
6	III	0.10	-4.6999	-16.445	0.0

مثال (١٧-١)

اختبار جذر الوحدة لسلسلة الناتج المحلي للولايات المتحدة

دعنا نقوم باختبار جذر الوحدة لسلسلة بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة الموضحة بالجدول (١٧-١) باستخدام اختباري DF & ADF .

(١) نقوم بتقدير النماذج (١٧-١٤) - (١٧-١٦) الخاصة باختبار DF باستخدام برنامج Eviews فنحصل على النتائج التالية :

$$\Delta GDP_t = 0.0058 GDP_{t-1} + \varepsilon_t \ldots\ldots (17-23)$$
$$\tau^*_\lambda \quad (5.79) \quad DW = 1.34$$
$$DF_{\lambda(I,88,0.01)} = -2.589 \,\&\, DF_{\lambda(I,88,0.05)} = -1.944 \,\&\, DF_{\lambda(I,88,0.10)} = -1.618$$
$$\Delta GDP_t = 28.2 - 0.0014 GDP_{t-1} + \varepsilon_t \ldots\ldots (17-24)$$
$$\tau^*_\lambda \quad (-0.219) \quad DW = 1.35$$
$$DF_{\lambda(II,88,0.01)} = -3.506 \,\&\, DF_{\lambda(II,88,0.05)} = -2.89 \,\&\, DF_{\lambda(II,88,0.10)} = -2.584$$
$$\Delta GDP_t = 190.38 + 1.478T - 0.06 GDP_{t-1} + \varepsilon_t \ldots\ldots (17-25)$$
$$\tau^*_\lambda \quad (-1.625) \quad DW = 1.31$$
$$DF_{\lambda(III,88,0.01)} = -4.066 \,\&\, DF_{\lambda(III,88,0.05)} = -3.46 \,\&\, DF_{\lambda(III,88,0.10)} = -3.156$$

ومن الواضح أن هناك مشكلة ارتباط سلسلي طردي في الثلاث صيغ السابقة حيث أن : $DW<du$ في الحالات الثلاث ، ومن ثم فإن اختبار DF لا يصلح في هذه الحالة ولا يعطي نتائج دقيقة بشأن جذر الوحدة .

(٢) نقوم باستخدام ADF ، ونبدأ بتقدير الصيغة الثالثة للنموذج على النحو التالي :

$$\Delta GDP_t = 23497 + 1.89T - 0.0787 GDP_{t-1} + 0.356 \Delta GDP_{t-1} + \varepsilon_t \ldots (17-26)$$
$$\tau^* \quad (2.383)\ (2.152)\ (-2.215) \quad (3.465) \quad DW=2.08 \quad R^2=0.15$$
$$ADF_{\lambda(III,,88,0.01)} = -4.067, ADF_{\lambda(III,88,0.05)} = -3.462, ADF_{\lambda(III,88,0.10)} = -3.157$$
$$ADF_{\beta(III,,88,0.01)} = 3.53, ADF_{\beta(III,88,0.05)} = 2.79, ADF_{\beta(III,88,0.10)} = 2.38$$

ومن الواضح أن النموذج تخلص من مشكلة الارتباط السلسلي بعد إدراج الفجوة الأولى للفرق الأول ، حيث أن $DW = 2.08$. وبمقارنة القيم المحسوبة مع القيم الحرجة عند مستوى معنوية ١ ٪ ، ٥ ٪ نجد أن القيم المحسوبة أقل من القيم الحرجة لكل من $\lambda\&\beta$ وهو ما يعني أننا نقبل فرض العدم (وجودجذر الوحدة) وفقا لهذه الصيغة للنموذج ، وننتقل إلى الخطوة الثانية مباشرة .

(٣) نقوم بتقدير الصيغة الثانية للنموذج (II) على النحو التالي :

$$\Delta GDP_t = 28.719 - 0.0033GDP_{t-1} + 0.319\Delta GDP_{t-1} + \varepsilon_t ....(17-27)$$

$$\tau^* \quad (1.214) \quad (-0.547) \quad (3.089) \quad DW = 2.04 \quad R^2 = 0.10$$

$$ADF_{\lambda(II,88,0.01)} = -3.507, ADF_{\lambda(II,88,0.05)} = -2.895, ADF_{\lambda(II,88,0.10)} = -2.584$$

$$ADF_{\alpha(II,88,0.01)} = 3.22, ADF_{\alpha(II,88,0.05)} = 2.54, ADF_{\alpha(II,88,0.10)} = 2.17$$

ومن الواضح أن النموذج تخلص من مشكلة الارتباط السلسلي بإدراج الفجوة الأولى للفرق الأول للسلسلة . وبمقارنة القيم المحسوبة بالقيم الحرجة عند مستوى معنوية ٥ ٪ ، ١ ٪ نجد أن القيم المحسوبة أقل من القيم الحرجة لكل من ($\lambda\&\alpha$) وهو ما يعني وجود جذر الوحدة وفقا لهذه الصيغة للنموذج ، ومن ثم نستمر للخطوة الثالثة .

(٤) نقوم بتقدير الصيغة الأولى للنموذج (I) على النحو التالي :

$$\Delta GDP_t = 0.0039GDP_{t-1} + 0.327\Delta GDP_{t-1} + \varepsilon_t ....(17-28)$$

$$\tau^* \quad (3.449) \quad (3.156) \quad DW = 2.03 \quad R^2 = 0.088$$

$$ADF_{\lambda(I,88,0.01)} = -2.589, ADF_{\lambda(I,88,0.05)} = -1.944, ADF_{\lambda(I,88,0.10)} = -1.618$$

ومن الواضح أن النموذج قد تخلص من مشكلة الارتباط السلسلي بإدراج الفجوة الأولى للفرق الأول للسلسلة . غير أن قيمة (λ) موجبة في هذه الحالة ومن ثم فإن $\rho > 1$ ولذا فإن مقارنة تاو المحسوبة والتي هي موجبة في هذه الحالة مع القيمة الحرجة سوف يكون بمثابة اختبار مدى معنوية زيادة ρ عن الواحد . وحيث أن تاو المحسوبة الموجبة أكبر من القيمة الحرجة من الناحية المطلقة فإن هذا يعني أن هذه السلسلة غير مستقرة لأن ρ تزيد عن الواحد بمقدار جوهري ، وكان من المفروض أن تقل عنه.

المبحث الثاني

التكامل المشترك

Cointegration

إذا كـان هـناك سلسلتان : ص ز ، س ز (Y_t, X_t) غير مستقرتين فليس مـن الضروري أن يترتب على استخدامهما في تقدير علاقة ما الحصول على انحدار زائف ، وذلك إذا كانا يتمتعان بخاصية التكامل المشترك . ونتعرض في هذا المبحث لبعض المفاهيم المتعلقة بالتكامل المشترك واختباراته .

(١٧-٢-١) تعريف تكامل السلاسل الزمنية Integration of a time series :

إذا كان هناك متغير ما " ص ز " Y_t مستقراً Stationary في صورته الأصلية قبل إجراء أي تعديلات عليه يقال أنه متكامل من الرتبة صفر ، أي : ص ز ~ ك (٠) $Y_t \sim I(0)$. وإذا كان هذا المتغير غير مستقر في صورته الأصلية nonstationary وأصبح مستقراً بعد الحصول على الفروق الأولى :

Δ ص ز = ص ز − ص ز-١ ⟵ $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

يقال أنه متكامل من الرتبة الأولى ، أي أن : ص ز ~ ك (١) ⟵ $Y_t \sim I(1)$

وبوجه عام إذا أصبحت السلسلة الزمنية الخاصة بمتغير ما "ص ز " Y_t مستقرة بعد الحصول على عدد من الفروق يساوي " د " d يقال أن هذه السلسلة متكاملة من الرتبة "د" d ، أي أن : ص ز ~ ك (د) ⟵ $Y_t \sim I(d)$.

وتوجد هناك بعض الخصائص المتعلقة بتكامل السلاسل الزمنية ، منها :

(١) إذا كان هناك متغيران : Y_t & X_t وكانت رتبة تكامل كل واحد منهما كما يلي :

$$X_t \sim I(0)$$
$$Y_t \sim I(1)$$

فإن السلسلة Z_t التي تشير إلى مجموعهما تكون متكاملة من الرتبة الأولى ، أي أن :

$$Z_t = (Y_t + X_t) \sim I(1)$$

(٢) لا يؤثر إضافة حد ثابت أو ضربه في سلسلة زمنية على رتبة تكاملها . فلو أن :

$$Xt \sim I(d) \text{ and } a, b = \text{constant}$$
$$\therefore Z_t = (a + bX_t) \sim I(d)$$

(٣) يترتب على طرح سلسلتين متكاملتين من رتبة واحدة الحصول على سلسلة جديدة متكاملة من نفس الرتبة . فلو أن :

$$Yt \sim I(d)$$
$$Xt \sim I(d)$$
$$a = \text{constant}$$
$$\therefore Z_t = (Y_t - aX_t) \sim I(d)$$

(٤) إذا قمنا بتقدير علاقة بين متغيرين ص ز ، س ز (Y_t , X_t) وكان كل منهما متكامل من الرتبة الأولى نحصل على بواقي Residuals متكاملة من الرتبة الأولى أيضا ، وهو ما يعني أن المتغيرين لا يتصفان بخاصية التكامل المشترك على النحو الذي سوف نوضحه فيما بعد . أي إذا كان :

ص ز ~ ك (١)	$Y_t \sim I(1)$
س ز ~ ك (١)	$X_t \sim I(1)$
ص ز = أ + ب س ز + ع ز	$Y_t = a + b X_t + u_t$
ع ز ~ ك (١)	$u_t \sim I(1)$

ولعل هذا يعني أنه حتى إذا كان هناك سلسلتين متكاملتين من نفس الرتبة كل على حدة ، فليس هناك ما يضمن أن يتصفان بخاصية التكامل المشترك .

(١٧-٢-٢) تعريف التكامل المشترك Cointegration

يعرف التكامل المشترك بأنه تصاحب Association بين سلسلتين زمنيتين : ص ز ، س ز (Y_t, X_t) أو أكثر ، بحيث تؤدي التقلبات في إحداهما لإلغاء التقلبات في الأخرى بطريقة تجعل النسبة بين قيمتيهما ثابتة عبر الزمن . ولعل هذا يعني أن بيانات السلاسل الزمنية قد تكون غير مستقرة إذا ما أخذت كل على حدة ، ولكنها تكون مستقرة كمجموعة . ومثل هذه العلاقة طويلة الأجل بين مجموعة المتغيرات تعتبر مفيدة في التنبؤ بقيم المتغير التابع بدلالة مجموعة من المتغيرات المستقلة .

ويتطلب حدوث التكامل المشترك في حالة أن تكون السلسلتان ص ز ، س ز (Y_t , X_t) متكاملتين من الرتبة الأولى كل على حدة ، أن تكون البواقي الناجمة عن تقدير العلاقة بينهما متكاملة من الرتبة صفر . أي أنه ، حتى يكون التكامل المشترك موجوداً بين متغيرين : ص ز ، س ز (Y_t , X_t) يتعين تحقق الشروط التالية :

ص ز ~ ك (١)　　　$Y_t \sim I(1)$

س ز ~ ك (١)　　　$X_t \sim I(1)$

ص ز = أ + ب س ز + ع ز　　　$Y_t = a + b X_t + u_t$

ع ز ~ ك (٠)　　　$u_t \sim I(0)$

ويلاحظ في هذه الحالة أن الحد العشوائي متمثلاً في البواقي ع ز (u_t) يقيس انحراف العلاقة المقدرة في الأجل القصير عن اتجاهها التوازني في الأجل الطويل .

ومما سبق نجد أن التكامل المشترك هو التعبير الإحصائي لعلاقة التوازن طويلة الأجل . فلو أن هناك متغيرين يتصفان بخاصية التكامل المشترك فإن العلاقة بينهما تكون متجهة لوضع التوازن في الأجل الطويل ، بالرغم من إمكانية وجود انحرافات عن هذا الاتجاه في الأجل القصير . وتنعكس هذه الانحرافات كما قلنا في البواقي المتمثلة في:

ع ز = ص ز - أ - ب س ز　　　$u_t = Y_t - a - bX_t$

ووفقا لهذا المنطق فإن النظام يكون في وضع توازن عندما ع ز (u_t) = صفر ، ويكون في حالة عدم توازن عندما ع ز (u_t) $\neq$ صفر .

(١٧-٢-٣) اختبارات التكامل المشترك :

يوجد هناك عديد من اختبارات التكامل المشترك ، نختار منها اثنين على النحو التالي :

(١) اختبار إنجل-جرانجر Engle-Granger (E G) Test

(٢) اختبار الانحدار المتكامل لديربن واتسون
Cointegrating Regression Durbin-Watson Test (C R D W)

(١) اختبار إنجل-جرانجر (E G) :

لإجراء هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية :

١- نقوم بتقدير إحدى الصيغ الأصلية التالية للتكامل المشترك :

ص ز = أ + ب س ز + ع ز   (II) $Y_t = a + b X_t + u_t$

ص ز = أ + ب١ ز + ب٢ س ز + ع ز   (III) $Y_t = a + b_1 T + b_2 X_t + u_t$

ويلاحظ أن النموذج (II) يحتوي على حد ثابت دون اتجاه زمني ، والنموذج (III) يحتوي على حد ثابت واتجاه زمني .

٢- نحصل على البواقي ع ز (u_t) وفقا للصيغة المستخدمة :

ع ز = ص ز - أ - ب س ز $u_t = Y_t - a - b X_t$

ع ز = ص ز - أ - ب١ ز - ب٢ س ز $u_t = Y_t - a - b_1 T + b_2 X_t$

٣-نقوم باختبار مدى سكون سلسلة ع ز (u_t) بتقدير إحدى الصيغ التالية :

Δ ع ز = م ع ز-١ + و ز   .... (١٧-٢٩)

Δ ع ز = م ع ز-١ + Σ ب ز-ر Δ ع ز-ر + و ز

$$\Delta u_t = \lambda u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta u_t = \lambda u_{t-1} + \sum \rho_{t-j} \Delta u_{t-j} + \varepsilon_t$$

ونحدد *τ المحسوبة لنقارنها بـ بالقيمة الحرجة من جداول أعدها خصيصاً كلٍ من إنجل وجرانجر لذلك . فإذا كانت τ المحسوبة أكبر من القيمة الحرجة نرفض فرض العدم ، وبالتالي تكون سلسلة ع ز (u_t) ساكنة، وبيانات سلسلتي كلٍ من ص ز ، س ز (Y_t , X_t) تتصف بخاصية التكامل المشترك . وبناءاً على ذلك فإن الانحدار المقدر لا يكون زائفاً . وبالطبع إذا حدث العكس لا تكون المتغيرات محل الاعتبار متمتعة بخاصية التكامل المشترك ، و يكون الانحدار المقدر زائفاً . وتوجد جداول القيم الحرجة لاختبار EG بالملحق الإحصائي .

(٢) اختبار الانحدار المتكامل لديربن واتسون :

لإجراء هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية :

١- نقوم بحساب إحصائية ديربن واتسون (d) المصاحبة للانحدار الأصلي بين ص ز (Y_t) ، س ز (X_t) وتسمى d المحسوبة .

٢- نبحث في جداول أعدها Sargan & Bhargava عن d الجدولية .

٣- نختبر فرض العدم d = 0 ، فإذا كانت d المحسوبة < d الجدولية نرفض فرض العدم وبالتالي يوجد هناك تكامل مشترك ، ولا يكون الانحدار المقدر زائفاً ، والعكس صحيح .

وتوجد هناك اختبارات أخرى أكثر شمولية وتعقيداً مثل اختبار جوهانسن Johnasen Approach ، ويستخدم هذا الاختبار في حالة النماذج متعددة المعادلات الآنية من الصيغة VAR التي سوف تتعرض لها فيما بعد ، ويعتمد على مدخل المعلومات الكاملة للاحتمال الأعظم Full Information Maximum Likelihood (FIML) .

المبحث الثالث

كيفية إزالة عدم السكون في السلسلة

من أهم ملامح عدم سكون السلسلة :

(أ) تغير تباين السلسلة عبر الزمن .

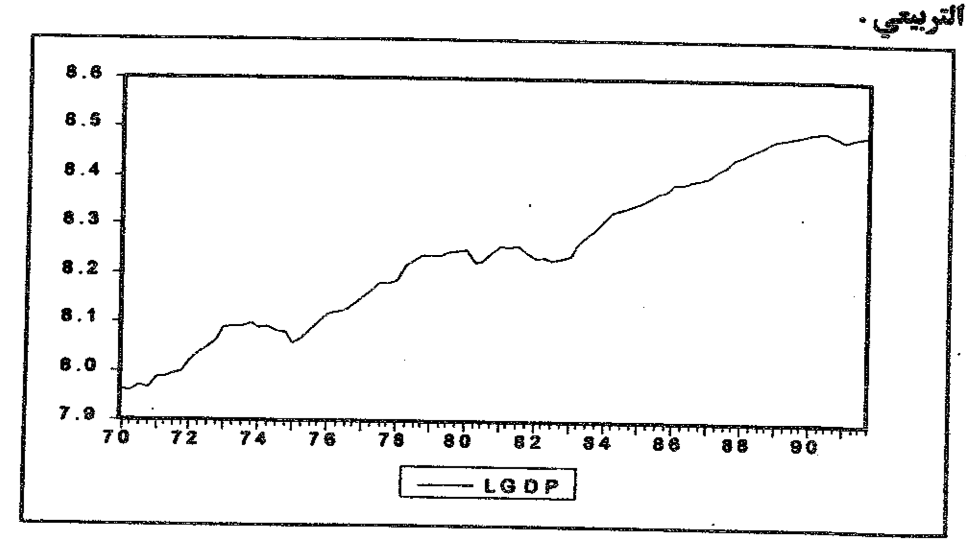
(ب) وجود اتجاه عام في بيانات السلسلة .

(حـ) وجود نمط متكرر للتقلبات الموسمية عبر الزمن

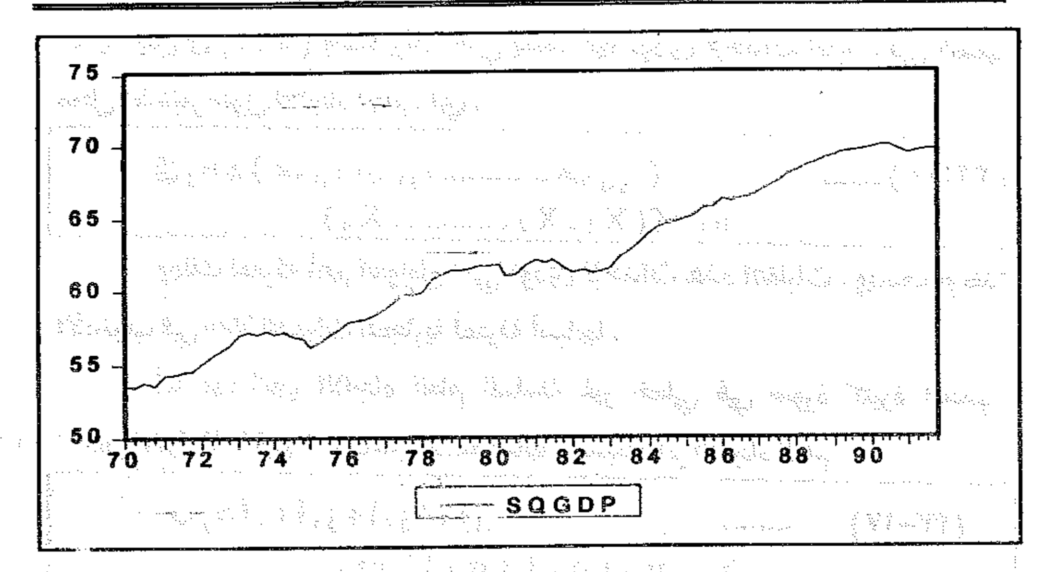
ونوضح فيما يلي كيفية إزالة مظاهر عدم السكون تلك :

(١٧-٣-١) علاج عدم ثبات التباين :

من أهم التحويلات المستخدمة في تثبيت تباين السلسلة الحصول على اللوغاريتم الطبيعي لبيانات السلسلة أو الحصول على الجذر التربيعي لها . وبعد إجراء التقديرات المطلوبة نعيد صيغة التقدير لأصلها . ويوضح الشكل (١٧-٤) لوغاريتم الناتج المحلي للولايات المتحدة (LGDP) . ويوضح الشكل (١٧-٥) الجذر التربيعي لنفس سلسلة الناتج المحلي . ومن الواضح أن التباين أكثر ثباتاً في حالة تحويلة الجذر التربيعي .



شكل (١٧-٤) – اللوغاريتم الطبيعي لسلسة الناتج المحلي للولايات المتحدة



شكل (١٧-٥) الجذر التربيعي للناتج المحلي للولايات المتحدة

(١٧-٣-٢) إزالة الاتجاه العام :

يمكن تعريف الاتجاه العام بأنه يتمثل في وجود تغير منتظم في مستوى السلسلة الزمنية في اتجاه محدد . ومن طرق إزالة الاتجاه : طريقة الانحدار ، وطريقة الفروق.

(١) طريقة الانحدار :

إذا كان الاتجاه العام للسلسلة خطياً فإنه يتم استخدام الصيغة التالية :

ص ز = أ . + أ ١ ز + ق ز .... (١٧-٣٠)

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 T + u_t$$

وتصبح بيانات السلسلة بعد إزالة الاتجاه العام كما يلي :

ق ز = ص ز - أ . - أ ١ ز .... (١٧-٣١)

$$u_t = Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 T$$

وتسمى هذه العملية detrending، وبعد استبعاد الاتجاه العام تبقى التقلبات حول هذا الاتجاه ممثلة في قيم ق ز (u_t) . ويمكن أن نقوم بعد ذلك بتقدير انحدار

جديد بين ق ز (u_t) والمتغيرات التي يعتقد أنها تؤدى لإحداث تقلبات في المتغير محل الاعتبار حول الاتجاه العام . أي :

ق ز = د (س ١ز ، س ٢ز ، .... س ن ز) .... (١٧-٣٢)

$$u_t = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

وذلك لمعرفة أهم العوامل التي تؤدى لإحداث هذه التقلبات . ويستخدم هذا الأسلوب في حالة الدورات التجارية لمعرفة أسبابها .

أما إذا كان الاتجاه العام للسلسلة غير خطي في صورة كثيرة الحدود " Polynomial " فيتم استخدام الصيغة التالية لاستبعاد أثر الاتجاه العام :

ص ز = أ. + أ١ ز + أ٢ ز٢ + ق ز .... (١٧-٣٣)

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \varepsilon_t$$

وتصبح بيانات السلسلة بعد إزالة الاتجاه العام :

ق ز = ص ز - أ. - أ١ ز - أ٢ ز٢ .... (١٧-٣٤)

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 T - \alpha_2 T^2$$

ويمكن بالطبع إدراج عنصر الزمن مع متغيرات تفسيرية أخرى بالنموذج ، مثال ذلك ص ز = أ + ب١ س١ز + ب٢ ز + ع ز .

(٢) طريقة الفروق Differencing Method

وباستخدام هذه الطريقة نحصل على الفروق من الرتبة الأولى أو من الرتبة الثانية لإزالة الاتجاه العام .

ويلاحظ في هذا الصدد أن :

الفرق من الرتبة الأولى : Δ ص ز = ص ز − ص ز-١ $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

الفرق من الرتبة الثانية : Δ ص ز(٢) = Δ ص ز - Δ ص ز-١ $\Delta Y_{t(2)} = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$

أي أن الفرق من الرتبة الثانية هو فرق الفروق الأولى ، وهكذا بالنسبة للرتب الأخرى.

مثال (١٧-٣)

إزالة الاتجاه العام بطريقة الفروق

لتوضيح هذه الطريقة دعنا نتفحص بيانات الجدول (١٧-٤) .

جدول (١٧-٤)

إزالة الاتجاه العام بأسلوب الفروق

المشاهدة	ص ز (Y_t)	س ز (X_t)	ف ص ١	ف س ١	ف س ٢
١	١٠	٣٠	-	-	-
٢	١٥	٥٠	٥	٢٠	-
٣	٢٠	٩٠	٥	٤٠	٢٠
٤	٢٥	١٤٠	٥	٦٠	٢٠
٥	٣٠	٢٢٠	٥	٨٠	٢٠
٦	[illegible]٥	٣٢٠	٥	١٠٠	٢٠
٧	٤٠	٤٤٠	٥	١٢٠	٢٠

وكما يتضح من الجدول (١٧-٤) فإن السلسلة ص ز تعتبر سلسلة خطية متزايدة، وبالحصول على الفروق من الرتبة الأولى ف ص ١ = ص ز - ص ز-١ نجد أنها سلسلة ثابتة . أما السلسلة س ز فهي غير خطية متزايدة . وبالحصول على الفروق من الرتبة الأولى ف س ١ ثم الفروق من الرتبة الثانية ف س ٢ نحصل على سلسلة ثابتة .

وبتطبيق طريقة الفروق على بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة بالحصول على الفروق الأولى للسلسلة ، نجد أن الشكل (١٧-٦) يعبر عن مسار هذه الفروق عبر نفس الفترة ١٩٧٠ - ١٩٩١ بعد إزالة أثر الاتجاه العام .

وباختبار درجة سكون أو استقرار سلسلة الفروق الأولى نستخدم الصيغة التالية :

$$\Delta D_t = a + \lambda D_{t-1} + u_t \quad .... \quad (17\text{-}35)$$

حيث : $Dt = \Delta GDP_t$

وبتقدير هذه الصيغة باستخدام أمر unit root في برنامج Eviews نحصل على :

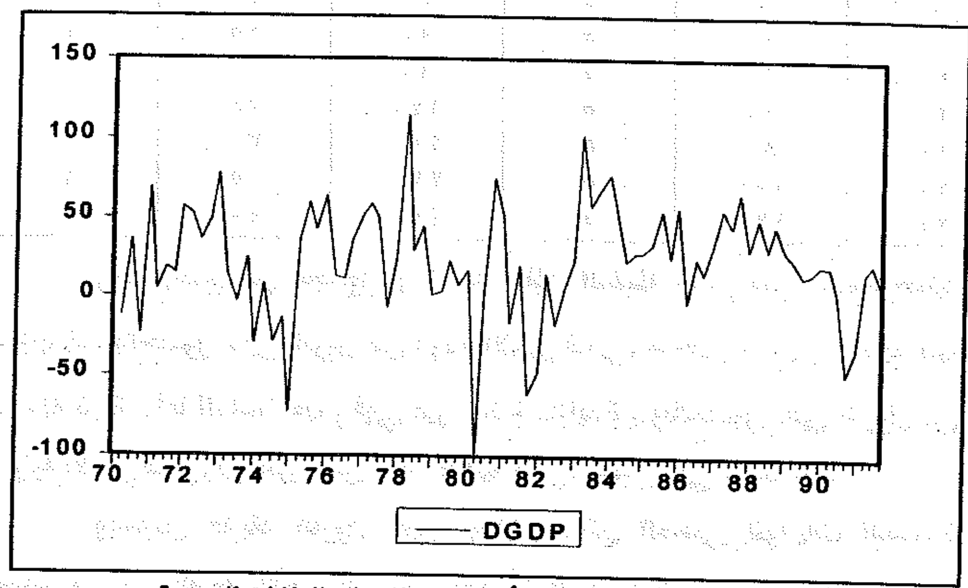
$$\Delta D_t = 16.005 - 0.6827 D_{t-1} \quad .... \quad (17\text{-}36)$$

$$\tau^* = (3.64)\ (-6.63)$$

$$R^2 = 0.3436 \qquad DW = 2.034$$

وحيث أن القيم الحرجة لـ τ الجدولية عند مستوى معنوية ١ ٪ ، ٥ ٪ ، ١٠ ٪ على التوالي هي : – ٣,٥٠٧٣ ، – ٢,٨٩٥١ ، – ٢,٥٨٤٤ ، *τ- المحسوبة (– ٦,٦٣) تفوق أي منها، فإن هذا يؤدى إلى رفض فرض العدم : م = صفر (λ=0) ، وقبول الفرض البديل م < صفر (λ <0) وبالتالي تكون سلسلة بيانات الفروق ساكنة .

ويلاحظ هنا أن اختبار ديكي – فولار لجذر الوحدة يصلح لأن إحصائية DW قريبة من ٢ ، مما يشير لعدم وجود ارتباط سلسلي في سلسلة البواقي لمعادلة الفروق .



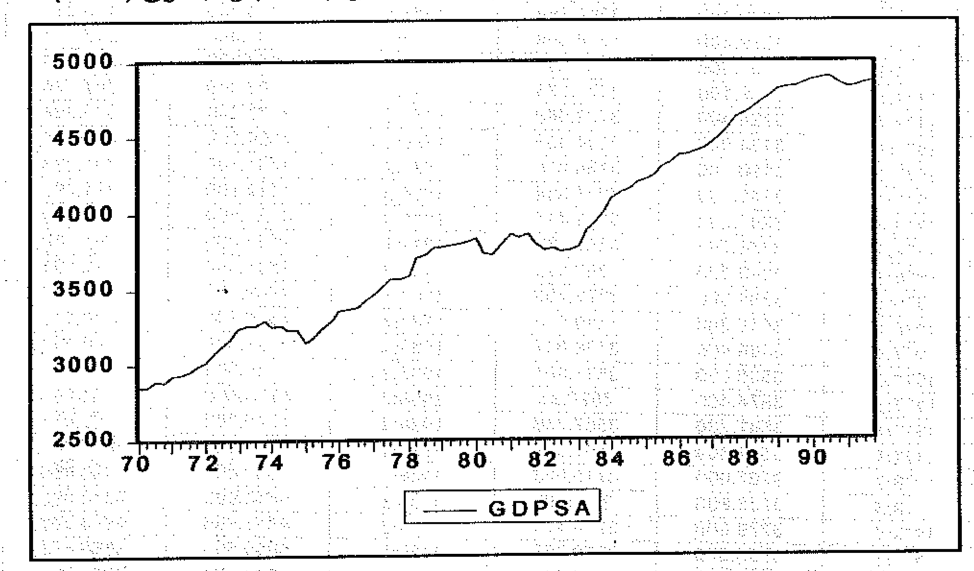
شكل (١٧–٦) – سلسلة الفروق الأولى للناتج المحلي للولايات المتحدة

(١٧–٣–٣) إزالة التقلبات الموسمية Seasonal adjustment:

قد توجد هناك تقلبات موسمية بصورة منتظمة في بعض البيانات على مدار العام ، مثال ذلك تلك التقلبات التي تصاحب التغيرات المناخية في الفصول ، أو التقلبات في المبيعات التي تصاحب المواسم والأعياد في بعض الدول . ولرصد مثل هذه التقلبات يتعين أن تكون البيانات المتاحة شهرية أو ربع سنوية وفقا لأوقات تكرار مثل هذه التقلبات . وتوجد هناك طرق عديدة للتخلص من التقلبات الموسمية في البيانات . ومن بين هذه الطرق المتعارف عليها :

1- **Census X-II – Multiplicative** طريقة التعداد الضربية
2- **Census X-II – Additive** طريقة التعداد الجمعية
3- **Ratio to Moving Average – Multiplicative** طريقة النسبة للمتوسط المتحرك الضربية
4- **Ratio to Moving Average – Additive** طريقة النسبة للمتوسط المتحرك الجمعية
5- **Seasonal differences** طريقة الفروق الموسمية

وتعتبر الطريقتين الأولى والثانية هما الطريقتان المستخدمتان على نطاق واسع من قبل مكتب التعداد بالولايات المتحدة US Bureau of Census . ويمكن استخدام أي من هذه الطرق في برنامج Eviews القياسي لعمل إزالة للتقلبات الموسمية . وإذا قمنا باستخدام الطريقة الأولى في إزالة التقلبات الموسمية من بيانات الناتج المحلي بالولايات المتحدة نحصل على النتائج الموضحة بالشكل (١٧-٧) والجدول (١٧-٥) .



شكل (١٧-٥) – إزالة التقلبات الموسمية من بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة

ومن الواضح من الشكل (١٧-٥) أن شكل السلسلة بعد إزالة التقلبات الموسمية لا يختلف كثيرا عنه في الشكل (١٧-١) قبل إزالتها ، مما يشير إلى أن البيانات قد لا تحتوي على تقلبات موسمية جوهرية .

جدول (١٧-٥)

بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة قبل (GDP) و بعد إزالة التقلبات الموسمية (GDPsa)

Quarter	GDP	GDPsa	Quarter	GDP	GDPsa
1970:1	2872.800	2860.394	1981:1	3860.500	3860.168
1970:2	2860.300	2857.76	1981:2	3844.400	3847.625
1970:3	2[illegible]96.600	2897.405	1981:3	3864.500	3863.501
1970:4	2873.700	2887.212	1981:4	3803.100	3801.743
1971:1	2942.900	2931.46	1982:1	3756.100	3756.973
1971:2	2947.400	2944.43	1982:2	3771.100	3771.878
1971:3	2966.000	2966.882	1982:3	3754.400	3752.04
1971:4	2980.800	2993.059	1982:4	3759.600	3760.927
1972:1	3037.300	3028.2	1983:1	3783.500	3786.037
1972:2	3089.700	3085.79	1983:2	3886.500	3883.863
1972:3	3125.800	3126.767	1983:3	3944.400	3941.731
1972:4	3175.500	3185.85	1983:4	4012.100	4015.096
1973:1	3253.300	3247.251	1984:1	4089.500	4093.398
1973:2	3267.600	3262.741	1984:2	4144.000	4139.34
1973:3	3264.300	3264.965	1984:3	4166.400	4163.525
1973:4	3289.100	3297.198	1984:4	4194.200	4198.211
1974:1	3259.400	3256.508	1985:1	4221.800	4225.115
1974:2	3267.600	3263.266	1985:2	4254.800	4249.836
1974:3	3239.100	3238.279	1985:3	4309.000	4307.774
1974:4	3226.400	3232.065	1985:4	4333.500	4336.399
1975:1	3154.000	3154.333	1986:1	4390.500	4392.571
1975:2	3190.400	3186.818	1986:2	4387.700	4384.394
1975:3	3249.[illegible]00	3247.384	1986:3	4412.600	4411.797
1975:4	3292.500	3296.411	1986:4	4427.100	4428.859
1976:1	3356.700	3359.187	1987:1	4460.000	4461.789
1976:2	3369.200	3367.172	1987:2	4515.300	4512.806
1976:3	3381.000	3376.705	1987:3	4559.300	4558.485
1976:4	3416.300	3419.098	1987:4	4625.500	4626.271
1977:1	3466.400	3468.884	1988:1	4655.300	4658.466
1977:2	3525.000	3524.851	1988:2	4704.800	4701.99
1977:3	3574.400	3570.93	1988:3	4734.500	4733.053
1977:4	3567.200	3567.856	1988:4	4779.700	4780.081
1978:1	3591.800	3592.208	1989:1	4809.800	4814.608
1978:2	3707.000	3710.683	1989:2	4832.400	4828.998
1978:3	3735.600	3732.36	1989:3	4845.600	4843.096
1978:4	3779.600	3778.474	1989:4	4859.700	4860.279
1979:1	3780.800	3779.768	1990:1	4880.800	4886.885
1979:2	3784.300	3789.734	1990:2	4900.300	4896.754
1979:3	3807.500	3805.77	1990:3	4903.300	4899.34
1979:4	3814.600	3811.426	1990:4	4855.100	4856.468
1980:1	3830.800	3829.985	1991:1	4824.000	4830.22
1980:2	3732.600	3738.12	1991:2	4840.700	4837.496
1980:3	3733.500	3731.577	1991:3	4862.700	4857.648
1980:4	3808.500	3806.143	1991:4	4868.000	4870.388

ويلاحظ أن أبسط الطرق السابقة هي طريقة الفروق الموسمية ، فإذا كان لدينا بيانات سلسلة ربع سنوية ص ت (Y_t) ، ونريد تخليصها من التقلبات الموسمية باستخدام

هذه الطريقة ، نقوم بالحصول على الفروق الرابعة لبيانات السلسلة لنحصل على السلسلة : ف ز (H_t) ، حيث :

ف ز = ص ز − ص ز−٤ $H_t = Y_t - Y_{t-4}$ ....(١٧−٣٧)

مثال (١٧−٤)
تطبيق مظاهر سكون السلسلة

إذا أردنا تطبيق جميع خطوات التخلص من مظاهر عدم السكون في بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة ، نبدأ باستخدام إحدى الطرق السابقة للتخلص من التقلبات الموسمية ، ولتكن طريقة التعداد الضربية ، فنحصل على الناتج المحلي المعدل موسميا (ج ز) Z_t ، ثم نطبق باقي الخطوات على النحو التالي :

- لتثبيت التباين نأخذ الجذر التربيعي للناتج المحلي المعدل موسميا فنحصل على (ك ز) G_t . حيث : ك ز = √ج ز $G_t = \sqrt{Z_t}$
- ولإزالة أثر الاتجاه العام نحصل على الفروق الأولى :

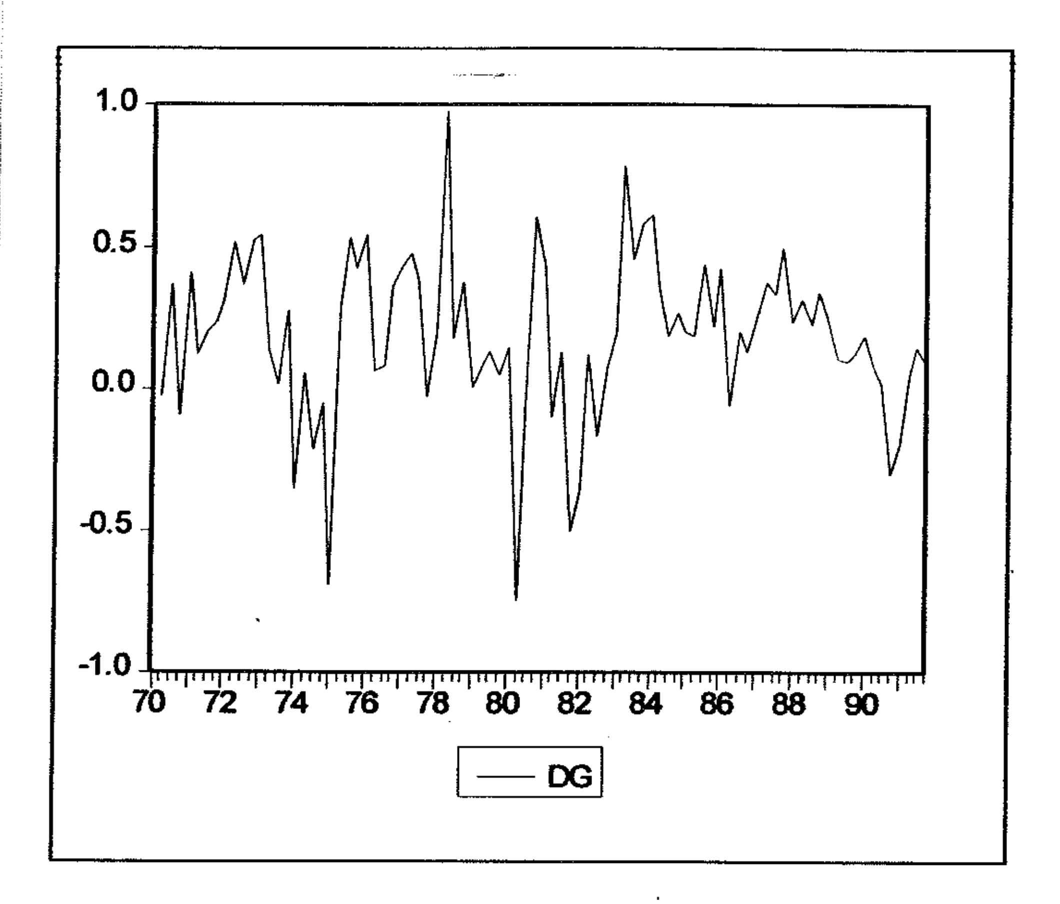
Δ ك ز = ك ز − ك ز−١ $\Delta G_t = G_t - G_{t-1}$

وبتطبيق الخطوات السابقة نحصل على البيانات الموضحة بالجدول (١٧−٦) والشكل (١٧−٦) .

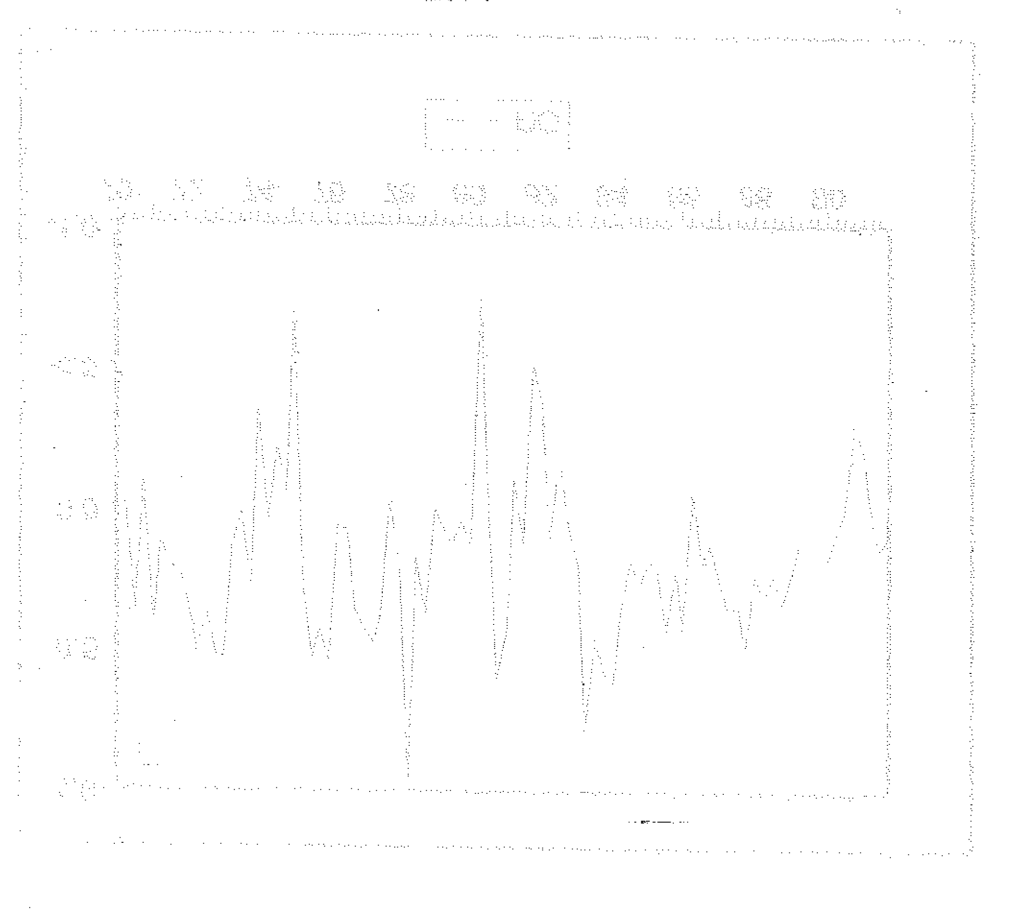
جدول (١٧-٦)

سلسلة بيانات الناتج المحلي للولايات المتحدة بعد تخليصها من جميع مظاهر عدم الاستقرار

Quarter	Zt	Gt	Δ Gt	Quarter	Zt	Gt	Δ Gt
1970:1	2860.394	53.48265	NA	1981:1	3860.168	62.13025	0.436304
1970:2	2857.76	53.45802	-0.024630	1981:2	3847.625	62.02923	-0.101023
1970:3	2897.405	53.82755	0.369528	1981:3	3863.501	62.15707	0.127840
1970:4	2887.212	53.73278	-0.094765	1981:4	3801.743	61.65828	-0.498791
1971:1	2931.46	54.14296	0.410176	1982:1	3756.973	61.29415	-0.364125
1971:2	2944.43	54.26260	0.119643	1982:2	3771.878	61.41562	0.121465
1971:3	2966.882	54.46909	0.206490	1982:3	3752.04	61.25390	-0.161719
1971:4	2993.059	54.70886	0.239765	1982:4	3760.927	61.32640	0.072499
1972:1	3028.2	55.02908	0.320227	1983:1	3786.037	61.53078	0.204384
1972:2	3085.79	55.54989	0.520804	1983:2	3883.863	62.32065	0.789866
1972:3	3126.767	55.91750	0.367614	1983:3	3941.731	62.78321	0.462560
1972:4	3185.85	56.44333	0.525833	1983:4	4015.096	63.36479	0.581579
1973:1	3247.251	56.98466	0.541321	1984:1	4093.398	63.97967	0.614883
1973:2	3262.741	57.12041	0.135752	1984:2	4139.34	64.33770	0.358034
1973:3	3264.965	57.13987	0.019464	1984:3	4163.525	64.52538	0.187680
1973:4	3297.198	57.42123	0.281361	1984:4	4198.211	64.79360	0.268220
1974:1	3256.508	57.06582	-0.355411	1985:1	4225.115	65.00088	0.207282
1974:2	3263.266	57.12500	0.059182	1985:2	4249.836	65.19077	0.189882
1974:3	3238.279	56.90588	-0.219125	1985:3	4307.774	65.63363	0.442868
1974:4	3232.065	56.85125	-0.054625	1985:4	4336.399	65.85134	0.217705
1975:1	3154.333	56.16345	-0.687804	1986:1	4392.571	66.27647	0.425134
1975:2	3186.818	56.45191	0.288460	1986:2	4384.394	66.21476	-0.061717
1975:3	3247.384	56.98582	0.533914	1986:3	4411.797	66.42136	0.206603
1975:4	3296.411	57.41438	0.428557	1986:4	4428.859	66.54967	0.128314
1976:1	3359.187	57.95849	0.544114	1987:1	4461.789	66.79662	0.246951
1976:2	3367.172	58.02734	0.068845	1987:2	4512.806	67.17742	0.380798
1976:3	3376.705	58.10942	0.082084	1987:3	4558.485	67.51655	0.339132
1976:4	3419.098	58.47305	0.363631	1987:4	4626.271	68.01670	0.500143
1977:1	3468.884	58.89723	0.424179	1988:1	4658.466	68.25296	0.236260
1977:2	3524.851	59.37046	0.473223	1988:2	4701.99	68.57106	0.318102
1977:3	3570.93	59.75726	0.386803	1988:3	4733.053	68.79719	0.226129
1977:4	3567.856	59.73153	-0.025726	1988:4	4780.081	69.13813	0.340942
1978:1	3592.208	59.93503	0.203499	1989:1	4814.608	69.38738	0.249247
1978:2	3710.683	60.91538	0.980344	1989:2	4828.998	69.49099	0.103616
1978:3	3732.36	61.09304	0.177668	1989:3	4843.096	69.59236	0.101364
1978:4	3778.474	61.46929	0.376249	1989:4	4860.279	69.71570	0.123345
1979:1	3779.768	61.47982	0.010525	1990:1	4886.885	69.90626	0.190557
1979:2	3789.734	61.56082	0.080998	1990:2	4896.754	69.97681	0.070552
1979:3	3805.77	61.69092	0.130108	1990:3	4899.34	69.99529	0.018475
1979:4	3811.426	61.73675	0.045824	1990:4	4856.468	69.68836	-0.306922
1980:1	3829.985	61.88687	0.150125	1991:1	4830.22	69.49978	-0.188579
1980:2	3738.12	61.14017	-0.746706	1991:2	4837.496	69.55211	0.052326
1980:3	3731.577	61.08664	-0.053532	1991:3	4857.648	69.69683	0.144719
1980:4	3806.143	61.69395	0.607311	1991:4	4870.388	69.78817	0.091336



شكل (١٧-٦) سلسلة الناتج المحلي للولايات المتحدة بعد إزالة جميع مظاهر عدم السكون



الفصل الثامن عشر

نموذج تصحيح الخطأ

Error Correction Model (ECM)

إذا كانت المتغيرات التي تتكون منها ظاهرة ما تتصف بخاصية التكامل المشترك ، فإن النموذج الأكثر ملائمة لتقدير العلاقة بينها يصبح هو نموذج تصحيح الخطأ . وبالطبع إذا كانت المتغيرات لا تتصف بهذه الخاصية فإن هذا النموذج لا يصبح صالحاً لتفسير سلوك هذه الظاهرة .

ويستخدم هذا النموذج عادة للتوفيق بين السلوك قصير الأجل والسلوك طويل الأجل للعلاقات الاقتصادية . فالمتغيرات الاقتصادية يفترض أنها تتجه في الأجل الطويل نحو حالة من الاستقرار يطلق عليها في الاقتصاد وضع التوازن Equilibrium . وهي في طريقها لهذا الوضع قد تنحرف عن المسار المتجه إليه لأسباب مؤقتة ، ولكن لا يطلق عليها صفة الاستقرار إلا إذا ثبت أنها متجهة لوضع التوازن طويل الأجل .

ومن المعروف أن طريقة المربعات الصغرى العادية OLS تقوم على أساس افتراض مؤداه أن الظواهر الاقتصادية تتبع في سلوكها التوزيع المعتدل الطبيعي Normal Distribution ، وهذا يتضمن أن بيانات السلاسل الزمنية للمتغيرات الاقتصادية هي بيانات مستقرة Stationary . ولكن هذا قد لا يحدث في الواقع العملي، فكثيرا ما تكون هذه البيانات غير مستقرة . وفي هذه الحالة يترتب على استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير الحصول على علاقات انحدار زائف يعبر عن نفسه في صورة : (أ) معامل تحديد مرتفع ، (ب) معاملات انحدار ذات معنوية إحصائية مرتفعة ، (جـ) وجود ارتباط سلسلي تظهره إحصائية DW .

ويلاحظ عموما أنه حتى إذا كانت السلاسل الزمنية غير مستقرة كل على حدة ، ولكنها تتصف بخاصية التكامل المشترك كمجموعة ، يصبح النموذج الملائم لتقدير

العلاقة بينها هو نموذج تصحيح الخطأ . ولا يترتب على قياس العلاقة بينها في هذه الحالة الحصول على انحدار زائف .

ونتعرض في هذا الفصل لنقطتين أساسيتين في مبحثين مستقلين :

المبحث الأول : صيغة نموذج تصحيح الخطأ .

المبحث الثاني : نموذج تصحيح الخطأ وعلاقة السببية لجرانجر

المبحث الأول

صيغة نموذج تصحيح الخطأ

تأخذ صيغة نموذج تصحيح الخطأ في الاعتبار كل من العلاقة طويلة الأجل والعلاقة قصيرة الأجل . أما عن كونها تأخذ في الاعتبار العلاقة طويلة الأجل ، فهذا يتم باحتوائها على متغيرات ذات فجوة زمنية Lagged variables . وفيما يتعلق باشتمالها على العلاقة قصيرة الأجل فهذا يتم بإدراج فروق السلاسل الزمنية فيها والتي تعبر عن التغير بين القيم من يوم لآخر ، أو من أسبوع لآخر ، أو من شهر لآخر ، أو من فصل لآخر ، أو حتى من سنة لأخرى .

وإذا بدأنا بمتغيرين : ص ز ، س ز (Y_t , X_t) ، وقدرنا العلاقة بينهما باستخدام الصيغة البسيطة التالية :

ص ز = أ̂. + أ̂, س ز + د ز .... (١٨-١)

$$Y_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t + \varepsilon_t$$

حيث : ص ز (Y_t) = قيمة المتغير التابع أو اللوغاريتم الطبيعي له

س ز (X_t) = قيمة المتغير المستقل أو اللوغاريتم الطبيعي له

عندئذ يمكن الحصول على متغير جديد يسمى حد تصحيح الخطأ ، وهو يتمثل في البواقي : د ز (ε_t) ، حيث :

د ز = ص ز - أ̂. - أ̂, س ز .... (١٨-٢)

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_t$$

وباستخدام هذا الحد يمكن صياغة نموذج تصحيح الخطأ على النحو التالي :

Δ ص ز = ب. + $\sum_{ى=١}^{ك}$ ب Δ س ز-ر + جـ (ص ز - أ̂. - أ̂, س ز)ز-ر + و ز ...(١٨-٣)

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_j \Delta X_{t-j} + \theta (Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_t)_{t-j} + Z_t$$

حيث : Δ ص ز (ΔY_t)= الفرق الأول للمتغير التابع = ص ز – ص ز-١ ($Y_t - Y_{t-1}$).

ر (j) = ١ ، ٢ ، .... ك (k) رقم الفجوة الزمنية لفروق المتغير المستقل س ز (X_t) .

ك (k) = عدد الفجوات الزمنية المدرجة بالنموذج .

Δ س ز – ر (ΔX_{t-j}) = الفروق الأولى للمتغير التفسيري

فإذا كانت : ر (j) = ٣ ، إذن يوجد ثلاث فروق على النحو التالي :

Δ س ز-١ = س ز-١ – س ز-٢ $\Delta X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2}$

Δ س ز-٢ = س ز-٢ – س ز-٣ $\Delta X_{t-2} = X_{t-2} - X_{t-3}$

Δ س ز-٣ = س ز-٣ – س ز-٤ $\Delta X_{t-3} = X_{t-3} - X_{t-4}$

ويتعين إدراج الفروق التي لها تأثير معنوي فقط في الصيغة المقدرة لقياس العلاقة قصيرة الأجل ، أما الفروق التي لها تأثير غير معنوي فيتم استبعادها .

جـ (θ) = معامل سرعة التعديل speed of adjustment وهو يشير إلى مقدار التغير في المتغير التابع نتيجة لانحراف قيمة المتغير المستقل في الأجل القصير عن قيمته التوازنية في الأجل الطويل بمقدار وحدة واحدة . ويتوقع أن يكون هذا المعامل سالباً ، لأنه يشير للمعدل الذي تتجه به العلاقة قصيرة الأجل نحو العلاقة طويلة الأجل to converg.

ويلاحظ هنا أنه في خضم تجريب عديد من الفجوات الزمنية (ز–ر) يتعين رصد أول معلمة سالبة لها معنوية إحصائية بالنسبة لحد التصحيح . فقد نجرب حدي التصحيح : د ز-١ ، د ز-٢ ($\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}$) ونجد أن المعلمة "جـ" θ في كليهما موجبة أو سالبة وتأثيرها غير معنوي ، هذا في حين نجد أن معلمة حد التصحيح : د ز-٣ (ε_{t-3}) سالبة ولها معنوية إحصائية ، عندئذ نرصد حد التصحيح الثالث ومعلمته في العلاقة المقدرة لنموذج تصحيح الخطأ.وفي هذه الحالة نقول أن سلوك المتغير التابع يستغرق ٣ فترات (شهور أو فصول أو سنوات) حتى يصل لوضع التوازن طويل الأجل .

وليس من الضروري أن تكون الفجوة الزمنية لحد التصحيح هي نفسها لفرق المتغير التفسيري المدرج بالنموذج، فهذا متغير وذاك متغير آخر .

المبحث الثاني

نموذج تصحيح الخطأ وعلاقة السببية لجرانجر

Error Correction Model and Granger Causality

يقال أن " س" (X) تسبب " ص" (Y) لو أن تنبؤ قيم "ص" (Y) عن طريق القيم السابقة للمتغير "س" (X) بالإضافة إلى القيم السابقة للمتغير " ص " (Y) كان أفضل من التنبؤ المبني على القيم السابقة للمتغير "ص" (Y) فقط .

ولو أن كل من : ص ، س (Y, X) يتصفان بخاصية التكامل المشترك من الرتبة الأولى، يتعين إضافة حد تصحيح الخطأ المقدر من علاقة بين ص ، س (Y,X) في نموذج السببية بالإضافة إلى القيم السابقة لكل من ص ، س (Y,X) .

ونظراً لتداخل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية ، وهو ما يعني أن " ص " (Y) قد تؤثر على "س" (X) ، مثلما " س" (X) تؤثر على "ص" (Y) في نفس الوقت، فإن النموذج الذي يستخدم لاختبار اتجاه العلاقة بين س ، ص (Y,X) يتعين أن يكون نموذجاً آنيا يحتوي على عدد من المعادلات بعدد المتغيرات التابعة .

ويتضمن نموذج تصحيح الخطأ التالي سببية جرانجر التي تستخدم في اختبار اتجاه العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ، و تحديد ما إذا كانت علاقة السببية تتجه من : س (X) إلى ص (Y) أو من ص (Y) إلى س (X) ، أم أنها علاقة تبادلية يؤثر فيها كل منهما على الآخر .

$$\Delta Y_t = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{m} \beta_{1i} \Delta Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{n} \delta_{1i} \Delta X_{t-i} + \theta_1 \varepsilon_{1t-1} + Z_{1t} \quad \text{.............}(18-4)$$

$$\Delta X_t = \alpha_2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i} \Delta X_{t-i} + \sum_{i=1}^{Q} \delta_{2i} \Delta Y_{t-i} + \theta_2 \varepsilon_{2t-1} + Z_{2t} \quad \text{............}(18-5)$$

حيث :

الفروق الأولى في $\Delta X_t = X_t$ ، الفروق الأولى في $\Delta Y_t = Y_t$

$Y_t \sim I(1)$, $X_t \sim I(1)$

حدي تصحيح الخطأ في المعادلتين = $\varepsilon_{1t-1}, \varepsilon_{2t-1}$

وقد تم الحصول عليهما من تقدير العلاقتين التاليتين بين Y_t, X_t

$$Y_t = a_1 + b_1 X_t + \varepsilon_{1t}$$
$$X_t = a_2 + b_2 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

عدد الفجوات الزمنية = m,n,p,Q

ونظراً لأن النموذج السابق يحتوي على القيم السابقة للمتغير التابع كمتغيرات تفسيرية فإنه يطلق عليه Vector autoregression model (VAR) بالإضافة إلى كونه أحد نماذج تصحيح الخطأ . أو بمعنى آخر هو نموذج VAR مع تصحيح الخطأ.

ويلاحظ في هذا الصدد لو أن : $Y_t \sim I(0)$, $X_t \sim I(0)$ ولكنهما لا يتصفان بخاصية التكامل المشترك ، يتم إزالة حد تصحيح الخطأ من النموذج بمعادلتيه ، وإحلال كل فروق المتغيرين ΔY_t , ΔX_t بالقيم الأصلية لهما Y_t , X_t ، وعندئذ يتحول النموذج إلى نموذج VAR تقليدي على النحو الذي سوف نشرحه فيما بعد .

ولعل من أهم المشاكل التي تواجهنا في حالة هذا النموذج هي كيفية تحديد الحجم الأمثل للفجوات الزمنية : m, n , p , Q . ومن الأساليب المستخدمة في هذا الصدد معيار الحد الأدنى لخطأ التنبؤ النهائي وهو ما يطلق عليه :

Akiak 's Final Prediction Error (FPE)

ويأخذ هذا المعيار الصيغة التالية للفجوة m:

$$FPE_m = \left(\frac{T+K}{T-K}\right)\left(\frac{SSR_m}{T}\right) \qquad (18-6)$$

حيث : حجم العينة = T ، حجم الفجوة الزمنية = m

في حالة عدم وجود تكامل المشترك ومن ثم لا يحتوي النموذج على حد تصحيح خطأ : K=m+1

في حالة وجود تكامل المشترك ومن ثم يحتوي النموذج على حد تصحيح خطأ :K=m+2

مجموع مربعات البواقي في ظل الفجوة m : SSR_m = sum of squared error

وتتمثل خطوات تحديد الحجم الأمثل للفجوات فيما يلي :

(١) نبدأ بتقدير العلاقة البسيطة التالية : $Y_t = \alpha + \beta X_{t-1} + u_t$ وذلك للحصول على البواقي u_t.

(٢) نقوم بتقدير الصيغة (١٨-٤) بافتراض أن n=0 ثم تجريب الأحجام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،....... للفجوة m ، مع حساب FPE لكل صيغة ، واختيار الصيغة التي يكون عندها FPE عند حده الأدنى ، وعندها تكون *m هي الحجم الأمثل للفجوة .

(٣) نقوم بتثبيت *m ثم نعيد تقدير الصيغة (١٨-٤) بتجريب الأحجام ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... للفجوة n ونحسب في كل مرة FPE(m*,n) ، ثم نختار الحجم الذي يصل عنده خطأ التنبؤ النهائي لحده الأدنى ويكون هو الحجم الأمثل للفجوة *n ، مع الأخذ في الاعتبار في هذه الحالة أن :

في حالة عدم وجود تكامل مشترك   K=m*+n+1 :

في حالة وجود تكامل مشترك   K=m*+n+2 :

(٤) تصبح الصيغة الأفضل للمعادلة (١٨-٤) هي التي يصل في ظلها خطأ التنبؤ النهائي إلى المستوى FPE(m*,n*) .

(٥) لو أن : $FPE(m^*,n^*) < FPE(m^*)$ يمكن القول أن : X_t تسبب Y_t .

(٦) لو أن : $FPE(m^*,n^*) > FPE(m^*)$ يمكن القول أن : X_t لا تسبب Y_t .

(٧) نقوم بالحصول على Z_{1t} من الصيغة التي تقابل FPE(m*,n*) لغرض نحدده فيما بعد .

(٨) نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة للمعادلة (١٨-٥) لنحصل في النهاية على : FPE(p*) , FPE(p*,Q*) ، وبمقارنتهما نستطيع معرفة ما إذا كانت Y_t تسبب X_t أم لا.

(٩) نقوم بالحصول على Z_{2t} من الصيغة التي تقابل FPE(p*,Q*) .

(١٠) نختبر ما إذا كانت البواقي Z_{1t} ، Z_{2t} مرتبطة أم لا ، وذلك بالحصول على معامل الارتباط بينهما واختبار معنويته . ولو اتضح أنهما غير مرتبطين يمكن تقدير المعادلتين (١٨-٤) ، (١٨-٥) بصفة مستقلة باستخدام طريقة OLS ، أو تقديرهما في نموذج آني والنتيجة لن تختلف كثيراً . أما إذا كانا مرتبطين فيتم تقديرهما معاً في نموذج آني مع التعديل لإزالة الارتباط بينهما .

(١١) إذا اتضح أن $m^* = 10$ مثلاً ، فليس معنى ذلك أن ندرج جميع الفجوات العشرة في المعادلة (١٩-٤) عند تقديرها ، وإنما ندرج تلك التي يؤثر عندها المتغير التفسيري تأثيراً جوهرياً فقط .

(١٢) تم إدراج حد التصحيح في المعادلتين مصحوبا بفجوة محددة (t-1) ، ذلك لتقليل عبء البحث عن عدد أمثل للفجوات له في حالة أن يكون الدليل السفلي (t-i) . ولاشك أن هناك افتراضاً بأن الفجوة الأولى يتحقق عندها الشروط المطلوبة في حد تصحيح الخطأ وهي أن يكون سالباً وله تأثير معنوي .

مثال (١٨-١)

تطبيق نموذج VAR مع تصحيح الخطأ

قام أحد الباحثين (Zhou,Zhong-guo ,1997) بتقدير نموذج VAR مع تصحيح الخطأ لسوق المنازل السكنية للأسر المفردة بالولايات المتحدة الأمريكية مستخدما بيانات شهرية تمتد من يناير ١٩٧٠ حتى ديسمبر ١٩٩٠، وذلك بهدف التنبؤ بالطلب على هذا النوع من المنازل في المستقبل . تضمن النموذج متغيرين هما :

مبيعات المنازل السكنية الشهرية = S_t ، وسيط سعر المنزل السكني = P_t

وقام بقياس العلاقة بينهما مستخدما سببية جرانجر . وقد اتبع الخطوات التالية في إجراء تقدير النموذج :

(١) استخدم الصيغتين التاليتين في اختبار جذر الوحدة للمتغيرين :

$$\Delta S_t = c_1 + \alpha_1 t + \lambda_1 S_{t-1} + u_{1t}$$
$$\Delta P_t = c_2 + \alpha_2 t + \lambda_2 P_{t-1} + u_{2t}$$

واتضح له أن : $\tau^*_{\lambda 1} = -2.51, \tau^*_{\lambda 2} = -2.48, ADF_{(III,250,0.05)} = -2.79$

وهذا يعني أنه تم قبول فرض جذر الوحدة بما يعني أن سلسلة البيانات للمتغيرين لم تكن مستقرة .

(٢) لاختبار التكامل المشترك ، قام الباحث بتقدير الصيغة التالية :

$$S_t = \alpha + \beta P_t + Z_t$$

وحصل منها على البواقي Z_t ثم أجرى اختبار جذر الوحدة على هذه السلسلة مستخدما الصيغة التالية :

$$\Delta Z_t = c + \delta T + \lambda Z_{t-1} + \xi_t$$

واتضح له أن : $\tau^*_{\lambda} = -5.16$. وبمقارنتها بالقيمة الحرجة سابقا يتضح أنه يتم رفض فرض جذر الوحدة ومن ثم تكون سلسلة البواقي مستقرة ، وهو ما يعني أن كل من المتغيرين S_t, P_t يتصفان بالتكامل المشترك من الرتبة الأولى . ومن هنا يصبح نموذج تصحيح الخطأ هو الأكثر ملائمة في هذه الحالة .

(٣) بتطبيق الخطوات السابقة لتحديد الحجم الأمثل للفجوات الزمنية اتضح له أن :

$$m^* = 12, n^* = 1, p^* = 12, Q^* = 1$$

(٤) قام باستخدام البيانات المتاحة في تقدير الصيغتين (١٨-٤)، (١٨-٥) فتوصل للنتائج التالية :

$$\Delta S_t = -9.028 - 0.097\Delta S_{t-1} + 0.168\Delta S_{t-2} - 0.179\Delta S_{t-4} + 0.781\Delta S_{t-12} \quad ...(18-7)$$

t (-0.01)(-2.71) (4.53) (-4.55) (19.53)

$\bar{R}^2 = 0.70, DW = 2.14, FPE = 292880000$

$$\Delta S_t = 17496 - 0.061\Delta S_{t-1} + 0.195\Delta S_{t-2} - 0.145\Delta S_{t-4} + 0.758\Delta S_{t-12} - 0.066\varepsilon_{1t-1} \quad ...(18-8)$$

t (0.16) (-1.62) (5.16) (-3.55) (18.84) (-2.77)

$\bar{R}^2 = 0.71, DW = 2.15, FPE = 285720000$

$$\Delta S_t = -1051 - 0.088\Delta S_{t-1} + 0.192\Delta S_{t-2} - 0.153\Delta S_{t-4} + 0.739\Delta S_{t-12} - 0.061\varepsilon_{1t-1} + 4.298\Delta P_{t-1} \quad ...(18-9)$$

t (-0.91)(-2.35) (5.19) (-3.85) (18.67) (-2.66) (3.57)

$\bar{R}^2 = 0.73, DW = 2.15, FPE = 273000000$

$$\Delta P_t = 239.14 - 0.107\Delta P_{t-1} - 0.239\Delta P_{t-4} - 0.172\Delta P_{t-8} + 0.327\Delta P_{t-11} + 0.351\Delta P_{t-12} \quad (18-10)$$

t (3.35) (-1.83) (-3.91) (-2.65) (5.52) (5.18)

$\bar{R}^2 = 0.30,\ DW = 2.19,\ FPE = 590,434$

$$\Delta P_t = 219.08 - 0.112\Delta P_{t-1} - 0.252\Delta P_{t-4} - 0.169\Delta P_{t-8} + 0.336\Delta P_{t-11} + 0.362\Delta P_{t-12} - 0.004\varepsilon_{2t-1} \quad (18-11)$$

t (3.03) (-1.92) (-4.09) (-2.62) (5.67) (5.33) (-1.56)

$\bar{R}^2 = 0.31,\ DW = 2.21,\ FPE = 586,817$

$$\Delta P_t = 222 - 0.126\Delta P_{t-1} - 0.250\Delta P_{t-4} - 0.168\Delta P_{t-8} + 0.336\Delta P_{t-11} + 0.365\Delta P_{t-12} - 0.003\varepsilon_{2t-1} + 0.003\Delta S_{t-1} \quad (18-12)$$

t (3.07)(-2.11) (-4.06) (-2.61) (5.69) (5.37) (-1.34) (1.55)

$\bar{R}^2 = 0.31,\ DW = 2.2,\ FPE = 586,723$

(٥) اتضح من التحليل أن معامل الارتباط بين البواقي في المعادلتين (١٨-٩) ، (١٨-١٢) ضعيف (٠,١٣٨) وهو ما أتاح فرصة تقدير المعادلات بصورة مستقلة .

(٦) بمقارنة FPE بالمعادلتين (١٨-٧) ، (١٨-٩) يتضح أنها أقل في المعادلة الأخيرة بدرجة ملحوظة وهو ما يعني أن السعر يسبب مبيعات المنازل السكنية . ويؤكد هذا المعنى المعلمة ذات الحجم الكبير نسبيا للسعر (٤,٢٩٨)في المعادلة (١٨-٩) ومستوى معنويتها المرتفع (٣,٥٧) ، ومعامل التحديد المرتفع نسبيا (٧٠٪-٧٣٪) .

(٧) بمقارنة FPE بالمعادلتين (١٨-١٠) ، (١٨-١٢) نجد أنها أقل بدرجة منخفضة في الأخيرة ، وهو ما يعني أن المبيعات تسبب السعر ولكن ليس بدرجة كبيرة . ويؤكد هذا حجم معلمة المبيعات المنخفض نسبيا (٠,٠٠٣) في المعادلة (١٨-١٢) ، ومستوى المعنوية المنخفض أيضاً (١,٥٥) ، ومعامل التحديد المنخفض (٣٠٪-٣١٪) .

الفصل التاسع عشر

التنبؤ العلمي باستخدام نماذج الانحدار

Forecasting With Regression Models

لقد أشرنا سابقاً إلى أن من أهم أهداف الاقتصاد القياسي التنبؤ بسلوك الظواهر الاقتصادية . ويشير بعض المتخصصين في مجال الاقتصاد القياسي إلى ضرورة التمسك ببعض المبادئ الأساسية المفيدة في عملية التنبؤ . ومن أهم هذه المبادئ : (١) استخدام النماذج البسيطة قدر الإمكان في عملية التنبؤ ، (٢) استخدام أكبر قدر ممكن من البيانات المتاحة . (٣) استخدام النظرية الاقتصادية في بناء نماذج التنبؤ بدلا من الاعتماد على البيانات ، وإن كانت البيانات تفيد في تحديد عدد الفجوات الزمنية التي يتعين إدراجها في بعض النماذج ، في حين أن النظرية قد لا تفيد في ذلك، (٤) مازالت طريقة المربعات الصغرى العادية تعتبر من أفضل الطرق التي تستخدم في تقدير نماذج التنبؤ باستخدام القيم الأصلية ، (٥) تعتبر النماذج الاستقرائية للاتجاه Trend Extrapolation أفضل في التنبؤ من النماذج السببية Causal في حالة أن تكون البيانات اللازمة لتقدير الأخيرة غير متوفرة أو غير دقيقة . وسوف نتعرض في هذا الفصل لهذا الهدف من خلال التركيز على أربع نقاط نتناولها في أربعة مباحث مستقلة :

المبحث الأول : تعريف التنبؤ العلمي وأنواعه .

المبحث الثاني : طرق التنبؤ العلمي .

المبحث الثالث : طرق السلاسل الزمنية في التنبؤ العلمي .

المبحث الرابع : اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ .

المبحث الأول

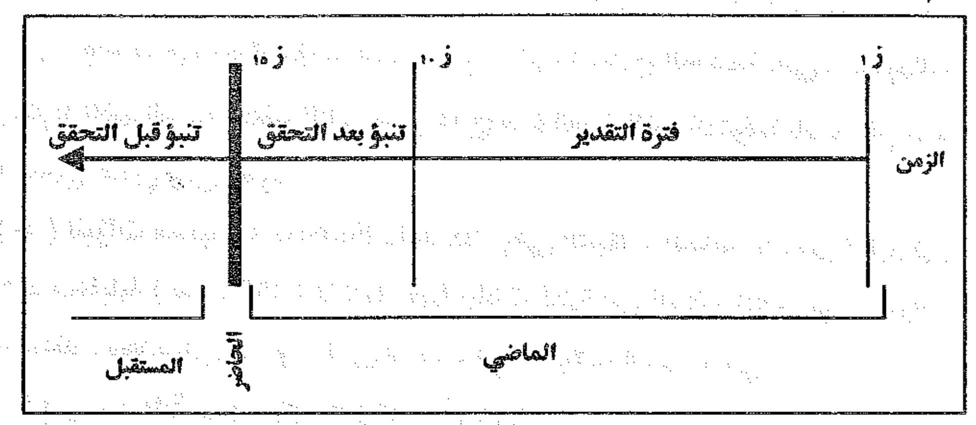
تعريف التنبؤ العلمي وأنواعه

يمكن تعريف التنبؤ العلمي بأنه تقدير كمي للقيم المتوقعة للمتغيرات التابعة في المستقبل القريب بناءاً على ما هو متاح لدينا من معلومات عن الماضي والحاضر . ويلاحظ هنا أن التنبؤ العلمي يفترض أن سلوك الظواهر الاقتصادية في المستقبل القريب ما هو إلا امتداد لسلوك هذه الظواهر في الماضي القريب . ومن ثم فإن حدوث تغيرات فجائية لم تكن متوقعة من الممكن أن تؤدى لعدم دقة التنبؤات العلمية الخاصة بمستقبل الظواهر الاقتصادية . ويمكن في هذا الصدد أن نفرق بين أنواع عديدة من التنبؤات وفقاً لعدد من المعايير :

(١) صيغة التنبؤ : ونفرق هنا بين تنبؤ النقطة Point Forecast وتنبؤ الفترة Interval Forecast . أما عن تنبؤ النقطة فهو يتمثل في التنبؤ بقيمة واحدة للمتغير التابع في كل فترة مقبلة . مثال ذلك التنبؤ بالقيمة المتوقعة للادخار القومي بأن تكون ١٠٠ مليار جنيه عام ٢٠١٠ . وفيما يتعلق بتنبؤ الفترة فهو يتمثل في التنبؤ بمدى معين تقع داخله قيمة المتغير التابع باحتمال معين . مثال ذلك التنبؤ بالقيمة المتوقعة للادخار القومي بأن تقع بين حدين هما ٩٠ مليار جنيه كحد أدنى، و ١١٠ مليار جنيه كحدٍ أعلى باحتمال ٩٥ ٪ أو ٩٩ ٪ .

(٢) فترة التنبؤ : يمكن التفرقة أيضاً بين نوعين من التنبؤ وفقاً لمعيار فترة التنبؤ : تنبؤ بعد التحقق Ex-post Forecast وتنبؤ قبل التحقق Ex-ante Forecast ويلاحظ أن كلا النوعين يتنبأ بالقيم المتوقعة للمتغير التابع في فترة تالية للفترة التي تم تقدير النموذج خلالها . غير أن التنبؤ بعد التحقق يتوقع قيماً للمتغير التابع في فترة متاح عنها بيانات فعلية ، وهذا يتيح فرصة التأكد من مدى صحة التوقعات من خلال مقارنتها بالبيانات الفعلية المتاحة . ومن الأمثلة على ذلك أن تكون السنة الحالية هي عام ٢٠٠٤ ، وأن نقوم بتقدير دالة الادخار عن الفترة ١٩٧٠ – ٢٠٠٠ ، ثم نقوم باستخدام هذه الدالة

المقدرة في التنبؤ بقيمة الادخار في عامي ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ وهي أعوام تتاح عنها بيانات فعلية خاصة بالادخار كمتغير تابع وبالدخل كمتغير تفسيري . أما فيما يتعلق بالتنبؤ قبل التحقق فهو يتوقع بقيم المتغير التابع في فترات مستقبلية لا تتاح عنها بيانات خاصة بالمتغير التابع . ومن الأمثلة على ذلك أن نتوقع قيمة الادخار عام ٢٠٠٧ ونحن في عام ٢٠٠٤ . ويمكن تمثيل ذلك بالشكل (١٩-١) .



شكل (١٩-١)

أنواع التنبؤ العلمي

وهناك من يفرق بين ثلاثة أنواع لفترة التنبؤ . فإذا افترضنا أن لدينا بيانات فعلية عن الفترة ١٩٧٠ – ١٩٩٦ ، ثم قمنا بأخذ عينة من هذه البيانات للفترة ١٩٧٠ – ١٩٨٥ واستخدمناها في تقدير معادلة الانحدار التالية :

ص ز = أ̂ + ب̂١ س ١ز + ب̂٢ س ٢ز + ع ز .... (١٩-١)

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + u_t$$

فعندئذ يمكن الحصول على تنبؤات لثلاث فترات :

(أ) تنبؤات داخل العينة In-Sample Forecasts وهي تنبؤات المتغير التابع ص ز (Y_t) التي يمكن الحصول عليها بالتعويض عن القيم الفعلية للمتغيرات المستقلة

(س رز) (X_{it})خلال فترة العينة ٧٠ – ١٩٨٥ م . وتسمى أحياناً بالقيم الممهدة Fitted Values .

(ب) تنبؤات محققة خارج العينة Out-of-Sample Forecasts وهي التنبؤات التي يمكن الحصول عليها للمتغير التابع باستخدام القيم الفعلية المتوفرة للمتغيرات المستقلة خلال الفترة خارج العينة ٨٦–١٩٩٦ والتي تتوفر فيها بيانات فعلية عن كل من صز، س رز . وتستخدم هذه التنبؤات عادة لاختبار مقدرة النماذج المختلفة على التنبؤ وذلك بمقارنة القيم الفعلية للمتغير التابع صز خارج فترة العينة بالقيم المتوقعة باستخدام هذه النماذج خلال نفس الفترة .

(حـ) تنبؤات مستقبلية Ex-ante Forecasts وهي التنبؤات الخاصة بالمتغير التابع في فترة مستقبلية (بعد ١٩٩٦) لا تتوفر فيها بيانات فعلية عن المتغير التابع أو المتغيرات المستقلة . وهذه هي التنبؤات التي نقصدها في محاولات التنبؤ العلمي .

(٣) درجة التأكد : يمكن التفرقة وفقاً لهذا المعيار بين نوعين من التنبؤ هما : التنبؤ المشروط Conditional Forecast والتنبؤ غير المشروط Unconditional Forecast . ويوجد هناك اختلاف بين الكُتاب حول ما هو مقصود بالتنبؤ المشروط والتنبؤ غير المشروط. وسوف نأخذ بالتعريف القائل بأن التنبؤ غير المشروط يتمثل في التنبؤ بقيم المتغير التابع بناءاً على معلومات فعلية متاحة عن المتغيرات التفسيرية ، ومن ثم فإن كل أنواع التنبؤ بعد التحقق تعتبر تنبؤ غير مشروط . ومن أمثلة ذلك النموذج التالي:

صز = أ + ب ١ س ز-١ + ب ٢ س ز-٢ + ع ز .... (١٩–٢)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + u_t$$

حيث : صز = مخزون الفترة الحالية (الشهر الحالي) (Y_t)

س ز-١ = مبيعات الفترة السابقة (X_{t-1})

س ز-٢ = مبيعات الفترة قبل السابقة (X_{t-2})

ويشير النموذج (١٩-٢) إلى أن مخزون الفترة الحالية يتحدد بمبيعات الفترة السابقة وما قبلها . فإذا أردنا أن نتنبأ بمخزون الفترة المقبلة $ص_{ز+١}$ فمن الممكن عمل ذلك باستخدام البيانات المتوفرة عن المبيعات في الفترة الحالية "ز" والفترة السابقة "ز-١" وهى بيانات فعلية مؤكدة .

أما في حالة التنبؤ المشروط فإن قيم إحدى المتغيرات التفسيرية التي سوف يتم على أساسها توقع قيم المتغير التابع لا تكون معروفة على وجه التأكيد وإنما يتعين توقعها هي الأخرى أو تخمينها . ومن ثم فإن دقة التنبؤ بقيمة المتغير التابع تكون مشروطة بمدى دقة القيم المفترضة للمتغير التفسيري . ومن الأمثلة على ذلك أن يأخذ نموذج الانحدار السابق الصيغة التالية :

$$ص_ز = أ + ب_١ س_{١ز} + ب_٢ س_{٢ز} + ع_ز \quad .... \quad (١٩-٣)$$

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

فإذا أردنا توقع قيمة $ص_{ز+١}$ في الفترة المقبلة فلابد أن نتوقع أولاً قيم المتغيرين $س_١$، $س_٢$ في الفترة المقبلة أي $س_{١ز+١}$ ، $س_{٢ز+١}$.

(٤) درجة الشمول : وفي هذا الصدد قد يتم التنبؤ باستخدام نموذج انحدار مكون من معادلة واحدة Forecasting with a Single-Equation Model أو باستخدام نموذج مكون من عدد من المعادلات Forecasting with a Multi-Equation Model وذلك على النحو الذي سوف يأتي تفصيلاً .

(٥) أسلوب التنبؤ :

يوجد هناك مدخلان للتنبؤ العلمي :

(أ) التنبؤ القياسي Econometric Forecasting

(ب) تنبؤ السلاسل الزمنية Time Series Forecasting

وبالنسبة للتنبؤ القياسي فهو يعتمد على نماذج انحدار تربط بين متغير أو عدد من المتغيرات التابعة وعدد آخر من المتغيرات المستقلة . ومن أهم مزايا هذا المدخل أنه

بالإضافة إلى مساعدته على التنبؤ العلمي بقيم بعض المتغيرات ، يقدم تفسيراً للتغيرات في قيم المتغير التابع . أما عن تنبؤ السلاسل الزمنية فهو يعتمد على القيم الماضية لمتغير ما للتنبؤ بقيمه المستقبلية دون تقديم تفسير للتغير في قيم هذا المتغير .

وعموماً فإن هذا التقسيم يعتبر تحكمياً لأن هناك تداخلاً في بعض الحالات بين المدخلين . ويلاحظ أن مدخل السلاسل الزمنية يكون أفضل من مدخل التنبؤ القياسي عند إجراء تنبؤات في الأجل القصير ، هذا في حين يتفوق مدخل التنبؤ القياسي على مدخل السلاسل الزمنية عند إجراء تنبؤات للأجل الطويل . وسوف نتعرض لمدخل السلاسل الزمنية بنوع من التفصيل في المبحث الثالث من هذا الفصل .

ويلاحظ أن هناك أربعة مصادر محتملة للخطأ الذي يمكن أن يحدث في التنبؤ العلمي :

(١) حدوث بعض التغيرات العشوائية غير المتوقعة كالزلازل والأوبئة والأمراض والإشاعات والحروب والثورات وغيرها . وكل هذه التغيرات تنعكس في الحد العشوائي الذي يوجد في أي معادلة انحدار .

(٢) استخدام عينة متحيزة لا تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً في تقدير النموذج الذي سوف يستخدم في عملية التنبؤ . ففي مثل هذه الحالة نجد أن $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ المقدرتين من بيانات عينة ليستا ممثلتين لمعلمتي المجتمع أ ، ب تمثيلاً جيداً.

(٣) الخطأ في تقدير أو تخمين القيم المتوقعة للمتغيرات التفسيرية التي يتم على أساسها التنبؤ بقيم المتغير التابع ، وذلك في حالة التنبؤ المشروط .

(٤) الخطأ في تعيين النموذج ، وذلك من حيث درجة خطية العلاقة ، أو عدد متغيراتها التفسيرية ، أو عدد معادلات النموذج .

المبحث الثاني

طرق التنبؤ العلمي

لقد أشرنا سابقاً إلى نوعين من التنبؤ هما :

١ - التنبؤ العلمي باستخدام معادلة انحدار واحدة .

٢ - التنبؤ العلمي باستخدام نموذج متعدد المعادلات .

وسوف نتناول كل نوع منهما بالتفصيل في هذا المبحث .

(١٩-٢-١) التنبؤ العلمي باستخدام معادلة انحدار واحدة :

يتكون النموذج المستخدم في التنبؤ في هذه الحالة من معادلة انحدار واحدة ، وقد يكون التنبؤ هنا لقيمة واحدة (تنبؤ نقطة) أو لمدى معين (تنبؤ فترة) :

(١) تنبؤ النقطة :

افترض أنه تم تقدير معادلة الانحدار المعبرة عن العلاقة بين كمية النقود (ك) والرقم القياسي للأسعار (ث) خلال الفترة ١٩٨٥ - ٢٠٠٤ فكانت كما يلي :

$$ث_{ز} = ٦٠ + ٠,٢ \ ك_{ز-١} + د_{ز} \qquad .... (١٩-٤)$$

وبافتراض أن متوسط قيم الحد العشوائي د $_{ز}$ = صفر ، فإن الصيغة التي يمكن أن تستخدم في التنبؤ تصبح هي :

$$\hat{ث}_{ز} = ٦٠ + ٠,٢ \ ك_{ز-١} \qquad .... (١٩-٥)$$

ومن ثم فإن القيمة المتوقعة للمستوى العام للأسعار في العام ٢٠٠٥ (ث $_{ز+١}$) يمكن تحديدها بمعلومية كمية النقود في عام ٢٠٠٤ (ك $_{ز}$) . فإذا كانت ك $_{ز}$ = ٦٠٠ مليار

$$ث_{ز+١} = ٦٠ + ٠,٢ \ (٦٠٠) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠$$

ويعتبر هذا تنبؤ نقطة غير مشروط .

أما إذا كانت معادلة الانحدار المعبرة عن العلاقة بين كمية النقود والمستوى العام للأسعار تأخذ الصيغة المقدرة التالية :

$ث_ز = ٥٥ + ٠,١٥ ك_ز + ٠,١٢ ك_{ز-١} + د_ز$ .... (١٩-٦)

فإن التنبؤ هنا يكون مشروط لضرورة توقع كمية النقود السائدة في عام ٢٠٠٥ حتى يمكن التنبؤ بالمستوى العام للأسعار في نفس العام ، حيث :

$ث_{ز+١} = ٥٥ + ٠,١٥ ك_{ز+١} + ٠,١٢ ك_ز$ .... (١٩-٧)

ويعتبر هذا الوصف صحيحاً عندما لا يكون لدى السلطات النقدية سيطرة كاملة على كمية النقود بالمجتمع ، وهو أمر يحدث في الحالات التي يوجد فيها بعض مؤسسات مالية في المجتمع لا تخضع للسيطرة الكاملة للبنك المركزي كبعض البنوك الأجنبية أو شركات التأمين . أما إذا كانت السلطات النقدية لديها سيطرة كاملة على كمية النقود بالمجتمع فإنها يمكنها أن تحدد كمية النقود بالفترة المقبلة على وجه الدقة ومن ثم يصبح التنبؤ باستخدام المعادلة (١٩-٧) تنبؤ غير مشروط . وإذا توفرت لدينا معلومات تشير إلى أن : $ك_٤ = ٦٠٠$ مليار ، $ك_٥ = ٦٢٠$ مليار ، يمكن التنبؤ بقيمة الرقم القياسي للأسعار عام ٢٠٠٥ على النحو التالي:

$$\hat{ث}_٥ = ٥٥ + ٠,١٥ (٦٢٠) + ٠,١٢ (٦٠٠) = ٥٥ + ٩٣ + ٧٢ = ٢٢٠$$

وبالطبع يمكن التنبؤ بقيمة المتغير التابع " ث " لأكثر من فترة ، أي $ث_٦$ ، $ث_٧$ ،.....

ويمكن تحديد القيم المتوقعة للمتغيرات التفسيرية التي تستخدم كأساس للتنبؤ بقيم المتغير التابع في حالة التنبؤ المشروط من خلال تقدير علاقة المتغير التفسيري مع الزمن . ولتوضيح ذلك افترض أن النموذج الأصلي يأخذ الصيغة التالية :

$ص_ز = أ + ب س_ز + ع_ز$ .... (١٩-٨)

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

فإذا اتضح أن المتغير التفسيري $س_ز$ يتغير عبر الزمن " ز " وفقاً لإحدى العلاقات التالية :

$س_ز = جـ ز + ق_ز$ .... (١٩-٩)

$$X_t = c T + w_t$$

$س_ز = ك + جـ ز + ق_ز$ .... (١٩-١٠)

$$X_t = K + c T + w_t$$

س ز = ك ز ج هـ ق ز .... (١٩-١١)

$$X_t = K\ T^c e^{wt}$$

س ز = ك + جـ ١ ز + جـ ٢ ز٢ + ق ز .... (١٩-١٢)

$$X_t = K + c_1\ T + c_2\ T^2 + w_t$$

حيث ق ز (w_t) = الحد العشوائي .

فإذا أردنا تقدير العلاقة (١٩-٨) خلال الفترة ١٩٨٥ - ٢٠٠٤ لاستخدامها في التنبؤ بقيم ص في سنوات مقبلة كعامي ٢٠٠٥ ، ٢٠٠٦ فإننا نعوض من المعادلة (١٩-٩) في المعادلة (١٩-٨) عن س ز بافتراض أن المعادلة (١٩-٩) هي التي تصف المسار الزمني للمتغير التفسيري س فنحصل على :

ص ز = أ + ب جـ ز + (ب ق ز + ع ز)

$$Y_t = \alpha + \beta\, c\, T + (\beta\, w_t + u_t)$$

ومن ثم فإن :

ص ز = أ + ب ١ ز + و ز .... (١٩-١٣)

$$Y_t = \alpha + \beta_1\ T + V_t$$

حيث ب ١ = ب جـ ، و ز = (ب ق ز + ع ز) وهي تشير للحد العشوائي .

وبتقدير العلاقة (١٩-١٣) باستخدام بيانات عن ص ، ز عبر الفترة ١٩٨٥ - ٢٠٠٤ ، أي المدة ٢٠ سنة يصبح من الممكن التنبؤ بقيم ص من خلال التعويض عن قيمة " ز " في المعادلة (١٩-١٣) .

فإذا أردنا التنبؤ بقيمة " ص " عام ٢٠٠٥ نعوض عن ز = ٢١ ، وإذا أردنا التنبؤ بقيمة ص عام ٢٠٠٦ نعوض عن ز = ٢٢ وهكذا .

أما إذا كانت المعادلة (١٩-١٠) هي التي تصف المسار الزمني للمتغير التفسيري " ز " فإننا نعوض بها في المعادلة (١٩-٨) فنحصل على صيغة مماثلة للصيغة (١٩-١٣) . وإذا كانت المعادلة (١٩-١١) هي التي تصف المسار الزمني للمتغير التفسيري س ز فبالحصول على لوغاريتم هذه المعادلة نجده كما يلي :

لو س ز = لو ك + جـ ١ لو ز + + ق ز .... (١٩-١٤)

$$\ln X_t = \ln K + c_1 \ln T + w_t$$

وبتقدير العلاقة (١٩-١٤) من بيانات خاصة بكل من س ز ، ز خلال نفس الفترة ١٩٨٥ - ٢٠٠٤ ثم ردها لأصلها ، يمكن أن نتوقع قيمة س ز التي تسود عام ٢٠٠٥ بالتعويض عن ز = ٢١ في المعادلة المقدرة ، وكذلك الأمر بالنسبة لعام ٢٠٠٦. وبمعرفة القيمة المتوقعة للمتغير س يمكن أن نعوض عنها في المعادلة (١٩-٨) بعد تقديرها ونحدد القيمة المتوقعة للمتغير ص .

وفي حالة ما إذا كانت المعادلة (١٩-١٢) هي التي تصف المسار الزمني للمتغير التفسيري س ز فبالتعويض بها في المعادلة (١٩-٨) نحصل على :

ص ز = أ + ب ك + ب جـ ١ ز + ب جـ ٢ ز٢ (ب ق ز + ع ز)

$$Y_t = \alpha + \beta K + \beta c_1 T + \beta c_2 T^2 + (\beta w_t + u_t)$$

وبإعادة صياغة هذه الدالة في صورة عامة نحصل على :

ص ز = ب . + ب ١ ز + ب ٢ ز٢ + و ز .... (١٩-١٥)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + V_t$$

وبتقدير الصيغة (١٩-١٥) باستخدام بيانات عن ص ، ز عبر الفترة ١٩٨٥ - ٢٠٠٤ يمكن استخدامها في التنبؤ بقيم ص في فترات تالية على نفس النحو الذي سبق بالتعويض عن قيم " ز " في المستقبل .

(٢) تنبؤ الفترة :

لقد أشرنا سابقاً إلى أن هناك أسباباً عديدة تؤدى للخطأ في التنبؤ بقيم المتغير التابع . ومن ثم فإنه من المحتمل ما لم يكن من المؤكد أن تنحرف القيمة المتوقعة للمتغير التابع عن القيمة الحقيقية . ولذا فإنه من الأفضل التنبؤ بمدى معين يتوقع أن تقع بداخله قيمة المتغير التابع باحتمال معين . ويمكن تحديد هذا المدى من خلال تقدير تباين القيمة المتوقعة للمتغير التابع . ولتوضيح ذلك افترض أن :

صَ^ ق = القيمة المتوقعة للمتغير التابع (Y_F)

س ق = القيمة المتوقعة للمتغير س التفسيري (X_F)

ع ^٢^ صَ^ق = تباين القيمة المتوقعة صَ^ ق ($S^2_{\hat{Y}F}$)

وبدون إثبات نجد أن :

ع ^٢^ صَ^ق = ع د^٢^ [١ + (١/ن) + (س ق − سَ)^٢^ / مج س^٢^] .... (١٩-١٦)

$$S^2_{\hat{Y}F} = S^2_e\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(X_F-\bar{X})^2}{\Sigma x^2}\right]$$

وبالحصول على الجزر التربيعي للمعادلة (١٩-١٦) نجد أن :

ع صَ^ق = √ ع ^٢^ صَ^ق .... (١٩-١٧)

$$S_{\hat{Y}F} = \sqrt{S^{2\wedge}_{YF}}$$

ويمكن تحديد مدى التنبؤ باستخدام الصيغة التالية عند مستوى معنوية ٥٪ :

الحد الأعلى لفترة التنبؤ = صَ^ ق + ت ٠,٠٢٥ ع صَ^ق

$$\hat{Y}_F + t_{0.025}\ S_{\hat{Y}F}$$

الحد الأدنى لفترة التنبؤ = صَ^ ق − ت ٠,٠٢٥ ع صَ^ق

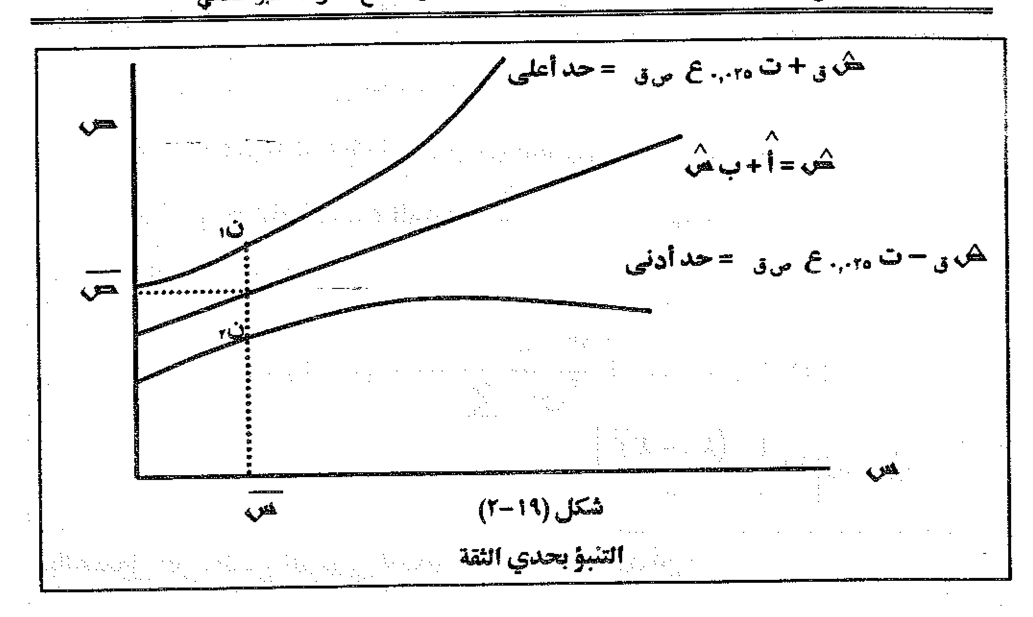
$$\hat{Y}_F - t_{0.025}\ S_{\hat{Y}F}$$

أي أن :

ح [صَ^ ق − ت ٠,٠٢٥ ع صَ^ق < صَ^ ق < صَ^ ق + ت ٠,٠٢٥ ع صَ^ق] = ٩٥٪

$$P[\hat{Y}_F - t_{0.025}\ S_{YF} < \hat{Y}_F < \hat{Y}_F + t_{0.025}\ S_{YF}] = 95\,\%$$

ولعل هذا يعني أن احتمال وقوع القيمة المتوقعة للمتغير ص بين الحدين السابقين = ٩٥٪ ، واحتمال أن تقع خارجهما = ٥٪ . ويلاحظ من المعادلة (١٩-١٦) أن حدي فترة التنبؤ يزدادان اتساعاً كلما زادت قيمة س ق كمتغير تفسيري . ويتضح هذا من الشكل (١٩-٢) .



شكل (١٩-٢)

التنبؤ بحدي الثقة

ويلاحظ من الشكل (١٩-٢) أن فترة التنبؤ تصل لحدها الأدنى (ن١ ن٢) عند القيم المتوسطة للمتغيرين س ، ص ، وأنها تزداد كلما زادت قيمة المتغير التفسيري س الذي يتم على أساسه التنبؤ ، ولذا تقل دقة التنبؤ .

مثال (١٩-١)

التنبؤ بالاستهلاك

افترض أن البيانات الموضحة بالجدول (١٩-١) تمثل متوسط الدخل الحقيقي (س ز) ، ومتوسط الإنفاق الاستهلاكي الحقيقي (ص ز) في مجتمع ما عبر ١٠ سنوات ١٩٩٥ - ٢٠٠٤ . والمطلوب :

(١) تقدير علاقة الدخل الحقيقي بالزمن من خلال الصيغة التالية :

س ز = ك̂ + ج̂ ز + ق ز

(٢) تحديد تنبؤ النقطة لمتوسط الاستهلاك الحقيقي خلال السنوات ٢٠٠٥ ، ٢٠٠٦، ٢٠٠٧.

(٣) تحديد تنبؤ الفترة لمتوسط الاستهلاك الحقيقي خلال عام ٢٠٠٥ .

جدول (١٩-١)

بيانات الاستهلاك والدخل لمجتمع ما بالمليار دولار

السنة	س ز	ص ز	الزمن (ز)
١٩٩٥	١٠٠	١٥٠	١
١٩٩٦	١٥٠	٢٠٠	٢
١٩٩٧	٢٥٠	٢٥٠	٣
١٩٩٨	٣٠٠	٢٥٠	٤
١٩٩٩	٥٠٠	٤٥٠	٥
٢٠٠٠	٦٥٠	٥٠٠	٦
٢٠٠١	٧٥٠	٦٠٠	٧
٢٠٠٢	٩٠٠	٨٠٠	٨
٢٠٠٣	١٠٠٠	٩٠٠	٩
٢٠٠٤	١٢٥٠	١٠٠٠	١٠

وللإجابة على هذه المطلوبات نتبع الخطوات التالية :

(١) تحديد العلاقة بين الدخل الحقيقي والزمن :

لتحديد علاقة الدخل الحقيقي "س ز" بالزمن "ز" نقوم بالحصول على المجاميع التالية من البيانات السابقة بالجدول (١٩-١) :

$\sum$ س ز = ٥٨٥٠ ، $\sum$ ز = ٥٥ ، ن = ١٠

$\bar{س}$ = $\sum$ س ز ÷ ن = ٥٨٥٠ ÷ ١٠ = ٥٨٥

$\bar{ز}$ = $\sum$ ز ÷ ن = ٥٥ ÷ ١٠ = ٥,٥

$\sum$ س ز١ = ١٠٥٢٥ حيث، س = س ز − $\bar{س}$ ، ز١ = ز − $\bar{ز}$

$\sum$ ز١² = ٨٢,٥

∴ $\hat{ج}$ = $\frac{\sum س ز_١}{\sum ز_١^٢}$ = $\frac{١٠٥٢٥}{٨٢,٥}$ = ١٢٧,٦

$\therefore$ ك̂ = س̄ − ج̂ ز̄ = ٥٨٥ − (١٢٧,٦) (٥,٥) = − ١١٧

$\therefore$ س ز = − ١١٧ + ١٢٧,٦ ز + ق ر

ومن ثم يمكن استخدام الصيغة التالية في توقع قيم المتغير التفسيري :

س̂ ز = − ١١٧ + ١٢٧,٦ ر	(١٩−١٨)

بافتراض أن متوسط قيم الحد العشوائي ق ر = صفر .

(٢) تنبؤ النقطة :

(أ) يتعين علينا منذ البداية أن نقدر العلاقة بين الاستهلاك الحقيقي (ص ر) والدخل الحقيقي (س ز) باستخدام الصيغة التالية :

ص ز = أ + ب س ر + ع ر

ولعمل ذلك يتعين علينا تحضير البيانات في صورة مجاميع كما يلي :

$\sum$ ص ز = ٥١٠٠ ، $\sum$ س ر = ٥٨٥٠ ، ن = ١٠

ص̄ = $\sum$ ص ز ÷ ن = ٥١٠٠ ÷ ١٠ = ٥١٠ ، س̄ = ٥٨٥

$\sum$ س ص = ١٠٦٩٠٠٠ حيث ص = ص − ص̄ ، س = س − س̄

$\sum$ س^{٢} = ١٣٧٠٢٥٠

$$\therefore \text{ب} = \frac{\sum \text{ص س}}{\sum \text{س}^{٢}} = \frac{١٠٦٩٠٠٠}{١٣٧٠٢٥٠} = ٠,٧٨$$

ومن ثم أ̂ = ص̄ − ب̂ س̄ = ٥١٠ − ٠,٧٨ (٥٨٥) = ٥٣,٧

ومما سبق نجد أن :

ص ز = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ س ز + ع ر

ومن ثم يمكن استخدام الصيغة التالية في التنبؤ بقيم ص ز :

ص̂ ز = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ س ز	(١٩−١٩) ....

وللتنبؤ بقيم الاستهلاك الحقيقي في السنوات ٢٠٠٥، ٢٠٠٦ ، ٢٠٠٧ أي السنوات أرقام ١١ ، ١٢ ، ١٣ يتعين التعويض عن قيم ز٠٥ = ١١ ، ز٠٦ = ١٢ ، ز٠٧ = ١٣ في المعادلة (١٩-١٨) لنحدد القيم المتوقعة للمتغير التفسيري س ز في هذه السنوات أولاً . ثم نعوض بهذه القيم في المعادلة (١٩-١٩) حتى يمكن تحديد تنبؤ النقطة للمتغير التابع صَ ز في السنوات الثلاثة .

وبإتمام ذلك نحصل على النتائج التالية الموضحة بالجدول (١٩-٢) .

جدول (١٩-٢)

القيم المتوقعة للمتغيرين التفسيريين والمتغير التابع

سنوات التنبؤ	الزمن (ز)	القيمة المتوقعة للدخل الحقيقي سَ ز = -١١٧ + ١٢٧,٦ز	القيمة المتوقعة للاستهلاك الحقيقي صَ ز = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ سَ ز
٢٠٠٥	١١	١٢٨٦,٦	١٠٥٧,٢
٢٠٠٦	١٢	١٤١٤,٢	١١٥٦,٨
٢٠٠٧	١٣	١٥٤١,٨	١٢٥٦,٢

(ب) يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة عن طريق تقدير العلاقة بين ص ز ، " ز " مباشرة كما هو موضح بالمعادلة (١٩-١٣) . ولإتمام ذلك نقوم بالتعويض من المعادلة (١٩-١٨) في المعادلة (١٩-١٩) فنحصل على :

صَ ز = ٥٣,٧ + ٠,٧٨ (-١١٧ + ١٢٧,٦ ز)

صَ ز = ٣٧,٦ + ٩٩,٥ ز .... (١٩-٢٠)

ومن ثم يمكن استخدام المعادلة (١٩-٢٠) في التنبؤ بقيم ص في السنوات المختلفة كما هو موضح بالجدول (١٩-٣) .

جدول (١٩-٣)

التنبؤ المباشر بقيمة الاستهلاك الحقيقي

سنوات التنبؤ	الزمن (ز)	القيمة المتوقعة للاستهلاك الحقيقي $\hat{س}_{ز} = -٩٩,٥ + ٣٧,٦$ ز
٢٠٠٥	١١	١٠٥٧
٢٠٠٦	١٢	١١٥٦,٤
٢٠٠٧	١٣	١٢٥٦

وبمقارنة النتائج المعروضة بالجدول (١٩-٣) مع نظيرتها بالجدول (١٩-٢) نجد أنها متقاربة .

(٣) تنبؤ الفترة :

يتعين علينا أولاً أن نقوم بتقدير المعادلة (١٩-١٦) . ولعمل ذلك نقوم بالحصول على البيانات التالية :

$$ع_{د}^{٢} = \frac{\sum د^{٢}}{ن - ك} = \frac{١٥٠٢٠}{١٠ - ٢} = \frac{١٥٠٢٠}{٨} = ١٨٧٧,٥$$

$س_{ق} = س_{٥} = ١٢٨٦,٦$ من الجدول (١٩-٢) .

$$\bar{س} = ٥٨٥$$

$\sum س^{٢} = ١٣٧٠٢٥٠$ ، حيث $س = س_{ز} - \bar{س}$

$$ع^{٢}_{\hat{ص}_{٥}} = ١٨٧٧,٥ \left[١ + (١/١٠) + \frac{(١٢٨٦,٦ - ٥٨٥)^{٢}}{١٣٧٠٢٥٠} \right]$$

$$ع^{٢}_{\hat{ص}_{٥}} = ١٨٧٧,٥ \; (١,١ + ٠,٣٦) = ٢٧٤١,١٥$$

$$\therefore ع_{\hat{ص}_{٥}} = \sqrt{٢٧٤١,١٥} = ٥٢,٣٥$$

وللحصول على فترة تنبؤ بمعامل ثقة ٩٥ ٪ (درجة معنوية ٥ ٪) نحدد :

$$ت_{٠,٠٢٥} \text{ ، } ٨ = ٢,٣٠٦$$

$\therefore$ الحد الأعلى لفترة التنبؤ $= \hat{ص}_{ق} + ت_{٠,٠٢٥} \; ع_{\hat{ص}_{ق}}$

الحد الأعلى لفترة التنبؤ = ١٠٥٧,٢ + (٢,٣٠٦) (٥٢,٣٥)

= ١٠٥٧,٢ + ١٢٠,٧٢ = ١١٧٧,٩٢

و الحد الأدنى لفترة التنبؤ = $\hat{ص}_{ق}$ – ت ٠,٠٢٥ ع $_{\hat{ص}ق}$

= ١٠٥٧,٢ – ١٢٠,٧٢ = ٩٣٦,٤٨

∴ ح [٩٣٦,٥ < $\hat{ص}_{٠٥}$ < ١١٧٧,٩٢] = ٩٥٪

(١٩–٢–٢) التنبؤ باستخدام نموذج متعدد المعادلات :

افترض أننا قمنا بتقدير النموذج الكينزي البسيط للدخل القومي على النحو التالي وذلك لفترة ١٩٩٥ – ٢٠٠٤ .

$\hat{س}_{ز}$ = ٢٠ + ٠,٨ ل $_{ز}$

$\hat{ث}_{ز}$ = ٢ + ٠,١ ل $_{ز}$ + ٠,٣ ل $_{ز-١}$

$\hat{ل}_{ز}$ = $\hat{س}_{ز}$ + $\hat{ث}_{ز}$ + ق $_{ز}$

حيث : س $_{ز}$ = الاستهلاك الكلي

ث $_{ز}$ = الاستثمار الكلي

ل $_{ز}$ = الدخل الكلي

ق $_{ز}$ = الإنفاق الحكومي

والمطلوب هو تحديد القيم المتوقعة للمتغيرات الداخلية س $_{ز}$ ، ل $_{ز}$ ، ث $_{ز}$ بمعلومية المتغيرات سابقة التحديد وذلك لعام ٢٠٠٥ إذا علمت أن :

ل $_{ز-١}$ = ل $_{٠٤}$ = ١٥٠ مليار جنيه

ق $_{ز}$ = ق $_{٠٥}$ = ٢٠ مليار

نقوم بالتعويض بقيم المتغيرات سابقة التحديد في النموذج السابق فنحصل على :

$\hat{س}_{ز}$ = ٢٠ + ٠,٨ ل $_{ز}$ ...... (١٩–٢١)

$\hat{ث}_{ز}$ = ٢ + ٠,١ ل $_{ز}$ + ٠,٣ (١٥٠)

$\hat{ث}_ز = ٤٧ + ٠,١ ل_ز$	...... (١٩-٢٢)
$\hat{ل}_ز = \hat{س}_ز + \hat{ث}_ز + ٢٠$	.... (١٩-٢٣)

ثم نحل هذه المعادلات بالتعويض من (١٩-٢١) ، (١٩-٢٢) في (١٩-٢٣) فنحصل على :

$\hat{ل}_ز = ٢٠ + ٤٧ + ٢٠ + ٠,٨ ل_ز + ٠,١ ل_ز$

$\therefore \hat{أ}_ز - ٠,٩ ل_ز = ٨٧$

$\therefore \hat{ل}_ز = ٨٧ / ٠,١ = ٨٧٠$

وبالتعويض عن قيمة $\hat{ل}_ز$ في المعادلتين (١٩-٢١) ، (١٩-٢٢) نحصل على :

$\hat{ث}_ز = ٤٧ + ٠,١ (٨٧٠) = ١٣٤$ ، $\hat{س}_ز = ٢٠ + ٠,٨ (٨٧٠) = ٧١٦$

∴ القيم المتوقعة للمتغيرات الداخلية عام ٢٠٠٥ :

الدخل الكلي = ٨٧٠ مليون

الاستهلاك الكلي = ٧١٦ مليون

الاستثمار الكلي = ١٣٤ مليون

ويلاحظ هنا أن التنبؤ مشروط . وتجدر الإشارة إلى أن الهدف من التنبؤ ليس هو العمل على تحقيق قيم المتغيرات الداخلية في المستقبل كما هي متوقعة ، بل قد يكون الهدف هو العمل على عدم تحقيقها . فإذا اتضح من التنبؤ أن مستوى البطالة سوف يكون مرتفعاً فإن هذا قد يدفع الحكومة لرفع مستوى الإنفاق عن ٢٠ مليار وكذلك الاستثمار لتقليل مستوى البطالة عما هو متوقع .

ويوجد هناك برامج كمبيوتر متخصصة مثل Eviews تقوم بتقدير النماذج الآنية باستخدام طرق عدة مثل طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل وغيرها .

المبحث الثالث

طرق السلاسل الزمنية في التنبؤ العلمي

يمكن التفرقة بين ثلاثة أنواع من طرق التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية :

(١) طرق تمهيد بيانات السلسلة الزمنية .

Smoothing Methods of Economic Time Series

(٢) نماذج المتوسط المتحرك المتكامل ذات الانحدار الذاتي

Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Models

وهي تعرف بمنهجية بوكس – جينكنز

Box - Jenkins (B J) Methodology

(٣) نماذج الانحدار الذاتي ذات المتجه

Vector Autoregression (VAR) Models

وسوف نتعرض لهذه الطرق فيما يلي :

(١٩-٣-١) طرق تمهيد بيانات السلسلة الزمنية

Smoothing Methods of Economic Time Series

في حالة التنبؤ بسلوك متغير ما في الأجل الطويل قد لا يكون من المهم التركيز على التقلبات قصيرة الأجل . وتوجد هناك بعض الطرق التي تستخدم في إزالة هذه التقلبات أو بمعنى آخر تمهيد البيانات . وتعتبر هذه من الطرق البسيطة التي تستخدم للتنبؤ في حالة توفر سلسلة زمنية ليست طويلة .. ونذكر منها طريقتي المتوسط المتحرك والتمهيد الأسي :

(١) المتوسط المتحرك Moving Average

افترض أن البيانات الأصلية هي: ص $_{ز}$ ، ص $_{ز-١}$ ، ص $_{ز-٢}$ ، ...(Y_t ، Y_{t-1} ، Y_{t-2} ، ....) ، عندئذ نستطيع الحصول على سلسلة المتوسط المتحرك باستخدام مدى زمني معين . فإذا كان المدى الزمني ن = ٣ ($n = 3$) ، إذن المتوسط المتحرك يتم حسابه على النحو التالي :

$\bar{ص}_ز = \frac{1}{3}$ (ص ز + ص ز-1 + ص ز-2)   .... (19-24)

$\bar{Y}_t = \frac{1}{3} (Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2})$

وتكون السلسلة كما يلي :

$\bar{ص}_1 = \frac{1}{3}$ (ص 1 + ص 2 + ص 3)

$\bar{Y}_1 = \frac{1}{3} (Y_1 + Y_2 + Y_3)$

$\bar{ص}_2 = \frac{1}{3}$ (ص 2 + ص 3 + ص 4)

$\bar{Y}_2 = \frac{1}{3} (Y_2 + Y_3 + Y_4)$

$\bar{ص}_3 = \frac{1}{3}$ (ص 3 + ص 4 + ص 5)

$\bar{Y}_3 = \frac{1}{3} (Y_3 + Y_4 + Y_5)$

ويلاحظ أن خمس مشاهدات فعلية تمكننا من الحصول على ٣ مشاهدات للمتوسط المتحرك في ظل (ن = ٣) $n = 3$ ، ولذا فإننا نفقد دائماً عدد من المشاهدات = (ن - ١) $n-1$ عند استخدام طريقة المتوسط المتحرك. وكلما زاد حجم (ن) n (المدى الزمني لحساب المتوسط) كلما زادت درجة التمهيد للعلاقة المقدرة .

مثال (١٩-٢)

تمهيد البيانات باستخدام المتوسط المتحرك واستخدامه في التنبؤ

افترض أن لدينا بيانات شهرية عن مبيعات سلعة ما (ص) Y وسعرها (س) X كما بالجدول (١٩-٤) ، والمطلوب هو :

١- تمهيد البيانات باستخدام المتوسط المتحرك لمدى زمني : ن = ٦ .

٢- التنبؤ بقيم : ص (Y) ، س (X) لمدة ١٢ شهر مقبلة باستخدام متوسط متحرك لمدة ٦ شهور سابقة ، مع استخدام البيانات الممهدة في التنبؤ.

جدول (١٩-٤)

المبيعات والسعر

observations	Y	X
2003:01	850.0000	100.0000
2003:02	847.0000	105.0000
2003:03	847.5000	105.0000
2003:04	847.0000	106.0000
2003:05	846.0000	107.0000
2003:06	847.0000	106.0000
2003:07	845.0000	100.0000
2003:08	845.5000	109.0000
2003:09	845.0000	110.0000
2003:10	844.0000	111.0000
2003:11	844.0000	112.0000
2003:12	847.0000	106.0000
2004:01	846.0000	108.0000
2004:02	845.0000	109.0000
2004:03	849.0000	102.0000
2004:04	850.0000	100.0000
2004:05	848.0000	104.0000
2004:06	847.0000	105.0000
2004:07	845.0000	109.0000
2004:08	844.5000	111.0000
2004:09	844.0000	112.0000
2004:10	843.0000	114.0000
2004:11	840.0000	116.0000
2004:12	841.5000	117.0000

١- تمهيد البيانات :

بإجراء التمهيد وفقاً لمتوسط متحرك لفترة ٦ شهور نفقد ٥ مشاهدات ونحصل على النتائج الموضحة بالجدول (١٩-٥) حيث (MX) س ، (MY) ص ، تشير للمتوسطات المتحركة . ويمكن الحصول على البيانات الممهدة من برنامج Eviesws باستخدام الأمر : Generate

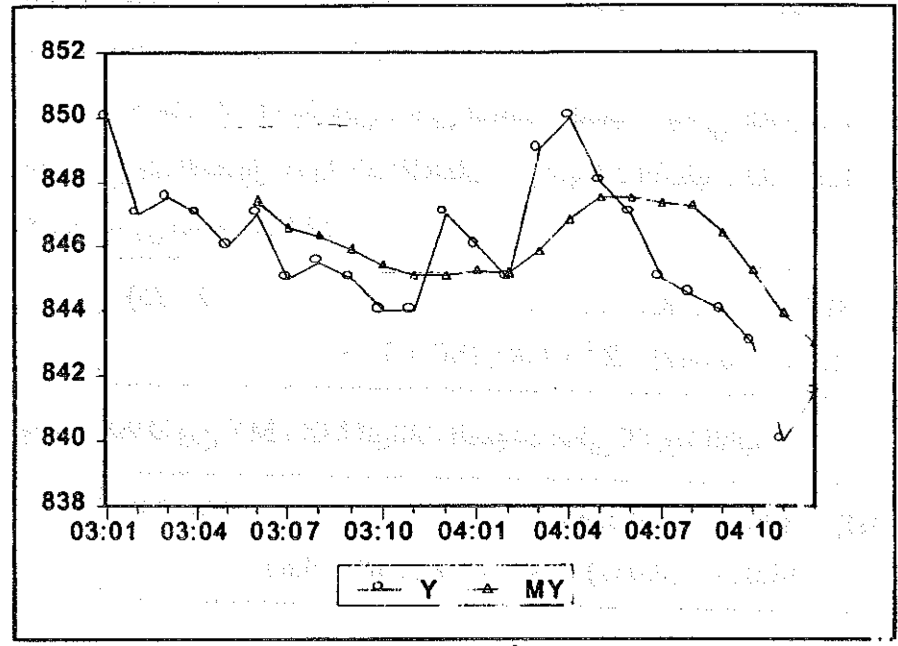
MY=@movav(Y,6)
MX=@movav(X,6)

حيث : البيانات الممهدة للمتغير MY = Y ، البيانات الممهدة للمتغير MX =X ويتعين أن تتوفر بيانات كل من Y ، X في الملف ، بالإضافة إلى إنشاء متغيرين جديدين هما MY , MX لوضع قيم البيانات الممهدة فيهما .

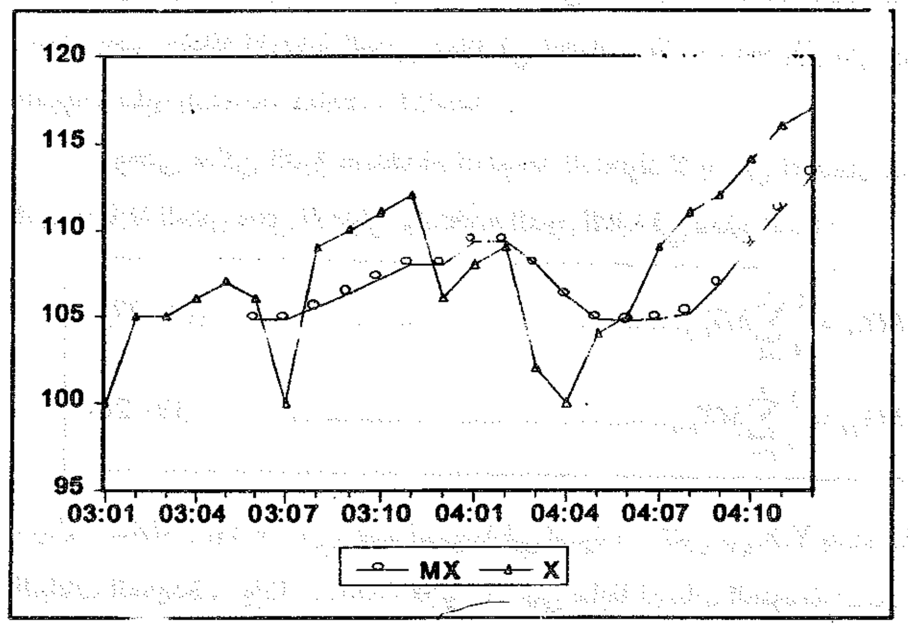
جدول (١٩-٥) - متوسطات متحركة (MY) ص ، ، (MX) س ،

observations	MY	MX
2003:01	NA	NA
2003:02	NA	NA
2003:03	NA	NA
2003:04	NA	NA
2003:05	NA	NA
2003:06	847.4167	104.8333
2003:07	846.5833	104.8333
2003:08	846.3333	105.5000
2003:09	845.9167	106.3333
2003:10	845.4167	107.1667
2003:11	845.0833	108.0000
2003:12	845.0833	108.0000
2004:01	845.2500	109.3333
2004:02	845.1667	109.3333
2004:03	845.8333	108.0000
2004:04	846.8333	106.1667
2004:05	847.5000	104.8333
2004:06	847.5000	104.6667
2004:07	847.3333	104.8333
2004:08	847.2500	105.1667
2004:09	846.4167	106.8333
2004:10	845.2500	109.1667
2004:11	843.9167	111.1667
2004:12	843.0000	113.1667

وبمقارنة البيانات الممهدة ص ، (MY) ، س ، (MX) بالبيانات الأصلية ص (Y) ، س (X) كما بالشكلين (١٩-٣) ، (١٩-٤) نجد أن التقلبات أقل في البيانات الممهدة منها في البيانات الخام .



شكل (١٩-٣) - البيانات الأصلية والممهدة للمتغير (Y) ، (MY)



شكل (١٩-٤) - البيانات الأصلية والممهدة للمتغير (X) ، (MX)

٢- التنبؤ باستخدام المتوسط المتحرك :

لا شك أن التنبؤ على أساس البيانات الممهدة يعطي نتائج مختلفة عن تلك التي يتم الحصول عليها عند الاعتماد على البيانات الأصلية . فتقدير العلاقة بين X ، Y يعطي النتيجة التالية :

$$\hat{Y}_t = 895.09 - 0.458X_t \quad (19-25)$$
$$(5.08) \quad (0.047) \quad R^2 = 0.81, DW = 2.18$$

وتقدير العلاقة بين MY ، MX البيانات الممهدة يعطي النتيجة التالية :

$$M\hat{Y}_t = 899.42 - 0.498MX \quad (19-26)$$
$$(4.02) \quad (0.037) \quad R^2 = 0.91, DW = 0.63$$

وبمقارنة هاتين المعادلتين نجد أن معامل التحديد قد تحسن ولكن على حساب ظهور مشكلة الارتباط الذاتي ممثلة في انخفاض D W ، مما يؤثر على دقة التنبؤات سلبياً باستخدام معادلات الانحدار .

وحتى يمكن التنبؤ باستخدام المتوسط المتحرك لا بد من الاعتماد على القيم السابقة للمتغير محل الاعتبار . وتستخدم الصيغ التالية في عملية التنبؤ :

$$MY_{Ft} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MY_{t-j} \quad (19-27)$$
$$MX_{Ft} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_{t-j} \quad (19-28)$$

حيث : MY_{Ft} , MX_{Ft} هي القيم المتوقعة في الفترة t لكل من Y,X باستخدام البيانات الممهدة . وإذا استخدمنا فجوة ٦ شهور سابقة لحساب المتوسط المتحرك لفترة ١٢ شهر مقبلة ، يمكن استخدام الأمر Generate لتوليد القيم المتوقعة على برنامج Eviews من خلال الصيغتين التاليتين :

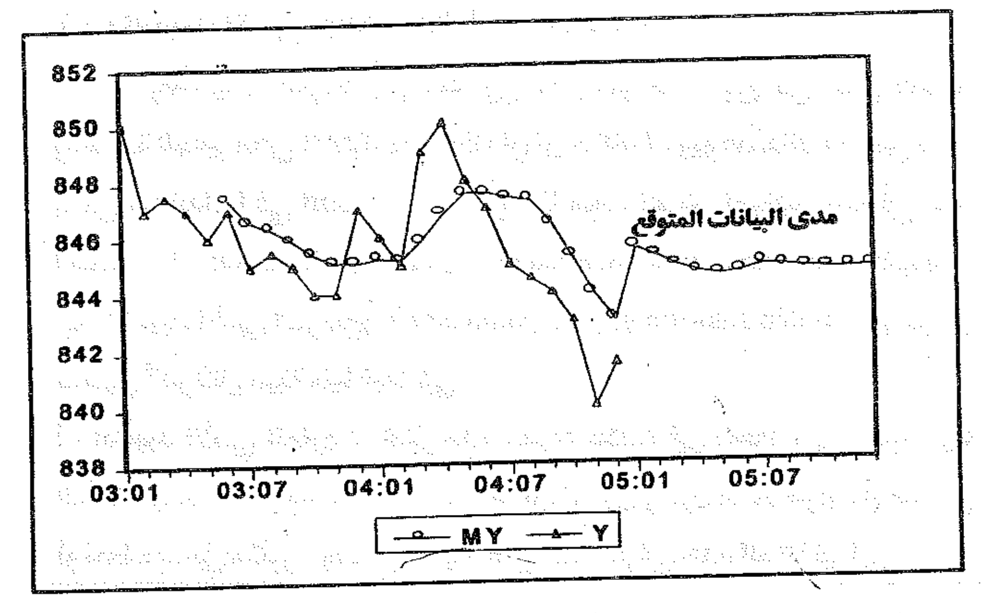
MY=(MY(-6)+MY(-5)+MY(-4)+MY(-3)+MY(-2)+MY(-1))/6
MX=(MX(-6)+MY(-5)+MY(-4)+MY(-3)+MY(-2)+MY(-1))/6

ويوضح الجدول (١٩-٦) والشكلين (١٩-٥) ، (١٩-٦) القيم المتوقع لكل من Y , X باستخدام البيانات الممهدة لمدة ١٢ شهر خلال عام ٢٠٠٥ .

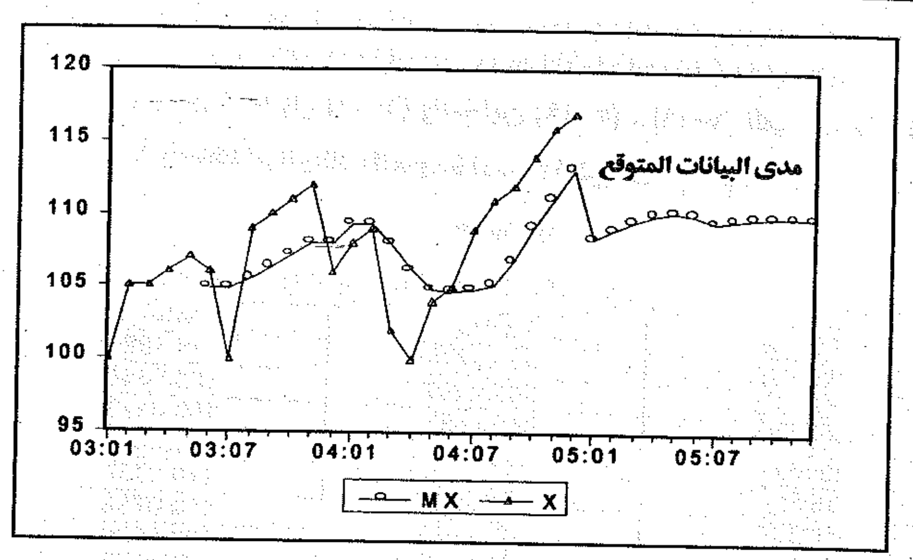
جدول (١٩-٦)

القيم المتوقعة باستخدام البيانات الممهدة وفقا للمتوسط المتحرك

Month	MY_{Ft}	MX_{Ft}
2005:01	845.5278	108.3889
2005:02	845.2269	108.9815
2005:03	844.8897	109.6173
2005:04	844.6352	110.0813
2005:05	844.5327	110.2337
2005:06	844.6354	110.0782
2005:07	844.9079	109.5635
2005:08	844.8046	109.7592
2005:09	844.7342	109.8889
2005:10	844.7083	109.9341
2005:11	844.7205	109.9096
2005:12	844.7518	109.8556



شكل (١٩-٥) - القيم المتوقعة والأصلية للمتغير Y



شكل (١٩-٦) - القيم المتوقعة والأصلية للمتغير X

ويلاحظ أن طريقة المتوسط المتحرك تعطي جميع القيم السابقة التي تعتمد عليها في التنبؤ نفس الوزن .

(٢) التمهيد الأسي Exponential Smoothing

وفقاً لهذه الطريقة يتم الحصول على متوسط مرجح من القيم الحالية والماضية للمتغير محل الاعتبار مع إعطاء أوزان متناقصة . ويوجد هناك أكثر من صيغة يمكن استخدامها في التمهيد الأسي ، ولكننا سوف نتعرض لصيغتين فقط في هذا الصدد : أ- التمهيد الأسي المفرد Single smoothing (one parameter) ، ب- التمهيد الأسي المزدوج Double smoothing (one parameter) . ونتعرض بتفصيل أكبر لكل صيغة منها فيما يلي .

أ- التمهيد الأسي المفرد : تعتبر هذه الصيغة ملائمة في الحالة التي تتحرك فيها السلسلة الزمنية لأعلى وأسفل حول متوسط ثابت دون وجود اتجاه متزايد أو متناقص أو نمط موسمي متكرر . وتتمثل الصيغة التي تستخدم في هذه الحالة فيما يلي :

ص ف١ز = م [ص ز + (١-م) ص ز-١ + (١-م)^٢ ص ز-٢ + ...] . (١٩-٢٨)

$$Y_{F1\,t} = \alpha\,[\,y_t + (1-\alpha)\,y_{t-1} + (1-\alpha)^2\,y_{t-2}$$

وبالحصول على صـف١ز-١ وفقاً لنفس منطق (١٩-٢٨) وإجراء بعض التعويضات نحصل على :

صـ ف١ز = م صـ ز + (١ - م) صـف١ز-١ .... (١٩-٢٩)

$$Y_{F1t} = \alpha y_t + (1 - \alpha) Y_{F1t-1}$$

حيث ١ > م > صفر $(0 < \alpha < 1)$

صـ ف١ز (Y_{F1t}) تشير للمتوسط الممهد ، صـ ز (y_t) تشير للبيانات الأصلية. ويراعى أن أول قيمة ممهدة تساوى أول قيمة أصلية . أي (صـ ١ = صـ ١) ($Y_1 = y_1$) . وكلما كانت م (α) قريبة من الواحد كلما كانت صـ ف١ز (Y_{F1t}) قريبة من صـ ز (y_t) مما يقلل من درجة التمهيد ، وكلما كانت م (α) قريبة من الصفر كلما زادت درجة التمهيد . ويتم تحديد م (α) تحكمياً من قبل الباحث ، أو توجد هناك بعض البرامج التي تحسبها بحيث تجعل مجموع مربعات أخطاء التنبؤ عند حدها الأدنى . . والتنبؤ وفقا لهذه الطريقة يعطي قيمة ثابتة لجميع القيم المتوقعة . ووفقا لبرنامج Eviews تضغط على Proc ، ثم Exponential smoothing ، ثم تضع e أمام Parameters حتى يتولى البرنامج نفسه تحديد α ، ثم تحدد فترة التنبؤ ، ويعطي البرنامج اسما للمتغير الممهد وتوقعاته مثل (Xsa) للمتغير X ، ويمكنك تغيير هذا الاسم إن أردت .

ب- التمهيد الأسي المزدوج : تقوم هذه الطريقة بعمل التمهيد الأسي مرتين ، وهي تعتبر ملائمة في حالة أن يكون هناك اتجاه خطي في البيانات وتقلبات حوله. فإذا كان لدينا متغير Y_t فإن التمهيد الأسي المزدوج لقيمه يحدث على مرحلتين على النحو التالي :

$$Y_{F1t} = \alpha Y_t + (1-\alpha) Y_{F1t-1} \qquad (19-30)$$

$$Y_{F2t} = \alpha Y_{F1t} + (1-\alpha) Y_{F2t-1} \qquad (19-31)$$

وتمثل الصيغة (١٩-٣٠) التمهيد الأول ، وتمثل الصيغة (١٩-٣١) التمهيد الثاني.
ويلاحظ أن الصيغة التي تستخدمها هذه الطريقة في التنبؤ للقيمة رقم k بعد الفترة الحالية t التي تحمل رقم (0) تتمثل في :

$$Y_{Ft+k} = \left(2+\frac{\alpha k}{1-\alpha}\right)Y_{F1t} - \left(1+\frac{\alpha k}{1-\alpha}\right)Y_{F2t}$$

$$Y_{Ft+k} = (2Y_{F1t} - Y_{F2t}) + \frac{\lambda}{1-\alpha}(Y_{F1t} - Y_{F2t})k \qquad (19-32)$$

ويلاحظ أن صيغة التنبؤ في (١٩-٣٢) تمثل خط مستقيم ،حده الثابت ($2Y_{F1t}-Y_{F2t}$) وميله ($(\alpha(Y_{F1t} - Y_{F2t})/(1-\alpha)$) .

مثال (١٩-٣)

التنبؤ وفقا لطريقة التمهيد الأسي

استخدم طريقة التمهيد الأسي المفرد في تمهيد بيانات المتغير X المعطاة بالجدول (١٩-٢) والتنبؤ بقيمه لفترة ١٢ شهر ، وطريقة التمهيد الأسي المزدوج لتمهيد بيانات المتغير Y المعطاة في نفس الجدول والتنبؤ بقيمه لفترة ١٢ شهر.

١- التمهيد والتنبؤ بطريقة التمهيد الأسي المفرد :

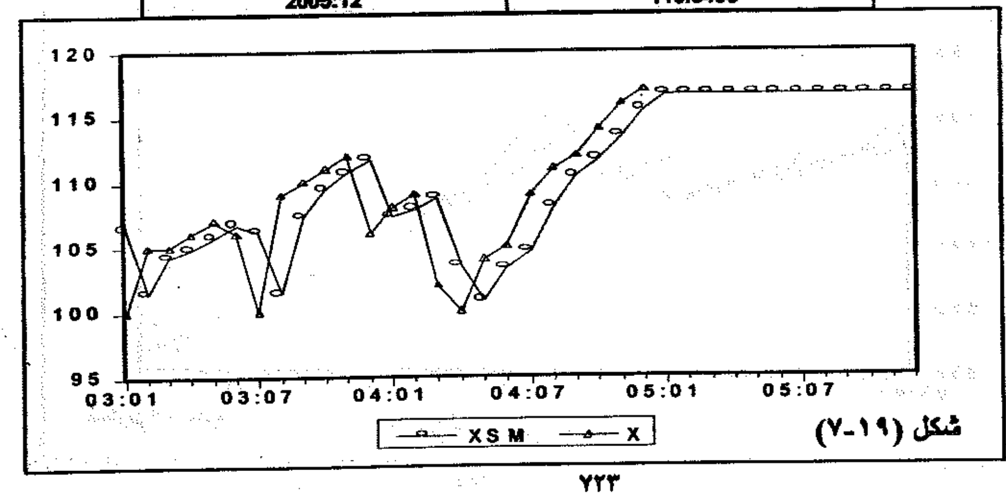
باستخدام برنامج Eviews يتضح أن : $\alpha = 0.7760$ ، والمتوسط الذي يستخدم للتنبؤ هو ١١٦,٦٤٩ . ويوضح الجدول (١٩-٧) والشكل (١٩-٧) القيم الممهدة والقيم المتوقعة للمتغير X .

٢- التمهيد والتنبؤ بطريقة التمهيد الأسي المزدوج :

يقدر البرنامج قيمة معلمة التمهيد للمتغير Y: $\alpha = 0.414$ ،والمعلمة التقاطعية = ٨٤٠,٨٨ ، والميل = -٠,٨٣٦٢ . ويوضح الجدول (١٩-٨) والشكل (١٩-٨) القيم الممهدة والقيم المتوقعة للمتغير Y .

جدول (١٩-٧) -القيم الممهدة والمتوقعة للمتغير X باستخدام التمهيد الأسي المفرد

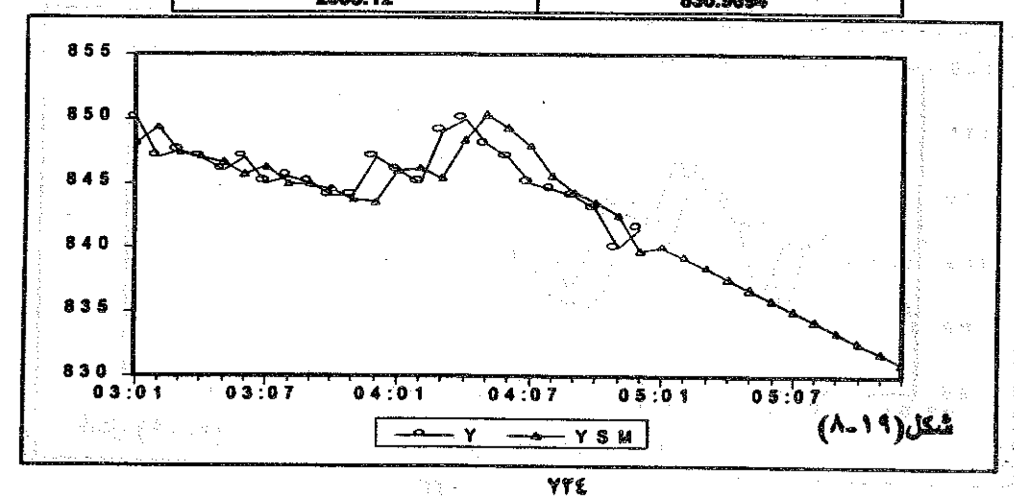
month	XSM
2003:01	106.4167
2003:02	101.4374
2003:03	104.2020
2003:04	104.8212
2003:05	105.7360
2003:06	106.7168
2003:07	106.1606
2003:08	101.3800
2003:09	107.2931
2003:10	109.3936
2003:11	110.6402
2003:12	111.6954
2004:01	107.2758
2004:02	107.8378
2004:03	108.7397
2004:04	103.5097
2004:05	100.7862
2004:06	103.2801
2004:07	104.6147
2004:08	108.0177
2004:09	110.3319
2004:10	111.6263
2004:11	113.4683
2004:12	115.4329
2005:01	116.6490
2005:02	116.6490
2005:03	116.6490
2005:04	116.6490
2005:05	116.6490
2005:06	116.6490
2005:07	116.6490
2005:08	116.6490
2005:09	116.6490
2005:10	116.6490
2005:11	116.6490
2005:12	116.6490



شكل (١٩-٧)

جدول (١٩-٨) -القيم الممهدة والمتوقعة للمتغير Y باستخدام التمهيد الأسي المزدوج

month	YSM
2003:01	848.1346
2003:02	849.3365
2003:03	847.3789
2003:04	847.0558
2003:05	846.6069
2003:06	845.6922
2003:07	846.2588
2003:08	844.9244
2003:09	844.8932
2003:10	844.5724
2003:11	843.7076
2003:12	843.4607
2004:01	845.9524
2004:02	846.1596
2004:03	845.3754
2004:04	848.3537
2004:05	850.3153
2004:06	849.2788
2004:07	847.8757
2004:08	845.5878
2004:09	844.2874
2004:10	843.4633
2004:11	842.4443
2004:12	839.7056
2005:01	840.0576
2005:02	839.2314
2005:03	838.4052
2005:04	837.5790
2005:05	836.7528
2005:06	835.9266
2005:07	835.1004
2005:08	834.2742
2005:09	833.4480
2005:10	832.6218
2005:11	831.7956
2005:12	830.9694



شكل(١٩-٨)

(١٩-٣-٢) منهجية بوكس-جينكنز :

إذا كانت بيانات السلسلة الزمنية ساكنة يمكن أن نصفها بواحد من النماذج التي تتبع منهجية بوكس - جينكنز. وبالطبع إذا كانت غير ساكنة يتعين إجراء التعديلات اللازمة عليها حتى تصبح ساكنة ، ثم نستخدم أحد النماذج الموضحة فيما بعد في وصفها .

(١) نموذج الانحدار الذاتي Autoregressive (A R) Process :

في ظل هذا النموذج تعتمد قيمة متغير ما في الفترة الحالية ص ز (Y_t) على قيم نفس المتغير في الفترات السابقة ص ز-١ ، ص ز-٢ ، .. ($Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..$) وهكذا . ومن أحد صور هذا النموذج :

ص ز − ص̄ = أ ١ (ص ز-١ − ص̄) + ع ز .... (١٩-٣٣)

$$(Y_t - \overline{Y}) = a_1 (Y_{t-1} - \overline{Y}) + u_t$$

حيث : ص̄ = متوسط قيم ص

ونفترض هنا بالطبع أنه لا توجد مشكلة ارتباط ذاتي بين قيم ع ز . وحيث أن قيمة ص في الفترة الحالية (ص ز) تعتمد على قيمة ص في الفترة السابقة (ص ز-١) يطلق على النموذج السابق نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى .
First-Order Autoregressive A R (1) .

ويمكن إعادة كتابة النموذج السابق في الصيغة التالية :

ص ز = أ ١ ص ز-١ + ع ز ...... (١٩-٣٤)

$$y_t = a_1 y_{t-1} + u_t$$

حيث : ص ز (y_t) تشير إلى انحراف ص ز (Y_t) عن وسطها .

وبتقدير الصيغة (١٩-٣٣) يمكن التنبؤ بقيم ص على النحو التالي:

صَ̂ ز = (١ − أ̂ ١) ص̄ + أ̂ ١ ص ز-١ .... (١٩-٣٥)

$$\hat{Y}_t = (1 - \hat{\alpha}_1)\overline{Y} + \hat{\alpha}_1 Y_{t-1}$$

ويلاحظ أن من أبسط صور نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى هي الصيغة الشائعة التي يتم حساب معامل الارتباط الذاتي أو معامل الارتباط السلسلي بواسطتها :

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19-36)$$

وإذا اتضح أن النموذج المقدر : $Y_t = c + bX_t + u_t$ **يعاني من مشكلة الارتباط السلسلي من الرتبة الأولى ، فإن الطريقة التي تستخدم لتخليصه منها من خلال** Eviews **هي إضافة الصيغة** AR(1) **للمعادلة المراد تقديرها ، كأن تكتب بعد أمر** Estimate equation :

Y c X Ar(1)

عندئذ يقوم البرنامج بحساب الصيغة : $Y_t - \rho Y_{t-1} = c + b(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$

وهي تكافئ الصيغة : $Y_t = c + \rho Y_{t-1} + b(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t$

التي تستبعد الارتباط السلسلي من البيانات .

وبالنسبة لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية AR(2) **فهو يأخذ الصيغة التالية :**

(ص ز − ص̄) = أ١ (ص ز−١ − ص̄) + أ٢ (ص ز−٢ − ص̄) + ع ز (١٩−٣٧)

$$(Y_t - \bar{Y}) = a_1 (Y_{t-1} - \bar{Y}) + a_2 (Y_{t-2} - \bar{Y}) + u_t$$

وعندئذ فإن قيم ص في الفترة الحالية (ص ز) تعتمد على قيم ص في الفترتين اللتين تسبقان الفترة الحالية .

وإذا كان النموذج (١٩−٣٧) هو النموذج الملائم لوصف بيانات السلسلة الساكنة ، يمكن التنبؤ بقيم ص ز بدلالته باستخدام الصيغة التالية :

ص̂ ز = (١ − أ̂١ − أ̂٢) ص̄ + أ̂١ ص ز−١ + أ̂٢ ص ز−٢ (١٩−٣٨)

$$\hat{Y}_t = (1 - \hat{a}_1 - \hat{a}_2)\bar{Y} + \hat{a}_1 Y_{t-1} + \hat{a}_2 Y_{t-2}$$

وذلك بعد تقدير الصيغة (١٩-٣٧) لمعرفة قيم المعلمات المقدرة . وبالطبع يمكن أن يكون نموذج الانحدار الذاتي من أي رتبة ولتكن الرتبة P : $AR(P)$.

(٢) نموذج المتوسط المتحرك Moving Average (MA) Process

يأخذ هذا النموذج الصيغة التالية :

صـ ز = أ + ب ٠ ع ز + ب ١ ع ز-١ .... (١٩-٣٩)
$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$

ويلاحظ هنا أن صـ ز (Y_t) يساوى ثابت أ (μ) بالإضافة إلى متوسط متحرك لقيم الحد العشوائي في الفترة الحالية ع ز (u_t) والفترة السابقة ع ز-١ (u_{t-1}) وهذا المتوسط مرجح بأوزان ب ٠ (β_0) ، ب ١ (β_1) . ويقال في هذه الحالة أن نموذج المتوسط المتحرك من الرتبة الأولى . First - Order Moving Average M A (1) ، حيث يتضمن فجوة زمنية واحدة .

وقد يكون نموذج المتوسط المتحرك من الرتبة الثانية على النحو التالي:

صـ ز = أ + ب ٠ ع ز + ب ١ ع ز-١ + ب ٢ ع ز-٢ .... (١٩-٤٠)
$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}$

وهكذا فإن نموذج المتوسط المتحرك يكون من الرتبة q إذا كان عدد الفجوات الزمنية للحد العشوائي بالنموذج = q ، أي $MA(q)$.

وبالطبع يتم الحصول على الحد العشوائي من خلال تقدير معادلة انحدار أصلية بها متغير تابع صـ ز ($Y t$) ومتغيرات تفسيرية أخرى .

(٣) نموذج انحدار ذاتي ومتوسط متحرك

An Autoregressive and Moving Average (ARMA) process

يعتبر نموذج " ARMA " نموذج مركب لأنه ينطوي على خصائص نموذج الانحدار الذاتي ونموذج المتوسط المتحرك ، وهو عادةً ما يتصف برتبتين واحدة للانحدار الذاتي(P) وأخرى للمتوسط المتحرك (q) . أي أنه يشار إليه

ARMA (P,q) . فعلى سبيل المثال النموذج ARMA (1,1) يأخذ الصيغة التالية :

ص ز = أ + أ ١ ص ز-١ + ب ٠ ع ز + ب ١ ع ز-١ ....(١٩-٤١)
$Y_t = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$

(٤) نموذج الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المتكامل

An Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) process

إذا كانت السلسلة الزمنية الأصلية غير ساكنة Nonstationary فيقال عليها أنها غير متكاملة. وإذا كان من المتعين الحصول على فروق السلسلة عدد (d) مرة حتى تصبح ساكنة يقال عندئذ أن السلسلة الأصلية متكاملة من الدرجة d ، أي I(d) . وبالتالي فإن نموذج الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المتكامل يتصف بثلاثة رتب ، رتبة الانحدار الذاتي ورتبة التكامل ورتبة المتوسط المتحرك ، لذا فهو يكتب كما يلي: ARIMA (P, d , q) . فإذا كان النموذج ARIMA (1, 1 , 1) فهذا يعنى أنه يتعين الحصول على الفروق الأولى للسلسلة الأصلية ، ثم نجرى عليها بعد ذلك تقدير ARMA ، ذلك لأن هذا التقدير الأخير لا يجرى إلا على سلسلة ساكنة .

وتكون صيغة النموذج عندئذ :

Δ ص ز = م Δ ص ز-١ + ب ٠ ع ز + ب ١ ع ز-١ .... (١٩-٤٢)
$\Delta Y_t = \lambda \Delta Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$

وعموماً يمكن القول :

$$ARIMA (P , 0 , q) = ARMA (P , q)$$

وتكون السلسلة الأصلية ساكنة .

$$ARIMA (P , 0 , 0) = AR (P)$$
$$ARIMA (0 , 0 , q) = MA (q)$$

(١٩-٣-٣) خطوات التنبؤ وفقاً لمنهجية بوكس - جينكنز :

توجد هناك أربعة خطوات يتعين إتباعها حتى يمكن اتباع منهجية بوكس - جينكنز في التنبؤ، وهي تتمثل في : التعرف ، والتقدير ، والفحص التشخيصي ، والتنبؤ.

(١) التعرف Identification : ويقصد بالتعرف هنا تحديد الرتب P , d , q لنموذج ARIMA حتى يمكن تقديره. وتتمثل أدوات التعرف في ثلاثة :

أ - دالة الارتباط الذاتي (ACF) Autocorrolation Function وهي تشير إلى "كـ" الذي تكلمنا عنه سابقاً ($\hat{\rho}_K$) .

ب - دالة الارتباط الذاتي الجزئي

Partial Autocorrelatin Function (PACF)

حـ - شكل الارتباط بين معامل كل دالة سابقة وطول الفجوة Correlogram .

ويعتبر معامل الارتباط الذاتي الجزئي مشابه لمعامل الانحدار الجزئي الذي تكلمنا عنه سابقاً ، وهو يمثل الارتباط بين قيم متتالية لمتغير ما خلال فترتين مع ثبات الفترات الأخرى . ويرمز له " كـ ١١ " (ρ_{KK}) . فمعامل الارتباط الجزئي بين صـ ز ، صـ ز-١ يشير إلى الارتباط بين قائمتي القيم صـ ز ، صـ ز-١ مع استبعاد أثر قيم صـ الأخرى التي تقع بين الفترتين : ز ، ز - أ . ولقد تعرضنا لكيفية قياس الارتباط الجزئي سابقاً .ويتعين ملاحظة أن الحصول على معاملات الارتباط الجزئي تتطلب إدراج كل الفجوات بين صفر ، أ ، في النموذج المقدر .كما تكلمنا سابقاً عن شكل الارتباط بين معامل الارتباط الذاتي والفجوة الزمنية .

ونبدأ التعرف بشكل الارتباط الذاتي ومعامل الارتباط الذاتي (ACF) . فإذا كان شكل الارتباط يقع داخل حدود فترة الثقة ٩٥ ٪ منذ البداية ، فإن معامل الارتباط الذاتي ρ_K (ACF) لا يختلف جوهرياً عن الصفر، ومن ثم فإن هذا يعنى أن سلسلة البيانات التي لدينا ساكنة ومتكاملة من الرتبة صفر . وبالتالي نجرى تحليلاتنا على القيم الأصلية للمتغير صـ (Y) دون إجراء تحويلات عليها .

أما إذا اتضح أن شكل الارتباط الذاتي يقع خارج حدود فترة الثقة ٩٥ ٪ عبر فترة طويلة ، ومن ثم معاملات الارتباط الذاتي (ACF) تختلف عن الصفر جوهرياً لعدد كبير نسبياً من الفجوات الزمنية ، فإن سلسلة البيانات تكون غير ساكنة ويجب الحصول على الفروق الأولى منها ثم نجرى عليها نفس التحليل مرة أخرى حتى نصل إلى سلسلة ساكنة . وبعد الوصول لسلسلة ساكنة نبدأ في إجراء الخطوات التالية باستخدام بيانات هذه السلسلة .

وبتطبيق هذه الخطوة على بيانات الناتج المحلي (GDP) بالجدول (١٧-١) نحصل على الشكل (١٩-٩) . ويمكن إجراء هذا الاختبار باستخدام برنامج Eviews عن طريق view/correlogram ، مع ضرورة تحديد الفجوة التي يجري خلالها التعرف.

<table>
<tr><th>Autocorrelation</th><th>Partial Correlation</th><th>lag</th><th>AC</th><th>PAC</th><th>Q-Stat</th><th>Prob</th></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>. |*******|</td><td>1</td><td>0.969</td><td>0.969</td><td>85.462</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>.*| . |</td><td>2</td><td>0.935</td><td>-0.058</td><td>166.02</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>. | . |</td><td>3</td><td>0.901</td><td>-0.020</td><td>241.72</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*******|</td><td>. | . |</td><td>4</td><td>0.866</td><td>-0.045</td><td>312.39</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |****** |</td><td>. | . |</td><td>5</td><td>0.830</td><td>-0.024</td><td>378.10</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |****** |</td><td>.*| . |</td><td>6</td><td>0.791</td><td>-0.062</td><td>438.57</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |****** |</td><td>. | . |</td><td>7</td><td>0.752</td><td>-0.029</td><td>493.85</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>8</td><td>0.713</td><td>-0.024</td><td>544.11</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>9</td><td>0.675</td><td>0.009</td><td>589.77</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>10</td><td>0.638</td><td>-0.010</td><td>631.12</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |***** |</td><td>. | . |</td><td>11</td><td>0.601</td><td>-0.020</td><td>668.33</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>12</td><td>0.565</td><td>-0.012</td><td>701.65</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>13</td><td>0.532</td><td>0.020</td><td>731.56</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>14</td><td>0.500</td><td>-0.012</td><td>758.29</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |**** |</td><td>. | . |</td><td>15</td><td>0.468</td><td>-0.021</td><td>782.02</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>16</td><td>0.437</td><td>-0.001</td><td>803.03</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>17</td><td>0.405</td><td>-0.041</td><td>821.35</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>18</td><td>0.375</td><td>-0.005</td><td>837.24</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*** |</td><td>. | . |</td><td>19</td><td>0.344</td><td>-0.038</td><td>850.79</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |** |</td><td>. | . |</td><td>20</td><td>0.313</td><td>-0.017</td><td>862.17</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |** |</td><td>.*| . |</td><td>21</td><td>0.279</td><td>-0.066</td><td>871.39</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |** |</td><td>. | . |</td><td>22</td><td>0.246</td><td>-0.019</td><td>878.65</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |** |</td><td>. | . |</td><td>23</td><td>0.214</td><td>-0.008</td><td>884.22</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. | . |</td><td>24</td><td>0.182</td><td>-0.018</td><td>888.31</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. | . |</td><td>25</td><td>0.153</td><td>0.017</td><td>891.25</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. | . |</td><td>26</td><td>0.123</td><td>-0.024</td><td>893.19</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. | . |</td><td>27</td><td>0.095</td><td>-0.007</td><td>894.38</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. | . |</td><td>28</td><td>0.068</td><td>-0.012</td><td>894.99</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>29</td><td>0.043</td><td>-0.007</td><td>895.24</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>30</td><td>0.019</td><td>-0.005</td><td>895.29</td><td>0.00</td></tr>
</table>

شكل (١٩-٩)

ومن الواضح أن شكل الارتباط الذاتي يقع خارج فترة الثقة ٩٥ ٪ على مدى ٢٣ فجوة زمنية ، وكذلك معامل الارتباط الذاتي (AC) يتناقص ببطئ وهو كبير نسبياً خلال ٢٣ فجوة زمنية . وبالتالي فبيانات السلسلة غير ساكنة .

عندئذ نحصل على الفروق الأولى للسلسلة ثم نعيد التعرف مرة أخرى على بيانات الفروق الأولى فنحصل على الشكل (١٩-١٠) .

<table>
<tr><th>Autocorrelation</th><th>Partial Correlation</th><th></th><th>AC</th><th>PAC</th><th>Q-Stat</th><th>Prob</th></tr>
<tr><td>. |** |</td><td>. |** |</td><td>1</td><td>0.316</td><td>0.316</td><td>9.0136</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. |*. |</td><td>2</td><td>0.186</td><td>0.095</td><td>12.165</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>3</td><td>0.049</td><td>-0.038</td><td>12.389</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>4</td><td>0.051</td><td>0.033</td><td>12.631</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>5</td><td>-0.007</td><td>-0.032</td><td>12.636</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>6</td><td>-0.019</td><td>-0.020</td><td>12.672</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>.*| . |</td><td>7</td><td>-0.073</td><td>-0.062</td><td>13.188</td><td>0.06</td></tr>
<tr><td>**| . |</td><td>**| . |</td><td>8</td><td>-0.289</td><td>-0.280</td><td>21.380</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>. |*. |</td><td>9</td><td>-0.067</td><td>0.128</td><td>21.820</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. |*. |</td><td>10</td><td>0.019</td><td>0.100</td><td>21.855</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>11</td><td>0.037</td><td>-0.008</td><td>21.991</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>**| . |</td><td>**| . |</td><td>12</td><td>-0.239</td><td>-0.311</td><td>27.892</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>. | . |</td><td>13</td><td>-0.117</td><td>0.011</td><td>29.314</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>**| . |</td><td>.*| . |</td><td>14</td><td>-0.204</td><td>-0.114</td><td>33.712</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>. | . |</td><td>15</td><td>-0.128</td><td>-0.051</td><td>35.474</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>16</td><td>-0.035</td><td>-0.021</td><td>35.610</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>17</td><td>-0.056</td><td>-0.019</td><td>35.956</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. |*. |</td><td>18</td><td>0.009</td><td>0.122</td><td>35.965</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>.*| . |</td><td>19</td><td>-0.045</td><td>-0.071</td><td>36.195</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>.*| . |</td><td>20</td><td>0.066</td><td>-0.126</td><td>36.694</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>. |*. |</td><td>. |*. |</td><td>21</td><td>0.084</td><td>0.089</td><td>37.519</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>.*| . |</td><td>22</td><td>0.039</td><td>-0.060</td><td>37.696</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>.*| . |</td><td>23</td><td>-0.068</td><td>-0.121</td><td>38.259</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>24</td><td>-0.032</td><td>-0.041</td><td>38.384</td><td>0.03</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. |*. |</td><td>25</td><td>0.013</td><td>0.092</td><td>38.406</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>.*| . |</td><td>26</td><td>-0.084</td><td>-0.143</td><td>38.932</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>.*| . |</td><td>27</td><td>-0.017</td><td>-0.081</td><td>38.970</td><td>0.06</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>28</td><td>-0.038</td><td>-0.051</td><td>39.156</td><td>0.07</td></tr>
<tr><td>. | . |</td><td>. | . |</td><td>29</td><td>0.005</td><td>0.056</td><td>39.160</td><td>0.09</td></tr>
<tr><td>.*| . |</td><td>.*| . |</td><td>30</td><td>-0.100</td><td>-0.141</td><td>40.516</td><td>0.09</td></tr>
</table>

شكل (١٩-١٠)

ويتضح من معاينة الشكل (١٩-١٠) أن شكل الارتباط الذاتي يقع داخل فترة الثقة ٩٥ ٪ لمعظم الفجوات الزمنية و أن قيم معاملات الارتباط الذاتي AC لمعظم الفجوات قريبة من الصفر ، وهو ما يعني أن سلسلة الفروق الأولى مستقرة أو ساكنة .

وبالتالي فإن السلسلة الأصلية متكاملة من الرتبة الأولى (d = 1) . وبمعاينة معامل الارتباط الجزئي PACF ($\hat{\rho}_{KK}$) بسلسلة الفروق بالشكل (١٩-١٠) نجد أن هذا المعامل يقع خارج حدود فترة الثقة عند ٣ فجوات ، الفجوة ١ ، والفجوة ٨ ، والفجوة ١٢ . عندئذ يتعين علينا تجريب نموذج الانحدار الذاتي باستخدام الرتب ١ ، ٨ ، ١٢ ، AR (1) , AR (8) , AR (12) ونموذج المتوسط المتحرك باستخدام نفس الرتب (MA (1) , MA (8) , MA (12 ، ونموذج ARIMA لنفس الرتب ونختار النموذج الأكثر ملائمة لوصف البيانات باستخدام بعض المعايير التي سوف نتعرض لها .

(٢) تقدير النموذج الملائم Estimation

إذا بدأنا بنموذج الانحدار الذاتي فإن الصيغة المراد تقديرها تكون هي :

ص*ز = أ + أ ١ ص*ز-١ + أ ٨ ص*ز-٨ + أ ١٢ ص*ز-١٢ .... (١٩-٤٣)

$$Y^*_t = \alpha + \alpha_1 Y^*_{t-1} + \alpha_8 Y^*_{t-8} + \alpha_2 Y^*_{t-12}$$

حيث تشير ص* للفروق الأولى (DGDP). ويستخدم الأمر Estimate equation : D(GDP) C AR(1) AR(8) AR(12) **لتقدير (١٩-٤٣) وفقاً لبرنامج Eviews. وبالنسبة لنموذج المتوسط المتحرك تكون الصيغة المراد تقديرها هي :**

ص*ز = أ + ب ع*ز + ب ١ ع*ز-١ + ب ٨ ع*ز-٨ + ب ١٢ ع*ز-١٢ ....(١٩-٤٤)

$$Y^*_t = \alpha + \beta u^*_t + \beta_1 u^*_{t-1} + \beta_8 u^*_{t-8} + \beta_{12} u^*_{t-12}$$

ويستخدم الأمر : Estimate equation D(GDP) C MA(1) MA(8) MA(12) لتقدير الصيغة (١٩-٤٤) من خلال برنامج Eviews . أما بالنسبة للنموذج المركب ARMA فيتعين تقدير الصيغة :

ص*ز = أ + أ ١ ص*ز-١ + أ ٨ ص*ز-٨ + أ ١٢ ص*ز-١٢ + ب ع*ز + ب ١ ع*ز-١ + ب ٨ ع*ز-٨ + ب ١٢ ع*ز-١٢ .. (١٩-٤٥)

$$Y^*_t = \alpha + \alpha_1 Y^*_{t-1} + \alpha_8 Y^*_{t-8} + \alpha_{12} Y^*_{t-12} + \beta u^*_t + \beta_1 u^*_{t-1} + \beta_8 u^*_{t-8} + \beta_{12} u^*_{t-12}$$

ويستخدم الأمر Estimate equation في Eviews لتقدير الصيغة (١٩–٤٥).

D(GDP) C AR(1) AR(8) AR(12) MA(1) MA(8) MA(12)

وإذا ركزنا على نموذج الانحدار الذاتي فإننا نحصل على النتيجة التالية :

$$Y^*_t = 23.089 + 0.3428\ Y^*_{t-1} - 0.299\ Y^*_{t-4} - 0.264\ Y^*_{t-12} \quad (19\text{-}46)$$

SE = (2.977) (0.0987) (0.1016) (0.0986)

t = (7.75) (3.4695) (-2.947) (-2.6817)

$Adj.R^2 = 0.263$ DW = 1.766

S . E. Regression = 31.38

(٣) الفحص التشخيصي Diagnostic Checking

يعنى الفحص التشخيصي فحص النماذج المختلفة بعد تقديرها للتعرف على أيها أكثر ملائمة لوصف البيانات محل الاعتبار .

ويكون النموذج ملائماً إذا قمنا بالحصول على البواقي د , (e_i) باستخدام النموذج المقدر (١٩–٤٦) ثم حصلنا على معامل الارتباط الذاتي ومعامل الارتباط الجزئي وشكل الارتباط الذاتي لهذه البواقي واتضح أن جميعها يقع داخل فترة ثقة ٩٥ ٪ بما يعني أن الارتباط الذاتي بين حدود الحد العشوائي غير معنوي . وبالتالي يكون النموذج ملائماً . ولإجراء هذا الفحص على برنامج Eviews نتبع الخطوات التالية :

- يتم تقدير النموذج (١٩–٤٦) .
- View/Residual tests/correlogram-Q stat
- Lag (30)

وبعمل ذلك نحصل على الشكل (١٩–١١) .

وبفحص الشكل (١٩–١١) يتضح أن معاملات الارتباط الذاتي للبواقي تقع داخل فترة ثقة ٩٥ ٪ مما يعني أن نموذج AR ملائم لوصف هذه البيانات .

Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
.|*. |	.|*. |	1	0.102	0.102	0.8192	0.114
.|*. |	.|*. |	2	0.087	0.077	1.4151	0.282
.|. |	.|. |	3	0.051	0.035	1.6219	0.459
*|. |	*|. |	4	-0.104	-0.120	2.4963	0.627
.|. |	.|. |	5	-0.022	-0.008	2.5346	0.673
.|. |	.|. |	6	0.026	0.047	2.5919	0.583
.|. |	.|. |	7	0.009	0.016	2.5992	0.511
*|. |	*|. |	8	-0.082	-0.105	3.1735	0.483
.|*. |	.|*. |	9	0.132	0.146	4.6969	0.549
.|*. |	.|*. |	10	0.132	0.137	6.2497	0.623
.|*. |	.|*. |	11	0.118	0.087	7.5067	0.488
*|. |	*|. |	12	-0.062	-0.157	7.8561	0.256
.|. |	.|*. |	13	0.047	0.069	8.0595	0.322
*|. |	*|. |	14	-0.160	-0.129	10.479	0.168
**|. |	*|. |	15	-0.211	-0.185	14.745	0.214
.|. |	.|. |	16	-0.013	-0.012	14.761	0.269
**|. |	*|. |	17	-0.205	-0.138	18.931	0.264
.|. |	.|*. |	18	0.026	0.072	19.001	0.314
.|. |	.|. |	19	-0.002	-0.048	19.001	0.375
*|. |	*|. |	20	-0.107	-0.170	20.195	0.402
.|. |	.|*. |	21	0.036	0.073	20.331	0.424
.|. |	.|. |	22	-0.002	0.001	20.332	0.437
*|. |	*|. |	23	-0.073	-0.074	20.922	0.400
*|. |	.|. |	24	-0.076	-0.048	21.579	0.444
*|. |	.|. |	25	-0.084	0.003	22.393	0.500
*|. |	.|. |	26	-0.120	-0.018	24.077	0.516
.|. |	.|. |	27	-0.043	-0.044	24.302	0.520
.|. |	.|. |	28	0.018	0.032	24.341	0.491
.|*. |	.|. |	29	0.076	0.053	25.058	0.499
*|. |	*|. |	30	-0.084	-0.105	25.971	0.114

شكل (١٩-١١)

(٤) التنبؤ Forecasting

لعل السؤال الذي يثور الآن كيف يمكن استخدام الصيغة (١٩-٤٣) والصيغة المقدرة لها (١٩-٤٦) في التنبؤ بقيم الناتج المحلي ؟.

إن آخر بيانات متوفرة عن الناتج المحلي هي عن الربع الرابع لعام ١٩٩١ . افترض الآن أننا نريد أن نتنبأ بالناتج المحلي في الأربعة فصول لعام ١٩٩٢ . نبدأ أولاً بالربع الأول لعام ١٩٩٢ :

يمكن إعادة كتابة الصيغة (١٩-٤٣) على النحو التالي :

ص ز ٩٢-١ − ص ز ٩١-٤ = أ + أ ١ (ص ز ٩١-٤ − ص ز ٩١-٣) + أ ٨ (ص ز ٨٩-٤ − ص ز ٨٩-٣)
+ أ ١٢ (ص ز ٨٨-٤ − ص ز ٨٨-٣) .... (١٩-٤٧)

$$Y_{t92-1} - Y_{t91-4} = \alpha + \alpha_1\left(Y_{t91-4} - Y_{t91-3}\right) + \alpha_8\left(Y_{t89-4} - Y_{t89-3}\right) + \alpha_{12}\left(Y_{t88-4} - Y_{t88-3}\right)$$

ويوضح الجدول (١٩-٩) أرقام الفجوات ورموزها ، مع العلم أن ز ٩١-٤ تعني الربع الرابع عام ١٩٩١ (الشرطة لا تعبر عن الإشارة ناقص هنا) .

جدول (١٩-٩)

أرقام الفجوات للخلف

الفجوة	رمزها	الفجوة	رمزها	الفجوة	رمزها	الفجوة	رمزها
٠	ز ٩١-٤	٤	ز ٩٠-٤	٨	ز ٨٩-٤	١٢	ز ٨٨-٤
١	ز ٩١-٣	٥	ز ٩٠-٣	٩	ز ٨٩-٣	١٣	ز ٨٨-٣
٢	ز ٩١-٢	٦	ز ٩٠-٢	١٠	ز ٨٩-٢		
٣	ز ٩١-١	٧	ز ٩٠-١	١١	ز ٨٩-١		

وللحصول على ص ز ٩٢-١ من الصيغة (١٨-٤٤) نجد أن :

ص ز ٩٢-١ = أ + (١ + أ ١) ص ز ٩١-٤ − أ ١ ص ز ٩١-٣ + أ ٨ ص ز ٨٩-٤
− أ ٨ ص ز ٨٩-٣ + أ ١٢ ص ز ٨٨-٤ − أ ١٢ ص ز ٨٨-٣ .. (١٩-٤٨)

$$Y_{t92-1} = \alpha + \left(1 + \alpha_1\right)Y_{t91-4} - \alpha_1 Y_{t91-3} + \alpha_8 Y_{t89-4} - \alpha_8 Y_{t89-3} + \alpha_{12} Y_{t88-4} - \alpha_{12} Y_{t88-3}$$

وبالتعويض من الجدول (١٩-١) عن قيم ص ، ومن المعادلة (١٩-٤٦) عن المعاملات المقدرة نحصل على :

ص ز ٩٢-١ = ٢٣,٠٩ + (١ + ٠,٣٤٢٨) (٤٨٦٨) − ٠,٣٤٢٨ (٤٨٦٣,٧)
− ٠,٢٩٩ (٤٨٥٩,٧) + ٠,٢٩٩ (٤٨٤٥,٦) − ٠,٢٦٤ (٤٧٧٩,٧)
+ ٠,٢٦٤ (٤٧٣٤,٥) = ٤٨٧٦,٧ تقريباً .

ويمكن التنبؤ بباقي القيم بنفس الطريقة . ولكن الطريقة الأكثر دقة في التنبؤ هي باستخدام برنامج Eviews بتتبع الخطوات التالية :

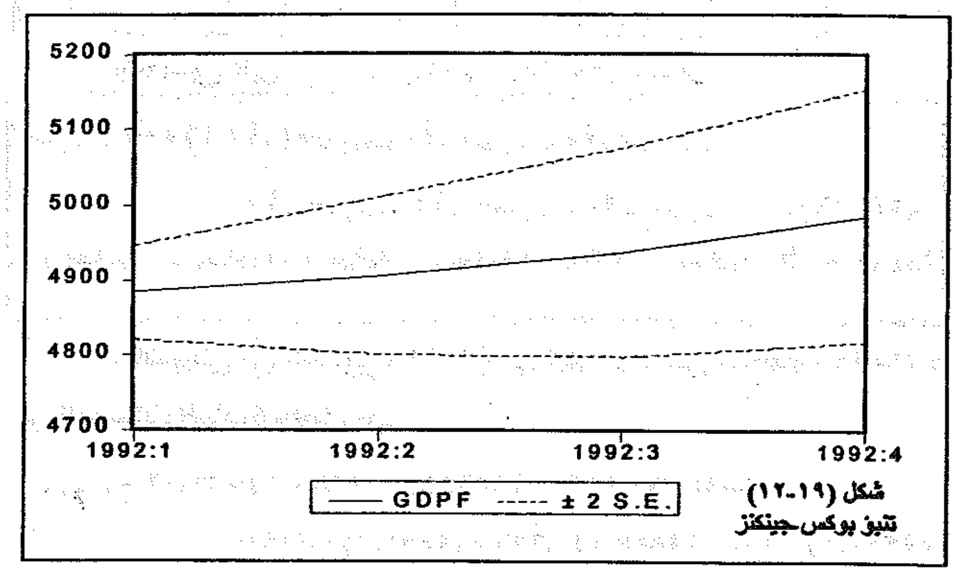
- نقوم بتوسيع مدى العينة للفترة المراد التنبؤ فيها ، وذلك عن طريق :
  Proc/change workfile range , 1970:1-1992:4
- نقوم بتقدير الصيغة (١٩-٤٦) باستخدام البيانات الفعلية ، ثم نختار الأمر : Forecast ، ونحدد المدى الذي يتم فيه التنبؤ 1992:4 – 1992:1 .

ويوضح الجدول (١٩-١٠) والشكل (٩-١٢) القيم المتوقعة .

جدول (١٩-١٠)

القيم المتوقعة للناتج المحلي للولايات المتحدة بطريقة بوكس – جينكنز

الربع	قيمة الناتج المحلي المتوقعة بالمليار دولار
١٩٩٢-١	٤٨٨٣,٧٣٤
١٩٩٢-٢	٤٩٠٥,٥٠٧
١٩٩٢-٣	٤٩٣٦,٧٧٥
١٩٩٢-٤	٤٩٨٦,٣٩٣



شكل (١٩-١٢)
تنبؤ بوكس-جينكنز

ومهما يكن من أمر فإن طريقة بوكس – جينكنز في التنبؤ هي فن يعتمد على الممارسة أكثر منها علم يعتمد على قواعد ثابتة .

(١٩-٣-٤) نماذج الانحدار الذاتي ذات المتجه (VAR)

يستخدم هذا الأسلوب في التنبؤ في حالة النماذج الآنية التي يوجد في ظلها علاقات تبادلية بين المتغيرات . ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة في التنبؤ دعنا نأخذ النموذج التالي:

ص ز = أ + ∑ (ر=١ إلى ٢) ب ر ص ز-ر + ∑ (ر=١ إلى ٢) جـ ر س ز-ر + ع ١ز

س ز = ك + ∑ (ر=١ إلى ٢) ف ر س ز-ر + ∑ (ر=١ إلى ٢) ق ر ص ز-ر + ع ٢ز ... (١٩-٤٨)

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{2} \beta_j Y_{t-j} + \sum_{j=1}^{2} C_j X_{t-j} + u_{1t}$$

$$X_t = K + \sum_{j=1}^{2} d_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{2} f_j Y_{t-j} + u_{2t}$$

حيث ص (Y) = المبيعات ، س (X) = الإنفاق الإعلاني . ويوضح النموذج (١٩-٤٨) أن هناك علاقة تبادلية بين المبيعات والإنفاق الإعلاني ، وإذا قمنا بتقدير هذا النموذج باستخدام عينة ما فإن التنبؤ بقيم ص ز ، س ز خلال فترة معينة يتطلب توفر بيانات عن كلٍ من ص ز ، س ز عبر الفترتين السابقتين . ويقوم هذا النوع من النماذج على فكرة السببية لجرانجر التي تعرضنا لها من قبل ، غير أن النموذج السابق يطلق عليه نموذج VAR التقليدي ، والنموذج الذي تعرضنا له في الفصل الثامن عشر يسمى نموذج VAR مع تصحيح الخطأ (Vector Error Correction Model)(VEC). ويعتبر الأخير أفضل من الأول في التنبؤ لكونه يتضمن التقلبات قصيرة الأجل بجانب التغيرات طويلة الأجل ، في حين يتضمن الأول التغيرات في الأجل الطويل فقط. ويلاحظ أن النموذج VEC لا

يستخدم إلا إذا كانت المتغيرات المدرجة في النموذج تتصف بخاصية التكامل المشترك . أما نموذج VAR التقليدي فهو يصلح للاستخدام حتى في حالة وجود ارتباط بين البواقي لمعادلات النموذج ، ويتم تقدير كل معادلة منه على حدة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . وتعطي هذه الطريقة في هذه الحالة مقدرات تتصف بالكفاءة ، وتقترب نتائج تقديرها من نتائج طريقة GLS .

مثال (١٩-٤)

التنبؤ باستخدام طريقة VAR

افترض أن بيانات الجدول (١٩-١١) توضح قيم : Y = المبيعات ، X = الإنفاق الإعلاني .

جدول (١٩-١١)

المبيعات والإنفاق الإعلاني

Year	Y	X
1989	200	10
1990	210	11
1991	215	11
1992	220	12
1993	230	13
1994	250	15
1995	270	16
1996	280	16
1997	300	18
1998	310	19
1999	315	20
2000	330	22
2001	350	23
2002	360	25
2003	370	27
2004	400	30

والمطلوب هو :

١- تقدير نموذج VAR باستخدام الصيغة (١٩-٤٨)

٢- التنبؤ بقيم Y , X خلال الفترة (٢٠٠٥-٢٠٠٩) باستخدام النموذج المقدر.

١- تقدير نموذج VAR:

يمكن استخدام برنامج Eviews في تقدير النموذج عن طريق اختيار ؛ Quick/estimate VAR/unrestricted VAR . ثم يتم تحديد الفترة التي يتم استخدام بياناتها (١٩٨٩ -٢٠٠٤) والمتغيرات الداخلية والتي هي X ، Y ، ثم يتم تحديد مدى الفجوات الزمنية التي تدرج في النموذج . فلو أردنا الفجوتين الأولى والثانية نكتب 2 1 ، وإذا أردنا الفجوة الثانية فقط نكتب 2 2 . وباستخدام فجوتين نحصل على النتائج المعروضة بالجدول (١٩-١٢) .

جدول (١٩-١٢)

نتائج تقدير نموذج VAR

Date: 05/19/04 Time: 20:54
Sample(adjusted): 1991 2004
Included observations: 14 after adjusting endpoints
Standard errors & t-statistics in parentheses

	Y	X
Y(-1)	0.716042	-0.057045
	(0.38982)	(0.03595)
	(1.83684)	(-1.58664)
Y(-2)	-0.244792	0.032003
	(0.43482)	(0.04010)
	(-0.56298)	(0.79803)
X(-1)	3.786226	0.956254
	(3.52171)	(0.32480)
	(1.07511)	(2.94409)
X(-2)	2.538407	0.451766
	(4.75011)	(0.43810)
	(0.53439)	(1.03120)
C	53.09406	2.239036
	(30.5505)	(2.81765)
	(1.73791)	(0.79465)
R-squared	0.990074	0.991271
Adj. R-squared	0.985662	0.987391
Sum sq. resids	442.2239	3.761656
S.E. equation	7.009706	0.646500
F-statistic	224.4169	255.5060
Log likelihood	-44.03445	-10.66575
Akaike AIC	7.004922	2.237965
Schwarz SC	7.233156	2.466199
Mean dependent	300.0000	19.07143
S.D. dependent	58.53993	5.757461

ويمثل العمود الأول المعادلة الأولى من النموذج ، ويمثل العمود الثاني المعادلة الثانية .

٢- استخدام نموذج VAR في التنبؤ :

نوسع مدى العينة بالسنوات التي يراد التنبؤ فيها وهي ٢٠٠٥-٢٠٠٩ . ثم نستخدم أمر Generate equation ونكتب صيغة المعادلة الأولى وبعدها صيغة المعادلة الثانية . وسوف يقدر قيمة لكل منهما نظرا لأنه يحتاج إلى فجوتين من كل متغير ليتنبأ بقيمة واحدة . ثم نعيد الكرة حتى يتم التنبؤ بالقيم المطلوبة . ويوضح الجدول (١٩-١٣) نتائج التنبؤ .

جدول (١٩-١٣)

نتائج التنبؤ بطريقة VAR

obs	Y	X
2005	419.669	32.156
2006	445.381	35.412
2007	472.603	38.662
2008	506.379	42.512
2009	544.439	46.606

ويلاحظ أن المتغيرات التابعة في النموذج دالة في القيم السابقة لها ، وقد يحتوي النموذج في صياغات أخرى على متغيرات خارجية ، وإن كانت كل متغيراته في هذه الصياغة متغيرات داخلية. كما يلاحظ أن هذا الأسلوب في تقدير النماذج موجه أساساً للتنبؤ وليس لتفسير الظواهر .

ويمكن تقدير النموذج VEC باتباع نفس الخطوات السابقة .

المبحث الرابع
اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ

بالرغم من أن المقدرة التفسيرية للنموذج مقاسة بمعامل التحديد" ر^٢"(R^2) قد تكون مرتفعة ، وأن معلمات النموذج قد يكون لها معنوية إحصائية كبيرة ، إلا أن مقدرة النموذج على التنبؤ قد تكون محدودة . ولعل السبب في ذلك هو احتمال حدوث تغيرات مفاجئة لم تكن في الحسبان . وعلى العكس من ذلك فإن مقدرة النموذج على التنبؤ قد تكون كبيرة بالرغم من كون معامل التحديد منخفضاً وبعض المعلمات المقدرة غير معنوية إحصائياً .

ويوجد هناك بعض المعايير التي يمكن أن تستخدم في قياس مقدرة النموذج على التنبؤ ، نوجز بعضها فيما يلي :

(١) اختبار معنوية الفرق — Test of Difference Significance

(٢) معامل عدم التساوي لثيل — Theil's Inequality Coefficient

(٣) معامل جانس — Janus Coefficient

(٤) متوسط مربع الخطأ — Mean Squared Error

(٥) علاقة المقدر بالفعلي — Fitted and Actual Values

(١٩-٤-١) اختبار معنوية الفرق :

يعتمد هذا المعيار على " التنبؤ بعد التحقق " Ex-Post Forecast في اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ . ولتوضيح فكرة هذا الاختبار افترض أننا قمنا بتقدير نموذج ما من بيانات متاحة عن الفترة ١٩٨٠ – ١٩٩٥ . ثم قمنا باستخدام النموذج للتنبؤ بقيمة المتغير التابع في سنة يتاح عنها بيانات فعلية ولتكن سنة ١٩٩٦.فإذا كانت البيانات الفعلية والبيانات المتوقعة لعام ١٩٩٦ كما يلي:

ص ف = القيمة الفعلية للمتغير التابع عام ١٩٩٦ (Y_a)

س ى = القيمة الفعلية للمتغير التفسيري عام ١٩٩٦ (X_a)

صَ ق = القيمة المتوقعة للمتغير التابع لعام ١٩٩٦ بدلالة س ى . $(\hat{Y}_F)$

يمكن القول الآن أنه إذا كانت القيمة المتوقعة صَ ق تساوى القيمة الفعلية ص ى ، أو أن الفرق بينهما غير جوهري ، فإن مقدرة النموذج على التنبؤ تكون عالية . أما إذا كان الفرق بين صَ ق ، ص ى جوهرياً فإن هذا يشير لضعف مقدرة النموذج على التنبؤ . ومن ثم فإننا نكون في حاجة لاختبار :

ف. : ص ق = صَ ى فرض العدم $(\hat{Y}_F = Y_a)$

في مواجهة :

ف١ : ص ق ≠ صَ ى فرض البديل $(\hat{Y}_F \neq Y_a)$

ويمكن استخدام معيار "ت" في هذه الحالة لإجراء هذا الاختبار حيث :

ت* = (ص ى − صَ ق) / ع صَق .... (١٩–٤٩)

$$t^* = (Y_a - \hat{Y}_F) / S_{\hat{Y}F}$$

ع صَق = $\sqrt{}$ ع٢د [١ + (١/ن) + $\frac{(\text{س ى} - \bar{\text{س}})^2}{\sum \text{س}^2}$]

$$S_{\hat{Y}F} = \sqrt{S^2_{ei}\left[1 + \frac{1}{n} \quad \frac{(Xa - \bar{X})^2}{\sum x^2}\right]}$$

وبالبحث عن ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٢٥ ودرجات حرية (ن–٢) يمكن تحديد مدى معنوية الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة المتوقعة للمتغير التابع وذلك بمقارنة ت* المحسوبة ، ت الجدولية :

(١) فإذا كانت ت* < ت فإن الفرق بين القيمة المتوقعة والقيمة الفعلية يكون غير جوهري ، ومن ثم يمكن الحكم على مقدرة النموذج على التنبؤ بأنها جيدة .

(٢) أما إذا كانت ت* > ت فإن الفرق بين القيمة المتوقعة والقيمة الفعلية للمتغير التابع يكون جوهرياً . ومن ثم فإن مقدرة النموذج على التنبؤ تكون ضعيفة .

وفي حالة الاحتمال الثاني يتعين تكبير حجم العينة مع تحديث البيانات ، أو إضافة متغيرات تفسيرية جديدة ، أو إضافة معادلات جديدة للنموذج، وذلك لزيادة مقدرة النموذج على التبؤ .

ويلاحظ أن من أهم الانتقادات التي توجه لهذا المعيار هي أنه يعتمد على قيمة واحدة من القيم المتوقعة للحكم على مقدرة النموذج على التنبؤ .

(١٩–٤–٢) معامل عدم التساوي لثيل :

إذا افترضنا أن :

ع = التغير في القيمة المتوقعة للمتغير التابع (d_F)

ف = التغير الفعلي في قيمة المتغير التابع (d_a)

ى = معامل ثيل = $\sqrt{\frac{\sum (ع_ر - ف_ر)^2}{\sum ف_ر^2}}$ .... (١٩–٥٠)

$$T = \sqrt{\frac{\Sigma(d_F - d_a)^2}{\Sigma d_a^2}}$$

ويلاحظ من المعادلة (١٩–٥٠) ما يلي:

(أ) إذا كان التغير المتوقع ($ع_ر$) = التغير الفعلي ($ف_ر$) فإن ى = صفر وهذا يشير إلى مقدرة النموذج الكبيرة على التنبؤ .

(ب) إذا كان التغير المتوقع $ع_ر$ = صفر ، فإن ى = ١ وهذا يشير للحالة التي يتم التوقع فيها بأن المتغير التابع سوف يكون ثابتاً عبر الزمن . أي أن : $\hat{ص}_ر$ = أ

(جـ) كلما زادت قيمة "ى " عن الواحد كلما دل ذلك على انخفاض مقدرة النموذج على التنبؤ .

مثال (١٩–٥)

استخدام معامل ثيل

افترض أن البيانات التالية خاصة بدالة الواردات لمجتمع ما خلال فترة ١١ سنة ١٩٨٦ – ١٩٩٦ .

جدول (١٩–١٤)

بيانات عن التغيرات الفعلية والمتوقعة للواردات

فترة التنبؤ	القيمة الفعلية $ص_ر$	القيمة المتوقعة $\hat{ص}_ر$	التغير الفعلي $ف_ر = \Delta ص$	التغير المتوقع $ع_ر = \Delta \hat{ص}$	$(ع_ر - ف_ر)^2$	$ف_ر^2$
١٩٨٦	١٠٠	٩٥	–	–	–	–
١٩٨٧	١١٠	١٠٠	+١٠	+٥	٢٥	١٠٠
١٩٨٨	١١٢	١٠٢	+٢	+٢	صفر	٤
١٩٨٩	١٠٥	٩٨	–٧	–٤	٩	٤٩
١٩٩٠	١٠٩	٩٨	+٤	صفر	١٦	١٦
١٩٩١	١٠٦	٩٩	–٣	+١	١٦	٩
١٩٩٢	١١٢	١٠٣	+٦	+٤	٤	٣٦
١٩٩٣	١١٦	١١٠	+٤	+٧	٩	١٦
١٩٩٤	١١٢	١٠٨	–٤	–٢	٤	١٦
١٩٩٥	١١١	١٠٦	–١	–٢	١	١
١٩٩٦	١١٤	١٠٨	+٣	+٢	١	٩
					$\sum (ع-ف)^2$ = ٨٥	$\sum ف_ر^2$ = ٢٥٦

وبحساب معامل ثيل من بيانات جدول (١٩–١٤) نجد أن :

$$ى = \sqrt{٨٥ \div ٢٥٦} = \sqrt{٠,٣٣} = ٠,٥٨$$

وحيث ى < ١ فإننا يمكن القول أن مقدرة النموذج على التنبؤ جيدة .

(١٩-٤-٣) معامل جانس :

يمكن صياغة معامل جانس كما يلي :

$$ج = \sqrt{\frac{\sum_{ر=ن+1}^{م} (ع_ر - ف_ر)^2 / م}{\sum_{ر=1}^{ن} (ع_ر - ف_ر)^2 / ن}} \quad .... (١٩-٥١)$$

$$G = \sqrt{\frac{\sum_{n+1}^{m} (d_{fi} - d_{ai})^2 \; m}{\sum_{i=1}^{n} (d_{fi} - d_{ai})^2 \; n}}$$

حيث أن المقام يشير إلى الفروق المحسوبة من بيانات العينة التي تم تقدير النموذج على أساسها ، وذلك بافتراض أن حجم العينة = ن مشاهدة . أما البسط فهو يشير إلى الفروق المحسوبة من بيانات تخص الفترة التي تلي فترة العينة ، وهي يفترض أن طولها " م " m سنة وتسمى فترة التنبؤ .

ويلاحظ أن هذا المعامل يقيس مقدرة النموذج على التنبؤ خلال فترة العينة وخلال فترة ما بعد العينة ، وتتراوح قيمته بين الصفر ، ومالا نهاية . وكلما زادت قيمة هذا المعامل كلما دل ذلك على ضعف مقدرة النموذج على التنبؤ . وعندما ج = ١ فإن هذا يعنى أن مقدرة النموذج على التنبؤ في الماضي تتساوى معها في المستقبل .

(١٧-٤-٤) متوسط مربع الخطأ (م ع خ) Mean Squared Error

افترض أن الصيغة التالية استخدمت في تقدير العلاقة بين ص ، س خلال جزء من فترة العينة :

$$ص_ز = \hat{أ} + \hat{ب}\, س_ز + ى_ز \qquad Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, X_t + u_t$$

عندئذ نستخدم هذه الصيغة في الحصول على تنبؤات محققة خارج العينة بحيث:

$ص_ر$ = القيمة الفعلية للمتغير التابع في الفترة خارج العينة (Y_a)

ص ق = القيمة المتوقعة للمتغير التابع خلال الفترة خارج العينة (Y_f)

ثم نحسب :

$$\text{م ع غ} = \frac{\sum(\text{ص ق} - \text{ص ت})^2}{\text{ن - ك}} \quad \text{.......... (١٩-٥٢)}$$

$$MSE = \frac{\sum\left(Y_f - Y_a\right)^2}{n-k}$$

حيث : ن(n) = عدد المشاهدات في فترة خارج العينة

ك(k) = عدد المعلمات المقدرة في نموذج التنبؤ

وبحساب الصيغة (١٩-٥٢) لعدد من النماذج يكون النموذج الأفضل في التنبؤ هو صاحب أقل متوسط لمربعات الخطأ .

ويمكن استخدام برنامج Eviews لتقييم مقدرة النموذج على التنبؤ باستخدام بعض المعايير السابقة .

مثال (١٩-٦)

تقييم مقدرة النموذج على ا لتنبؤ

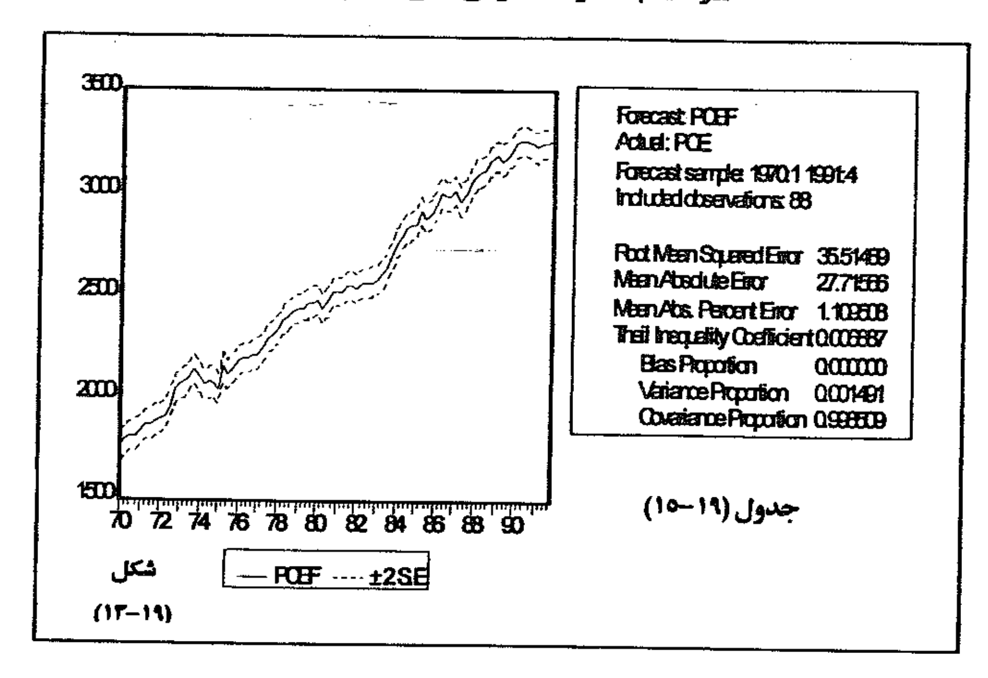
استخدم بيانات الجدول (١٧-١) في تقدير العلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي الشخصي PCE كمتغير تابع ، الدخل المتاح الشخصي PDI كمتغير مستقل باستخدام معادلة انحدار خطي بسيط، ثم اختبر مقدرة النموذج المقدر على التنبؤ .

يمكن إجراء هذا الاختبار باتباع الخطوات التالية :

- Quick/estimate equation
- Forecast
- Forecast evaluation خلال فترة التقدير .

وباتباع الخطوات السابقة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (١٩-١٥) والشكل (١٩-١٣) .

معايير تقييم مقدرة النموذج على التنبؤ



شكل (١٩-١٣)

جدول (١٩-١٥)

ومن الواضح أن معامل ثيل قريب من الصفر ، وهو ما يشير إلى قدرة عالية على التنبؤ للنموذج ، كما يحتوي الجدول على معايير أخرى منها جذر MSE.

(١٩-٤-٥) علاقة المقدر بالفعلي :

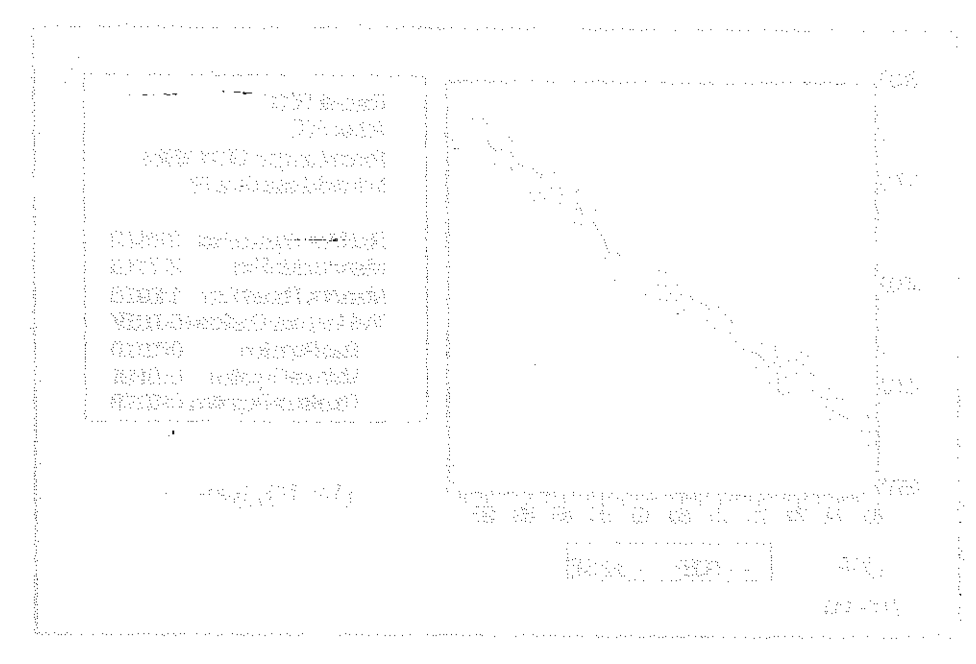
وفقا لهذا المعيار نقوم بتقدير الصيغة (١٩-٥٣) باستخدام بيانات خارج العينة :

ص ى = أ + ب ص ق + ع .... (١٩-٥٣)

$$Y_a = \alpha + \beta Y_f + u$$

فإذا كان التنبؤ تام في دقته فإنه من المتوقع أن يكون :

أ(α) = صفر ، ب(β) = ١ . ولذا فإننا نختبر هذين الفرضين باستخدام إحصائية " ت" (t) ، وإذا قبلنا فرض العدم تكون مقدرة النموذج على التنبؤ عالية ، وإذا رفضناه تكون مقدرته على التنبؤ منخفضة .



الجزء الرابع

الاقتصاد القياسي التطبيقي

Applied Econometrics

الفصل العشرون

نموذج تسعير الأصول المالية

Capital Asset Pricing Model
(C A P M)

يعتبر هذا النموذج أحد الأمثلة للتطبيقات على الانحدار البسيط . وهو يتعرض لقياس العلاقة بين درجة تنويع المحفظة المالية والمخاطرة ، والعلاقة بين معدل العائد والمخاطرة ، والعلاقة بين مخاطرة أصل ما ومخاطرة السوق ككل . وسوف يتم تناول هذه النقاط في ثلاثة مباحث :

المبحث الأول : العلاقة بين درجة التنويع والمخاطرة .

المبحث الثاني : العلاقة بين العائد والمخاطرة .

المبحث الثالث : العلاقة بين مخاطرة الأصل ومخاطرة السوق .

المبحث الأول

العلاقة بين درجة التنويع والمخاطرة

يقع نموذج تسعير الأصول في نطاق نظرية التمويل Finance Theory ، وهو يهدف إلى تفسير ظاهرة اختلاف عوائد الأوراق المالية المختلفة وتقلبها عبر الزمن والتنبؤ بسلوك هذه العوائد في المستقبل . ويستخدم هذا النموذج عدداً من المتغيرات التي يمكن الإشارة إليها فيما يلي :

(٢٠-١-١) معدل العائد على الأصل المالي (م ر) Y_i :

يعرف معدل العائد (م ر) لاستثمار مالي معين خلال فترة زمنية معينة بالصيغة التالية :

$$م_ر = \frac{ث_١ + ل - ث_٠}{ث_٠} \quad \text{..........} \quad (١-٢٠)$$

$$Y_i = \frac{p_1 + d - P_0}{P_0}$$

حيث : ث ١ = السعر السوقي للأصل المالي في نهاية الفترة = P_1

ث ٠ = السعر السوقي للأصل المالي في بداية الفترة = P_0

ل = مقدار الربح الموزع على الأصل خلال الفترة = d

ويلاحظ أن عائد الأصل بهذه الطريقة يحتوي على مكونين ، العائد الجاري والعائد الرأسمالي . أما عن العائد الجاري فهو يشير إلى العائد الدوري الذي يوزع على حامل الأصل كل فترة معينة ، وهو يتمثل في (ل) . وبالنسبة للعائد الرأسمالي فهو يتمثل في الفرق بين قيمة الأصل في نهاية الفترة وقيمته في بداية الفترة (ث ١ – ث ٠) $(P_1 - P_0)$.

(٢٠-١-٢) مخاطرة الاستثمار في أصل مالي معين :

من العوامل التي تؤثر على قرار الاستثمار في الأصول المالية درجة المخاطرة ، وهي تشير إلى مدى التقلب في معدل العائد عبر الزمن . ولذا فهي تقاس بدلالة الانحراف المعياري لمعدلات العائد الخاصة بالأصل المالي المعين حيث :

$$ع_ر = \sqrt{\frac{\sum (م_ر - \bar{م})^2}{ن - 1}} \quad .... \quad (٢-٢٠)$$

$$\delta_i = \sqrt{\frac{\Sigma(r_i - \bar{r})^2}{n-1}}$$

ويلاحظ أنه كلما زاد الانحراف المعياري لمعدلات العائد كلما دل ذلك على زيادة درجة المخاطرة ، وكلما قل الانحراف المعياري كلما دل ذلك على انخفاض درجة المخاطرة . وعندما يكون الانحراف المعياري لمعدلات عائد أصل ما مساوياً للصفر فإن هذا يشير إلى أن الاستثمار في هذا الأصل يكون خالياً من المخاطرة ويسمى Risk Free Asset . ومن أبرز الأمثلة على الأصول الخالية من المخاطرة أذون الخزانة لمدة شهر ، حيث أن معدل عائدها مضمون من قبل الحكومة . ويلاحظ عموماً إذا تساوى معدل العائد بالنسبة لأصلين ماليين ، فإن المستثمر يختار أقلهما مخاطرة ، مما يشير إلى أن درجة المخاطرة تؤثر في قرار الاستثمار .

(٢٠-١-٣) علاوة المخاطرة Risk premium

حتى يقبل الأفراد أو المؤسسات على الاستثمار في أصل ذات درجة مخاطرة أعلى ، لا بد أن يحصلوا على معدل عائد أعلى . ويمكن اعتبار الفرق بين معدل العائد الفعلي لأي أصل ومعدل العائد لأصل خالٍ من المخاطرة بمثابة علاوة المخاطرة . أي أن :

$$ت_ر = م_ر - م_. \qquad M_j = r_j - r_f \quad .... \quad (٣-٢٠)$$

حيث :

ت ر = علاوة المخاطرة للاستثمار في الأصل المالي ر $= M_j$

م ر = معدل العائد من الاستثمار في الأصل ر $= r_j$

م . = معدل العائد لأصل خالٍ من المخاطرة . $= r_f$

(٢٠-١-٤) معدل العائد ودرجة المخاطرة للمحفظة المالية Portfolio:

كثيراً ما يلجأ المستثمرون لتنويع استثماراتهم لتقليل درجة المخاطرة الناجمة عن الاستثمار . وتسمى مجموعة الأصول المالية التي يحتفظ بها مستثمر ما بالمحفظة المالية. وعندئذ بدلاً من أن يفاضل المستثمر بين أصل مالي وآخر فإنه يقوم بالمفاضلة بين محفظة مالية وأخرى . ويحتاج الأمر عندئذ للكلام عن متوسط معدل العائد للمحفظة المالية ودرجة المخاطرة بالنسبة للمحفظة المالية . وفيما يتعلق بمتوسط معدل العائد المرجح لمحفظة تحتوى على أصلين ماليين نجد أن :

م = م١ و١ + م٢ و٢ $r_p = r_1\, w_1 + r_2\, w_2$ .... (٢٠-٤)

حيث :

م = متوسط معدل العائد المرجح للمحفظة المالية = r_p

م١ ، م٢ = معدل العائد للأصل الأول والأصل الثاني على التوالي = r_1 , r_2

و١ ، و٢ = الوزن النسبي للأصل الأول والأصل الثاني على التوالي = w_1, w_2 .

ويلاحظ عموماً أن :

و = الوزن النسبي = قيمة الأصل / قيمة المحفظة = w_j

ويمكن تعميم الصيغة السابقة على النحو التالي :

م = $\sum_{ر=1}^{ن}$ م ر و ر $r_p = \sum_{j=1}^{n} r_j\, w_j$ .... (٢٠-٥)

أما عن درجة المخاطرة للمحفظة ككل فهي تحسب من خلال المتوسط المرجح لتباينات الأصول المختلفة للمحفظة مع الأخذ في الاعتبار درجة الارتباط بين عوائدها ، أي أن :

ع٢ = و١٢ ع١٢ + و٢٢ ع٢٢ + ٢ و١ و٢ ع١ ع٢ ت١٢   .... (٢٠-٦)

$$\delta^2_p = w_1^2\, \delta_1^2 + w_2^2\, \delta_2^2 + 2\, w_1\, w_2\, \delta_1\, \delta_2\, p_{12}$$

حيث :

ع ۲ = تباين معدلات العائد لأصول المحفظة ككل $= \delta^2_p$

ع ۲ ۱ ، ع ۲ ۲ = تباين معدلات عائد الأصل الأول والثاني على التوالي $= \delta_1^2, \delta_2^2$

و ۱ ، و ۲ = الوزن النسبي للأصل الأول والثاني على التوالي $= w_1, w_2$

ت ۲۱ = معامل الارتباط بين معدلات عائد الأصل الأول والثاني $= p_{12}$

ويتم الحصول على درجة المخاطرة من خلال "ع" δ_p الذي يمثل $\sqrt{}$ ع ۲ . ($\sqrt{\delta^2_p}$) .

ويلاحظ وفقاً للمعادلة (۲۰-٦) أنه في حالة أن يكون الارتباط طردياً وتاماً بين معدلات العائد للأصلين (ت ۲۱ = ۱) ، فإن درجة المخاطرة تكون عند حدها الأقصى حيث تصبح قيمة ع ۲ كما يلي :

ع ۲ = و ۲ ۱ ع ۲ ۱ + و ۲ ۲ ع ۲ ۲ + ۲ و ۱ و ۲ ع ۱ ع ۲ .... (۲۰-۷)

$$\delta^2_p = w_1^2\,\delta_1^2 + w_2^2\,\delta_2^2 + 2\,w_1\,w_2\,\delta_1\,\delta_2$$

ويعني هذا أنه عندما يزداد عائد الأصل الأول بمقدار معين يزداد عائد الأصل الثاني بمقدار ثابت ، وعندما ينخفض عائد الأصل الأول بمقدار معين ينخفض عائد الأصل الثاني بمقدار ثابت ، مما يزيد من عمق التقلبات في متوسط معدل العائد للمحفظة . ويمكن القول بوجهٍ عام أنه كلما انخفض معامل الارتباط بين عائد الأصل الأول وعائد الأصل الثاني كلما انخفض التباين ع ۲ وقلت درجة المخاطرة نتيجة للتنويع . وتصل درجة المخاطرة لحدها الأدنى عندما يكون الارتباط عكسياً وتاماً (ت ۲۱ = − ۱) بين معدلي العائد ، حيث تصبح ع ۲:

ع ۲ = و ۲ ۱ ع ۲ ۱ + و ۲ ۲ ع ۲ ۲ − ۲ و ۱ و ۲ ع ۱ ع ۲ .... (۲۰-۸)

$$\delta^2_p = w_1^2\,\delta_1^2 + w_2^2\,\delta_2^2 - 2\,w_1\,w_2\,\delta_1\,\delta_2$$

وهذا يعني أن كل انخفاض في معدل عائد الأصل الأول بمقدار معين يكون مصحوباً بزيادة في معدل عائد الأصل الثاني بمقدار ثابت ، وهو ما يقلل من عمق الخسارة التي يتحملها صاحب المحفظة . وفي الحالة المتطرفة التي تكون فيها ع ۱ = ع ۲ ، و ۱ = و ۲ ($\delta_1 = \delta_2$, $w_1 = w_2$) فإن :

و٢ ١ ع٢ ١ + و٢ ٢ ع٢ ٢ = ٢ و ١ ع ١ و ٢ ع ٢ .... (٢٠-٩)

$$w_1^2 \ \delta_1^2 + w_2^2 \ \delta_2^2 = 2 \ w_1 \ \delta_1 \ w_2 \ \delta_2$$

ومن ثم فإن ع ٢ (δ^2_p) = صفر وفقاً للمعادلة (٢٠-٨) و تنعدم المخاطرة .

ويعني ما سبق أن درجة المخاطرة للمحفظة بوجهٍ عام لا تعتمد فقط على درجة المخاطرة لكل أصل مالي على حدة ، وإنما أيضاً على درجة الارتباط بين العوائد الخاصة بالأصول المختلفة داخل المحفظة .

وعموماً فإن الصيغة العامة لتباين معدلات عائد محفظة تتكون من ٣ أصول تصبح كما يلي :

ع٢ = و٢ ١ ع٢ ١ + و٢ ٢ ع٢ ٢ + و٢ ٣ ع٢ ٣ + ٢ و ١ و ٢ ع ١ ع ٢ ت ٢١

+ ٢ و ١ و ٣ ع ١ ع ٣ ت ٣١

+ ٢ و ٢ و ٣ ع ٢ ع ٣ ت ٣٢

وبالنسبة لمحفظة تتكون من " ن " أصل مالي نجد أن :

ع٢ = مج (ر=١ إلى ن) و٢ ر ع٢ ر + ٢ مج (ر=١ إلى ن) مج (ز=ر+١ إلى ن) و ر و ز ع ر ع ز ت رز .... (٢٠-١٠)

$$\delta^2_p = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \ \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1} w_i \, w_j \, \delta_i \, \delta_j \, P_{ij}$$

ويلاحظ أن عدد معاملات الارتباط = $\frac{ن(ن-١)}{٢} = \frac{n(n-1)}{2}$

حيث : ن = عدد الأصول بالمحفظة .

ويلاحظ أن الصيغة (٢٠-١٠) السابقة مشتقة من الصيغة (٢٠-١١) :

ع٢ = مج (ر ، ز=١ إلى ن) و ر و ز غ رز .... (٢٠-١١)

حيث : غ رز = تغاير ر ، ز

ويمكن أن نخلص بنتيجة عامة مؤداها أنه كلما زادت درجة تنويع المحفظة المالية ، كلما قلت درجة المخاطرة بشرط أن يقل الارتباط بين عوائد الأصول

المختلفة. ولقد أثبتت الدراسات التطبيقية أن زيادة التنوع تقلل من درجة المخاطرة . ولكن ليست العلاقة بينهما خطية ، حيث اتضح أن تأثير درجة التنوع على درجة المخاطرة يتناقص مع زيادة درجة التنوع . ويرجع هذا أساساً إلى أن هناك نوعين من المخاطرة ، مخاطرة خاصة Specific Risk ومخاطرة السوق Market Risk . أما عن المخاطرة الخاصة فهي المخاطرة التي يمكن أن تواجه شركة ما نتيجة لظروفها الخاصة مثل فساد الإدارة فيها . ومثل هذا النوع من المخاطرة لا يتكرر بالنسبة لجميع الشركات فهو إن حدث في شركة قد لا يحدث في أخرى ، ومن ثم فإن تنويع المحفظة المالية من خلال الاستثمار في أسهم عدد كبير من الشركات يقلل من درجة المخاطرة الخاصة. ويسمى هذا النوع من المخاطرة بالمخاطرة العشوائية . أما مخاطرة السوق فهي المخاطرة التي ترجع لحدوث تغيرات على مستوى الاقتصاد ككل ، وتتعرض لها جميع الشركات بنفس الدرجة مثال ذلك حدوث تغير في النظام السياسي أو حدوث انكماش اقتصادي عام . فمثل هذا النوع من المخاطرة لا يمكن تقليله بزيادة درجة التنويع لأن جميع الأسهم تتأثر به ، ولذا يسمى بالمخاطرة المنتظمة Systematic Risk، ذلك لأنه يتكرر لجميع الشركات . ومعنى ما سبق أن تأثير درجة التنوع في الاستثمار على درجة المخاطرة ليس خطياً لوجود بعض أنواع المخاطرة التي لا تتأثر بالتنويع .

مثال (٢٠-١)

قياس علاقة درجة التنوع ودرجة المخاطرة

افترض أن محللاً قام بتقدير الانحراف المعياري لمعدلات العائد الخاصة بعدد ١٥ محفظة مالية ذات أحجام مختلفة خلال فترة ١٠ شهور فوجدها على النحو الموضح بالجدول (٢٠-١) .

حيث : S = الانحراف المعياري للمحفظة والذي يمثل درجة المخاطرة .

V = درجة التنوع في المحفظة مقاسة بعدد الأوراق المالية فيها .

$V_1 = \frac{1}{V}$ (مقلوب V) .

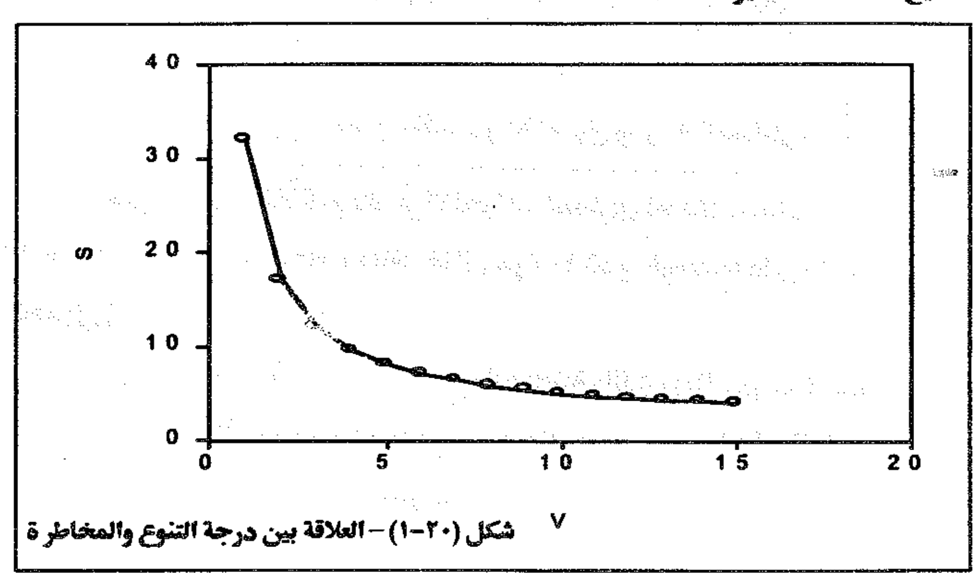
والمطلوب : تقدير العلاقة بين درجة التنوع ودرجة المخاطرة .

جدول (٢٠-١)

درجة التنوع والمخاطرة

portfolio	S	V	V_1
1	32	1	1
2	17	2	0.5
3	12	3	0.333
4	9.5	4	0.25
5	8	5	0.20
6	7	6	0.1667
7	6.4	7	0.143
8	5.75	8	0.125
9	5.4	9	0.111
10	5	10	0.10
11	4.7	11	0.09
12	4.5	12	0.0833
13	4.3	13	0.0769
14	4.2	14	0.0714
15	4	15	0.0667

برسم شكل الانتشار بين درجة المخاطرة ودرجة التنوع نجد أنها غير خطية على النحو الموضح في شكل (٢٠-١) . ومن ثم فإن صيغة التحويل لمقلوب هي إحدى الصيغ الملائمة لتقدير هذه العلاقة .



شكل (٢٠-١) – العلاقة بين درجة التنوع والمخاطرة

وتتمثل صيغة التحويل لمقلوب في :

$$S = a + \frac{b}{V} + u \qquad \text{.............. (20-12)}$$

ويلاحظ في هذه الحالة أن تفاضل درجة المخاطرة بالنسبة لدرجة التنوع تساوى:

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{b}{V^2}$$

وهو ما يعنى أن الميل سالب ومتغير ، ومن ثم فإن العلاقة بين درجة المخاطرة والتنويع علاقة عكسية وغير خطية . وحيث أن مقلوب V هو $V_1 = \frac{1}{V}$ إذن العلاقة المراد تقديرها هي :

$$S_i = \hat{a} + \hat{b} V_{1i} + e_i \qquad \text{.............. (20-13)}$$

وبتقدير هذه الصيغة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٠-٢).

جدول (٢٠-٢)

Dependent Variable: S
Method: Least Squares
Date: 05/20/04 Time: 16:41
Sample: 1 15
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.018819	0.013253	152.3335	0.0000
V1	29.97614	0.040828	734.2048	0.0000

R-squared	0.999976	Mean dependent var	8.650000
Adjusted R-squared	0.999974	S.D. dependent var	7.370622
S.E. of regression	0.037562	Akaike info criterion	-3.602096
Sum squared resid	0.018341	Schwarz criterion	-3.507689
Log likelihood	29.01572	F-statistic	539056.7
Durbin-Watson stat	2.407161	Prob(F-statistic)	0.000000

أي أن :

$$S_i = 2.02 + \frac{29.98}{V} + e_i \qquad \text{.............. (20-14)}$$

ومن هذه الصيغة نجد أن :

(أ) الحد الأدنى الذي لا تنخفض درجة المخاطرة دونه مهما زادت درجة التنوع هو ٢ وحدة انحراف معياري تقريباً .

(ب) $\frac{ds}{dv} = -\frac{29.98}{V^2}$ تمثل ميل العلاقة بين درجة المخاطرة ودرجة التنوع . فإذا كان حجم المحفظة ١٠ أوراق مالية فإن $\frac{ds}{dv} = -0.2998$ وهو ما يعنى أن زيادة حجم المحفظة بمقدار ورقة مالية عن هذا الحجم يترتب عليه انخفاض درجة المخاطرة بمقدار ٠,٣٠ وحدة انحراف معياري تقريباً .

(حـ) وفيما يتعلق بمرونة المخاطرة للتنوع فإنها تساوى :

$$\xi_{SV} = \frac{dS}{dV} \cdot \frac{V}{S} = -\frac{b}{V^2} \cdot \frac{V}{S} = -\frac{b}{VS}$$

ومن ثم فإنه عندما يكون حجم المحفظة المالية ١٠ أوراق مالية :

$$\xi_{sv} = -\frac{29.98}{10 \times 5} = -0.599$$

وهو ما يعنى أن زيادة حجم المحفظة بنسبة ١٠ ٪ يصاحبها انخفاض في درجة المخاطرة بنسبة ٦ ٪ تقريباً .

المبحث الثاني

العلاقة بين العائد والمخاطرة

(٢٠-٢-١) النموذج الاقتصادي للعلاقة بين العائد والمخاطرة :

افترض أن المحفظة المالية لمستثمر ما تحتوى على مجموعتين من الأصول . وتتمثل المجموعة الأولى في الأصول ذات العائد المتقلب وتسمى بمجموعة المخاطرة، حيث أن متوسط معدل العائد بالنسبة لها = م ر (r_a) ، وتباين معدلات العائد = ع^{2}ر (δ^2_a). أما المجموعة الثانية فتحتوى على أصل واحد خال من المخاطرة ومعدل العائد بالنسبة له م ز (r_f) ، وتباين معدل العائد = ع^{2}ز (δ^2_f) .

∴ م = (١ – و ر) م ز + و ر م ر .... (٢٠-١٥)

$$r_p = (1 - w_a) r_f + w_a r_a$$

حيث : م = المتوسط المرجح لمعدل عائد المجموعتين من الأصول (r_p) .

ع^2 = و^{2}ر ع^{2}ر + (١ – و ر)^2 ع^{2}ز + ٢ و ر (١–و ر) ع ر ع ز ت رز ....(٢٠-١٦)

$$\delta^2_p = w^2_a\ \delta^2_a + (1 - w_a)^2\ \delta^2_f + 2\, w_a (1 - w_a)\, \delta_a \delta_f\ P_{af}$$

ولكن من المعروف أن :

ع^{2}ز = تباين معدل العائد الثابت للأصل الخالي من المخاطرة (δ^2_f) = صفر

ومن هذا المنطلق فإن المعادلة (٢٠-١٦) تصبح :

ع^2 = و^{2}ر ع^{2}ر   ومن ثم : ع = و ر ع ر .... (٢٠-١٧)

$$\delta^2_p = w^2_a\ \delta^2_a \quad , \quad \delta_p = w_a\ \delta_a$$

ووفقاً للمعادلة (٢٠-١٧) نجد : و ر = $\frac{ع}{ع_ر}$ ، (١ – و ر) = ١ – $\frac{ع}{ع_ر}$

وبالتعويض في (٢٠-١٥) نحصل على :

م = (١– $\frac{ع}{ع_ر}$) م ز + $\frac{ع}{ع_ر}$ م ر

$$\text{م} = \text{م}_{\text{ز}} - \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{ر}}}\,\text{م}_{\text{ز}} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{ر}}}\,\text{م}_{\text{ر}}$$

$$\text{م} = \text{م}_{\text{ز}} + \left(\frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{ر}}}\,\text{م}_{\text{ر}} - \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{ر}}}\,\text{م}_{\text{ز}} \right)$$

$$\text{م} = \text{م}_{\text{ز}} + \left(\frac{\text{م}_{\text{ر}} - \text{م}_{\text{ز}}}{\text{ع}_{\text{ر}}} \right) \text{ع} \qquad \text{.................... (٢٠-١٨)}$$

$$r_p = r_f + \left(\frac{r_a - r_f}{\delta_a} \right) \delta_p$$

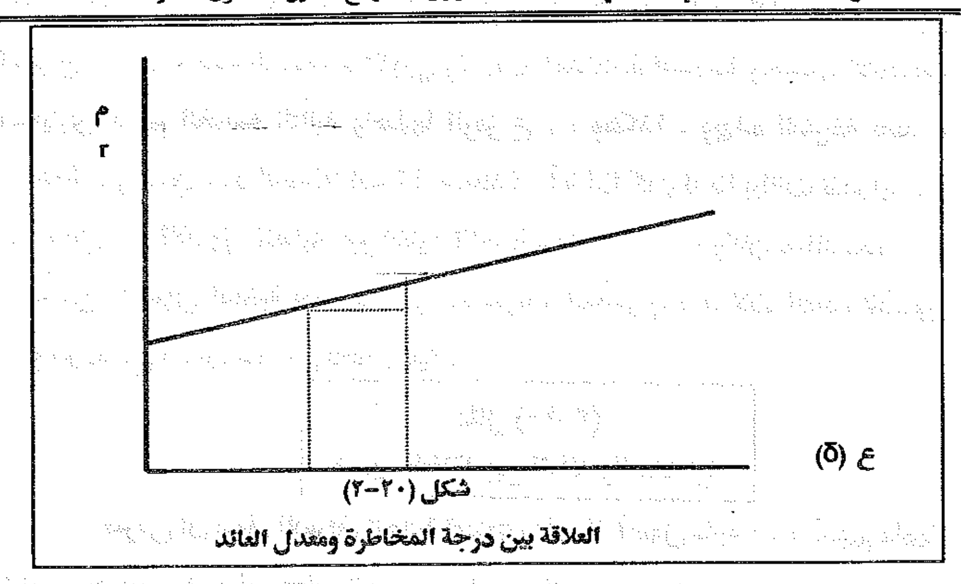
وتمثل المعادلة (٢٠-١٨) حالة انحدار خطى بسيط بين معدل العائد للمحفظة المالية (م) ودرجة المخاطرة (ع) . ويحتوى هذا الانحدار على معلمتين :

(١) المعلمة التقاطعية ($\text{م}_{\text{ز}}$) وهى تمثل معدل العائد عند انعدام درجة المخاطرة، أي عندما : ع = صفر . ويشير هذا إلى معدل العائد في حالة الأصول الخالية من المخاطرة مثل أذون الخزانة .

(٢) المعلمة الانحدارية ($\frac{\text{م}_{\text{ر}} - \text{م}_{\text{ز}}}{\text{ع}_{\text{ر}}}$) وتمثل علاوة المخاطرة كنسبة ، وتشير إلى مقدار التغير في معدل العائد (م) نتيجة لتغير درجة المخاطرة (ع) بوحدة واحدة ، حيث : $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ع}} = \frac{\text{م}_{\text{ر}} - \text{م}_{\text{ز}}}{\text{ع}_{\text{ر}}}$. ومن المتوقع أن تكون هذه المعلمة الانحدارية موجبة ، حيث كلما زادت درجة المخاطرة (ع) كلما كان من المتعين زيادة معدل العائد بمقدار يعوض هذه الزيادة في المخاطرة .

ويمكن تمثيل علاقة الانحدار الخطى البسيط تلك بالشكل (٢٠-٢) .ويمثل ميل خط الانحدار في الشكل (٢٠-٢) علاوة المخاطرة كنسبة من الانحراف المعياري لعوائد مجموعة المخاطرة . وتسمى علاوة المخاطرة بسعر المخاطرة أحياناً .

(٣) إذا كانت المحفظة المالية تحتوى على مجموعة المخاطرة دون الأصول الخالية من المخاطرة فإن م = $\text{م}_{\text{ر}}$. فوفقاً للصيغة (٢٠-١٥) : $\text{و}_{\text{ر}} = ١$ وبالتالي م = $\text{م}_{\text{ر}}$ ، ووفقاً للصيغة (٢٠-١٧) ع = $\text{ع}_{\text{ر}}$ ، وبالتالي $\text{م}_{\text{ر}}$ = م وفقاً للصيغة (٢٠-١٨) .



شكل (٢٠-٢)

العلاقة بين درجة المخاطرة ومعدل العائد

(٢٠-٢-٢) تعيين النموذج القياسي للعلاقة بين العائد والمخاطرة :

يمكن استخدام الصيغة (٢٠-١٨) في قياس العلاقة بين معدل العائد ودرجة المخاطرة على مستوى سوق الأوراق المالية ككل ، حيث تشير (م) r_t في هذه الحالة إلى المتوسط المرجح لمعدلات العائد على مستوى السوق ، وتشير (ع) δ_t إلى الانحراف المعياري لمعدلات العائد في السوق . ويأخذ النموذج القياسي عندئذ الصيغة التالية :

م = أ + ب ع + ح .... (٢٠-١٩)

$$r_t = a + b\,\delta_t + u_t$$

حيث : ب = $\frac{م_ا - م_ز}{ع_ا}$ ، ح (u_t) = الحد العشوائي ، ($b = \frac{r_a - r_f}{\delta_a}$)

ولعل السؤال الذي يثور هنا هو : كيف نقيس الانحراف المعياري (ع) δ_t كمتغير ؟ إذا كانت البيانات المتوفرة لدينا هي عن متوسط معدل العائد لكل الأصول المالية الموجودة في السوق عند كل نقطة زمنية ، يمكن قياس الانحراف المعياري لمتوسطات معدل العائد باستخدام فكرة الانحراف المعياري المتحرك . فإذا كان لدينا بيانات عن ٢٠ شهر مثلاً نقوم بحساب الانحراف المعياري للخمس قيم الأولى ثم نعطيها

الرمز ع ١ ، ثم نحذف المشاهدة الأولى ونضيف المشاهدة السادسة ونحسب الانحراف المعياري للقيم الخمسة التالية ونعطيها الرمز ع ٢ ، وهكذا . وبهذه الطريقة نفقد ٤ مشاهدات ويصبح عدد المشاهدات ١٦ مشاهدة . أما إذا كان لدينا بيانات تفصيلية عن كل أصل من الأصول المالية عبر الفترة الزمنية محل الاعتبار ، وكان هناك عدد كبير نسبياً من الأصول المالية نقوم بحساب الانحراف المعياري لمعدلات العائد للأصول الموجودة في السوق عند كل نقطة زمنية .

مثال (٢٠-٢)
تقدير العلاقة بين العائد والمخاطرة

افترض أن سوق الأوراق المالية تحتوى على ٣ أصول مالية ١ ، ٢ أسهم عادية، ٣ أذون خزانة – فترة استحقاق ٣ شهور ، وأن البيانات المتاحة ربع سنوية وتخص هذه الأصول الثلاثة خلال فترة ٥ سنوات ، مع افتراض أن كميات هذه الأوراق المالية متساوية .

جدول (٢٠-٣)

معدلات العائد والأسعار السوقية لأصول المحفظة

Quarter	R1	R2	R3	X1	X2	X3
2000.1	0.05	0.09	0.03	100	125	100
2000.2	0.07	0.08	0.03	115	116	100
2000.3	0.10	0.06	0.03	130	114	100
2000.4	0.20	0.11	0.03	160	130	100
2001.1	0.05	0.08	0.03	100	120	100
2001.2	0.10	0.11	0.03	105	125	100
2001.3	0.04	0.13	0.03	102	130	100
2001.4	0.12	0.09	0.03	108	124	100
2002.1	0.15	0.06	0.03	110	120	100
2002.2	0.18	0.10	0.03	130	115	100
2002.3	0.25	0.06	0.03	140	110	100
2002.4	0.22	0.05	0.03	150	100	100
2003.1	0.18	0.11	0.03	120	120	100
2003.2	0.25	0.08	0.04	145	120	100
2003.3	0.30	0.07	0.04	160	118	100
2003.4	0.35	0.06	0.04	180	115	100
2004.1	0.40	0.06	0.04	200	115	100
2004.2	0.30	0.12	0.04	170	130	100
2004.3	0.45	0.12	0.04	210	132	100
2004.4	0.55	0.11	0.04	230	125	100

حيث : R_1 = معدل عائد الأصل (١) ، R_2 = معدل عائد الأصل (٢)

R_3 = معدل عائد الأصل الخالي من المخاطرة

X_1 = السعر السوقي للأصل (١) ، X_2 = السعر السوقي للأصل (٢)

X_3 = السعر السوقي للأصل (٣)

والمطلوب تقدير العلاقة بين معدل العائد والمخاطرة .

ولعمل ذلك نتبع الخطوات التالية باستخدام برنامج Eviews :

(١) حساب الوزن النسبي لكل أصل مالي:

القيمة السوقية للأصول ←―――― $X = X_1 + X_2 + X_3$

ومن ثم فإن الوزن النسبي للأصل i (w_i) يتحدد كما يلي :

$w_3 = X_3 / X$ و $w_2 = X_2 / X$ و $w_1 = X_1 / X$

(٢) حساب المتوسط المرجح لمعدل العائد

$$r = (r_1 w_1) + (r_2 w_2) + (r_3 w_3)$$

(٣) حساب تباين معدلات عائد المحفظة . وطالما أن الأصل الثالث خال من المخاطرة فإن تباين معدل عائده يقترب من الصفر . وبالتالي فإن :

$$S^2_t = w^2_1 \; S^2_1 + w^2_2 \; S^2_2 + 2 \, w_1 \; w_2 \; S_1 \; S_2 \; P_{12}$$

حيث أن S^2_t هي مقدر δ^2_t للمحفظة .

(٤) حتى نحسب التباين المتحرك لخمس قيم ونحافظ على درجات الحرية دون انخفاض بدرجة كبيرة سوف نستخدم المتوسط الحسابي بدلاً من المتوسط المتحرك .

ولإجراء الحسابات نحصل على :

$$r_{d1} = r_1 - \bar{r}_1 \quad و \quad \bar{r}_1 = 0.2155$$

$$r_{d2} = r_2 - \bar{r}_2 \quad و \quad \bar{r}_2 = 0.0875$$

$$H_{12} = \sum_{i=1}^{5}\left(r^2_{d1i}\right) = r^2_{d1} + r^2_{d1(-1)} + r^2_{d1(-2)} + r^2_{d1(-3)} + r^2_{d1(-4)}$$

$$H_{22} = \sum_{i=1}^{5}\left(r^2_{d2i}\right) = r^2_{d2} + r^2_{d2(-1)} + r^2_{d2(-2)} + r^2_{d2(-3)} + r^2_{d2(-4)}$$

∴ تباين عوائد الأصل ١ = $\frac{\sum (r_1 - \bar{r})^2}{n - 1}$ = $S_{12} = H_{12} / 4$

الانحراف المعياري لعوائد ١ = $SS_1 = SQR(S_{12})$

تباين عوائد الأصل ٢ = $S_{22} = H_{22} / 4$

الانحراف المعياري لعوائد ٢ = $SS_{22} = SQR(S_{22})$

(٥) حساب معامل الارتباط :

معامل ارتباط العوائد =

$$P_{12} = \frac{\sum r_{d1} \cdot r_{d2}}{\sqrt{\sum r^2_{d1} \sum r^2_{d2}}} = \frac{\sum r_{d1} \cdot r_{d2}}{\sqrt{(H_{12})(H_{22})}}$$

$$P_{12} = [(r_{d1} \cdot r_{d2}) + (r_{d1(-1)} \cdot r_{d2(-1)}) + (r_{d1(-2)} \cdot r_{d2(-2)}) + (r_{d1(-3)} \cdot r_{d2(-3)}) + (r_{d1(-4)} \cdot r_{d2(-4)})] \; / \; SQR(H_{12} \cdot H_{22})$$

(٦) حساب مخاطرة السوق

$$S^2_t = S_{12}\, w^2_1 + S_{22}\, w^2_2 + 2\, w_1\, w_2\, SS_1\, SS_2\, P_{12}$$
$$S_t = SQR(S_t^2)$$

ويوضح الجدول (٢٠-٤) :

(أ) المتوسط المرجح لمعدل عائد المحفظة المالية ككل (R) .

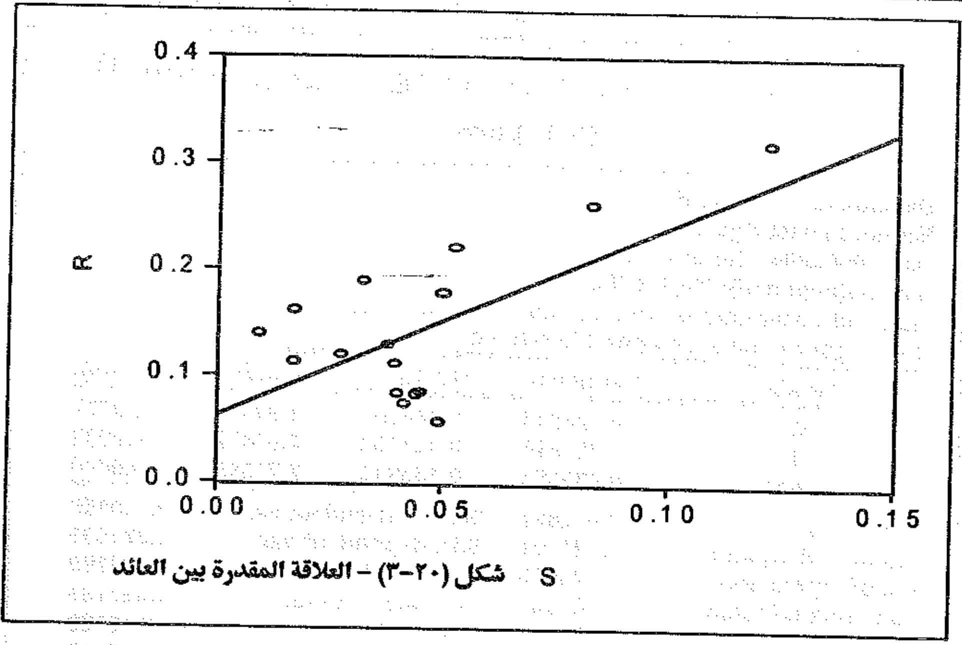
(ب) الانحراف المعياري المتحرك لخمسة فترات لعوائد المحفظة (S) .

وبرسم شكل الانتشار (٢٠-٣) الذي يمثل العلاقة بين R , S نجد أن الصيغة الخطية ملائمة لتقدير هذه العلاقة .

جدول (٢٠-٤)

المخاطرة والعائد

Quarter	S	R
2000.1	NA	0.059231
2000.2	NA	0.061420
2000.3	NA	0.066395
2000.4	NA	0.126410
2001.1	0.050125	0.055000
2001.2	0.046176	0.082576
2001.3	0.042277	0.072229
2001.4	0.040856	0.081687
2002.1	0.044982	0.080909
2002.2	0.040199	0.109855
2002.3	0.038656	0.127429
2002.4	0.028146	0.117143
2003.1	0.018070	0.111176
2003.2	0.010050	0.136575
2003.3	0.017784	0.159418
2003.4	0.032826	0.187089
2004.1	0.053613	0.219036
2004.2	0.050930	0.176500
2004.3	0.083348	0.258688
2004.4	0.123118	0.317033



شكل (٢٠-٣) – العلاقة المقدرة بين العائد

وبتقدير هذه العلاقة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٠-٥).

جدول (٢٠-٥)

Dependent Variable: R
Method: Least Squares
Date: 05/20/04 Time: 22:44
Sample(adjusted): 2001:1 2004:4
Included observations: 16 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.062344	0.028164	2.213639	0.0440
S	1.795496	0.540627	3.321137	0.0050

R-squared	0.440670	Mean dependent var	0.143271
Adjusted R-squared	0.400718	S.D. dependent var	0.072970
S.E. of regression	0.056488	Akaike info criterion	-2.793095
Sum squared resid	0.044673	Schwarz criterion	-2.696521
Log likelihood	24.34476	F-statistic	11.02995
Durbin-Watson stat	0.164070	Prob(F-statistic)	0.005046

ولكن بفحص إحصائية ديربن- واتسون نجد أنها قريبة من الصفر مما يعنى أنه يوجد هناك ارتباط ذاتي طردي قوى . وللتخلص من مشكلة الارتباط الذاتي نستخدم

الأمر (1) AR فنحصل على النتائج التالية الموضحة بالجدول (٢٠-٦).

جدول(٢٠-٦)

Dependent Variable: R
Method: Least Squares
Date: 05/20/04   Time: 22:45
Sample(adjusted): 2001:2 2004:4
Included observations: 15 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 6 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.124618	0.064601	1.929047	0.0777
S	1.651916	0.357192	4.624725	0.0006
AR(1)	0.839596	0.108813	7.715982	0.0000
R-squared	0.932887	Mean dependent var		0.149156
Adjusted R-squared	0.921701	S.D. dependent var		0.071493
S.E. of regression	0.020005	Akaike info criterion		-4.808799
Sum squared resid	0.004802	Schwarz criterion		-4.667189
Log likelihood	39.06599	F-statistic		83.40120
Durbin-Watson stat	2.310738	Prob(F-statistic)		0.000000

∴ م = ٠,١٢٥ + ١,٦٥ ع + د $R = 0.125 + 1.65\, S_t + e$

وبفحص الدالة المقدرة يتضح ما يلي :

(أ) أن متوسط معدل العائد الخالي من المخاطرة = ١٢,٥ ٪ ، وهو أعلى من معدل عائد الأصل الخالي من المخاطرة الذي يتراوح بين ٣ – ٤ ٪ . ويعني هذا أن هناك حداً أدنى لمعدلات عائد أصول المخاطرة لا تنخفض هذه المعدلات دونه وهو يمثل الجزء من هذه العوائد الخالي من المخاطرة . وبإضافته لمعدل عائد الأصل الخالي من المخاطرة يصل إلى ١٢,٥ ٪ .

(ب) العلاقة طردية وجوهرية بين متوسط العائد ودرجة المخاطرة . فكل زيادة في درجة المخاطرة بمقدار وحدة واحدة يزداد معها معدل العائد بمقدار ١,٦٥ نقطة في المتوسط .

(جـ) نسبة علاوة المخاطرة لمجموعة الأصول ذات المخاطرة من الانحراف المعياري لها = ١٦٥ ٪ .

المبحث الثالث

العلاقة بين مخاطرة الأصل ومخاطرة السوق

لتحديد ما إذا كانت علاوة مخاطرة أصل ما (j) أعلى أو أقل من علاوة مخاطرة السوق نقوم بإحلال معدل عائد هذا الأصل م ١ (r_j) وانحرافه المعياري ع ١ (δ_j) بدلاً من م ، ع (r_p , δ_p) بالمعادلة (٢٠-١٨) . ونحل ع س (δ_m) محل ع ر (δ_a) ، م س (r_m) محل م ر (r_a) حيث:

ع س = الانحراف المعياري لمحفظة السوق ككل أو لعينة الأوراق المالية محل الاعتبار (δ_m).

م س = متوسط عائد أصول السوق ككل أو العينة محل الاعتبار (r_m) ومن ثم نحصل على:

م ١ = م ز + ((م س − م ز) / ع س) ع ١ .... (٢٠-٢٠)

$$r_j = r_f + \left(\frac{r_m - r_f}{\delta_m}\right)$$

∴ م ١ − م ز = (ع ١ / ع س) (م س − م ز) .... (٢٠-٢١)

$$r_j - r_f = \frac{\delta_j}{\delta_m}(r_m - r_f)$$

حيث :

م ١ − م ز = علاوة المخاطرة للاستثمار في الأصل ١ = ($r_j - r_f$)

م س − م ز = علاوة المخاطرة بالنسبة للسوق المالي ككل = ($r_m - r_f$)

$$\beta_j = \frac{\delta_j}{\delta_m} = \frac{\text{الانحراف المعياري لعائد الأصل ١}}{\text{الانحراف المعياري لعوائد السوق}} = \frac{\text{ع ١}}{\text{ع س}}$$

وتقرر الصيغة (٢٠-٢١) أن علاوة المخاطرة للاستثمار في أصلٍ ما تمثل نسبة من علاوة المخاطرة في السوق المالي ككل ، وتتحدد هذه النسبة بالمعامل $\frac{ع_١}{ع_س}$ ($\frac{\delta_j}{\delta_m}$)

وتسمى هذه النسبة بيتا (β_j) في كتابات التمويل ، وهي تختلف من أصل لآخر .

ولتحويل النموذج الاقتصادي (٢٠-٢١) إلي نموذج قياسي نضيف المعلمة التقاطعية أ ، والحد العشوائي (ج) فنحصل على :

م ١ – م ز = أ + ب (م س – م ز) + ج .... (٢٠-٢٢)
$r_j - r_f = \alpha + \beta_j (r_m - r_f) + u$

ويلاحظ بالنسبة للصيغة (٢٠-٢٢) أن :

(١) معامل الانحدار   ب = $\frac{\text{الانحراف المعياري لعائد الأصل ١}}{\text{الانحراف المعياري لعوائد السوق}}$

= $\frac{\text{الانحراف المعياري لعلاوة مخاطرة الاستثمار في ١}}{\text{الانحراف المعياري لعلاوة مخاطرة السوق}}$

حيث أن طرح مقدار ثابت (م ز) لا يؤثر على الانحراف المعياري لجميع القيم . ومع إهمال الإشارة نجد أنه :

عندما ب < ١   يعنى أن درجة مخاطرة الاستثمار في الأصل " ١ " أقل من درجة المخاطرة في السوق بوجهٍ عام .

وعندما ب > ١   فإن هذا يعنى أن درجة مخاطرة الاستثمار في الأصل " ١ " أعلى من درجة المخاطرة السائدة في السوق بوجهٍ عام .

وعندما ب = ١   فإن هذا يعنى أن درجة مخاطرة الاستثمار في الأصل "١" هي نفس درجة المخاطرة المتوسطة في السوق ككل .

وعندما ب = صفر أو لا تختلف جوهرياً عن الصفر   فإن هذا يعنى أن الأصل " ١ " خالي من المخاطرة تقريباً .

(٢) أما فيما يتعلق بالمعلمة التقاطعية " أ " فإنها وفقاً للمفهوم الاقتصادي الموضح في المعادلة (٢٠-٢١) يجب ألا تختلف جوهرياً عن الصفر . ولذلك عند اختبار فرض العدم أ = صفر يجب أن تكون ت المحسوبة < ت الجدولية عند مستوى معنوية معين . ولكن

إذا اختلفت " أ " عن الصفر جوهرياً في بعض التقديرات وذلك عندما ت المحسوبة > ت الجدولية فإنها قد تحمل معنى معين وفقاً لبعض التفسيرات .

فإذا كانت أ > صفر فإن هذا يعني أنه حتى في الحالة التي تكون فيها علاوة المخاطرة على مستوى السوق ككل مساوية للصفر($م_{س}$ – $م_{ز}$) = صفر ، فإن علاوة المخاطرة بالنسبة للأصل" ١" تكون موجبة وهو ما يجعله أصلاً متميزاً .

أما إذا كانت أ < صفر فإن هذا يعني أنه في الحالات التي تختفي فيها علاوة المخاطرة على مستوى السوق ككل فإن معدل العائد للأصل محل الاعتبار يكون أقل من معدل العائد للأصول خالية المخاطرة ، وهو ما يجعل منه أصلاً أقل تميزاً من المستوى العادي .

(٣) وفقاً للمعادلة (٢٠-٢٢) نجد أن علاوة المخاطرة للأصل"١ " ($م_{١}$ – $م_{ز}$) تتكون من عنصرين ، علاوة مخاطرة السوق وهى أ + ب ($م_{س}$ – $م_{ز}$) ، وعلاوة المخاطرة الخاصة (ء) . ويمثل الأول العنصر المنتظم ويمثل الثاني العنصر العشوائي .

ومن هذا المنطلق فإن معامل التحديد "ر ٢ " R^2 يقيس نسبة مخاطرة السوق من المخاطرة الكلية . أما "١ – ر ٢ " ($1-R^2$)فهو يقيس نسبة المخاطرة الخاصة من المخاطرة الكلية ، وكلما كان "ر ٢ " منخفضاً ، (١ – ر ٢) مرتفعاً كلما دل ذلك على أن التنويع بإضافة مزيد من الأصول يمكن أن يقلل من درجة المخاطرة للمحفظة ككل.

(٤) إذا اختبرنا معنوية الفرض ب = ١ في مواجهة الفرض ب ≠ ١ واتضح أن : ت المحسوبة < ت الجدولية فإننا نقبل الفرض الأول ويعني هذا أن التقلبات في أسعار الأصل " ١ " لا تختلف جوهرياً عن التقلبات في أسعار السوق بوجهٍ عام . أما إذا كانت ت المحسوبة > ت الجدولية فإننا نرفض الفرض الأول ونقبل الفرض البديل ، وهو ما يعنى أن التقلبات في أسعار الأصل تختلف جوهرياً عن تقلبات أسعار السوق بوجهٍ عام .

(٥) إذا أخذنا إشارة المعلمة الانحدارية في الاعتبار ، فعندما تكون ب موجبة (أي ب > صفر) فإن هذا يعني أن هناك علاقة طردية بين العائد من الأصل والعائد من الأصول الأخرى في المتوسط . ومن ثم فإن إضافة هذا الأصل للمحفظة لا يقلل من درجة

المخاطرة بوجه عام . ويحدث هذا لأنه عندما تزداد عوائد الأصول بوجه عام يزداد عائد هذا الأصل ، وعندما تقل عوائد الأصول الأخرى بوجه عام ، يقل عائد هذا الأصل.

أما إذا كانت إشارة " ب " سالبة ، (أي ب < صفر) فإن هذا يعني أن إضافة هذا الأصل للمحفظة المالية يزيد من درجة التنوع وبالتالي يقلل من درجة المخاطرة . فعندما تنخفض عوائد الأصول الأخرى بوجه عام يزداد عائد هذا الأصل مما يقلل من درجة المخاطرة للاستثمار في المحفظة .

(٦) وفقاً للصيغة (٢٠-٢٠) نجد أن :

م ١ = م ز + ب (م س – م ز) .... (٢٠-٢٣)

$$r_j = r_f + \beta_j (r_m - r_f)$$

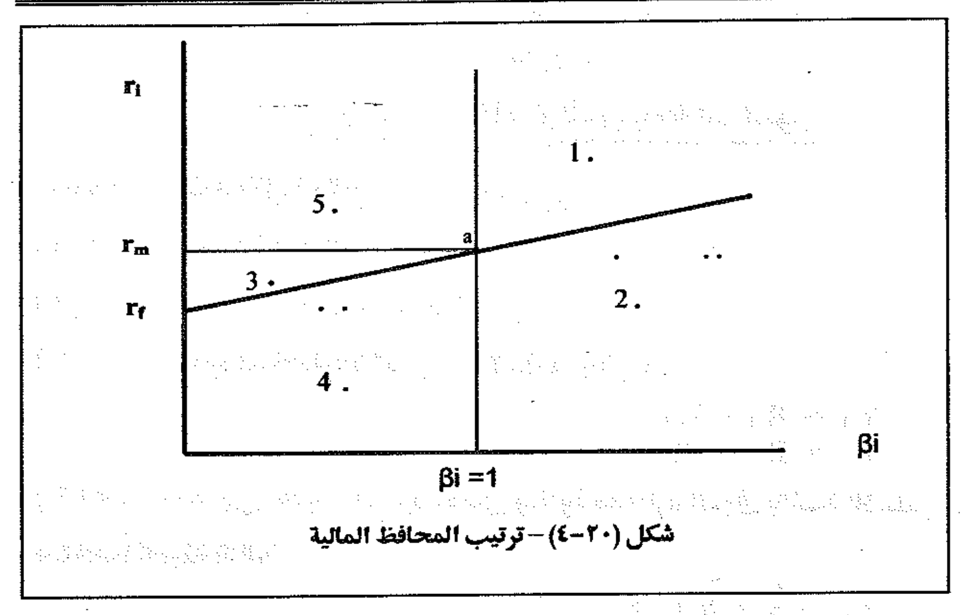
ومن الصيغة (٢٠-٢٣) نجد أن :

م ١ – ب (م س – م ز) = م ز .... (٢٠-٢٤)

$$r_j - \beta_j (r_m - r_f) = r_f$$

ويسمى الطرف الأيمن للمعادلة (٢٠-٢٤) بمعدل العائد المعدل للمخاطرة risk- adjusted rate of return وهو يمثل متوسط معدل العائد للأصل (م ١) مستبعداً منه مقابل المخاطرة أو تكلفة المخاطرة risk cost أو ما يسمى بتعديل المخاطرة risk adjustment . ويكون السوق في وضع توازن إذا تساوى معدل العائد المعدل للمخاطرة بالنسبة للأصول كلها . وإذا اتضح أن معدل العائد المعدل للمخاطرة لأصل ما > معدل العائد الخالي من المخاطرة فإن هذا يعتبر أصلاً متميزاً وتتحول الاستثمارات إليه حتى ينخفض معدل العائد المعدل للمخاطرة ليتساوى مع معدل العائد الخالي من المخاطرة .

(٧) يمكن ترتيب محافظ الأصول المختلفة وفقاً لمتوسط العائد ودرجة المخاطرة.فإذا كان لدينا عدد " ن " محفظة مالية ، ثم قمنا بحساب متوسط العائد لكل محفظة r_i ، ودرجة المخاطرة لكل محفظة β_i ، يمكن ترتيبها على النحو الموضح بالشكل (٢٠-٤).



شكل (٢٠-٤) – ترتيب المحافظ المالية

ويلاحظ أن المحفظة " a " بالشكل (٢٠-٤) تسمى بالمحفظة القياسية Index portofolio ، حيث أن درجة المخاطرة بالنسبة لها تساوى درجة مخاطرة السوق ككل ، ومتوسط معدل العائد الخاص بها يساوى متوسط معدل عائد السوق . وبفحص نقاط الانتشار الأخرى يتضح أن :

(أ) المحفظة " ١ " تتصف بكونها ذات درجة مخاطرة عالية وذات متوسط عائد أعلى من المتوسط العام .

(ب) المحفظة " ٢ " تتصف بكونها ذات درجة مخاطرة عالية وذات متوسط معدل عائد أقل من المتوسط العام مما يجعلها غير متميزة .

(جـ) المحفظة " ٣" تتصف بكونها ذات درجة مخاطرة منخفضة ومعدل عائد أقل من المتوسط .

(د) المحفظة "٤ " تتصف بكونها ذات درجة مخاطرة منخفضة ومعدل عائد أقل من مستوى معدل العائد الخالي من المخاطرة مما يجعل منها محفظة غير متميزة .

(هـ) المحفظة " ٥ " تتصف بكونها ذات درجة مخاطرة منخفضة ومعدل عائد أعلى من المتوسط مما يجعل منها محفظة متميزة .

مثال (٢٠ – ٣)

العلاقة بين مخاطرة الأصل ومخاطرة السوق

مستخدماً بيانات المثال (٢٠–٢) أجب عما يلي :

(١) احسب متوسط العائد المرجح للأصول المالية الثلاثة (R)

(٢) احسب علاوة المخاطرة للسوق (Y)

(٣) احسب علاوة المخاطرة للأصلين ١ ، ٢ ، (Y_1 ، Y_2) حيث :

$$Y_1 = R_1 - R_3$$
$$Y_2 = R_2 - R_3$$

(٤) قدر العلاقة بين علاوة مخاطرة الأصل وعلاوة مخاطرة السوق بالنسبة للأصلين١ ، ٢ مستخدماً الصيغة التالية :

$$Y_i = \hat{a} + \hat{b} Y + e_i$$

(٥) اختبر معنوية $\hat{a}$ ، $\hat{b}$ لكل من الصيغتين وفسر المعنى الاقتصادي لكل منهما .

(٦) حدد نسبة المخاطرة الخاصة ونسبة مخاطرة السوق بالنسبة للحالتين وحدد مضمونهما الاقتصادي .

بإجراء الحسابات المطلوبة للخطوات (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على الجدول (٢٠–٧) ، حيث :

المتوسط المرجح لمعدل عائد السوق (R) $R = \sum_{i=1}^{3} R_i w_i$

جدول (٢٠-٧) - معدلات العائد وعلاوات المخاطرة للأصول المختلفة

Quarter	R1	R2	R3	R	Y1	Y2	Y
2000.1	0.050000	0.090000	0.030000	0.059231	0.020000	0.060000	0.029231
2000.2	0.070000	0.080000	0.030000	0.061420	0.040000	0.050000	0.031420
2000.3	0.100000	0.060000	0.030000	0.066395	0.070000	0.030000	0.036395
2000.4	0.200000	0.110000	0.030000	0.126410	0.170000	0.080000	0.096410
2001.1	0.050000	0.080000	0.030000	0.055000	0.020000	0.050000	0.025000
2001.2	0.100000	0.110000	0.030000	0.082576	0.070000	0.080000	0.052576
2001.3	0.040000	0.130000	0.030000	0.072229	0.010000	0.100000	0.042229
2001.4	0.120000	0.090000	0.030000	0.081687	0.090000	0.060000	0.051687
2002.1	0.150000	0.060000	0.030000	0.080909	0.120000	0.030000	0.050909
2002.2	0.180000	0.100000	0.030000	0.109855	0.150000	0.070000	0.079855
2002.3	0.250000	0.060000	0.030000	0.127429	0.220000	0.030000	0.097429
2002.4	0.220000	0.050000	0.030000	0.117143	0.190000	0.020000	0.087143
2003.1	0.180000	0.110000	0.030000	0.111176	0.150000	0.080000	0.081176
2003.2	0.250000	0.080000	0.040000	0.136575	0.210000	0.040000	0.096575
2003.3	0.300000	0.070000	0.040000	0.159418	0.260000	0.030000	0.119418
2003.4	0.350000	0.060000	0.040000	0.187089	0.310000	0.020000	0.147089
2004.1	0.400000	0.060000	0.040000	0.219036	0.360000	0.020000	0.179036
2004.2	0.300000	0.120000	0.040000	0.176500	0.260000	0.080000	0.136500
2004.3	0.450000	0.120000	0.040000	0.258688	0.410000	0.080000	0.218688
2004.4	0.550000	0.110000	0.040000	0.317033	0.510000	0.070000	0.277033

وبتقدير العلاقة بين علاوة مخاطرة الأصل (١) وعلاوة مخاطرة السوق نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٠-٨) ، وذلك بعد استبعاد أثر الارتباط السلسلي الذي ظهر في التقدير باستخدام AR(1) .

جدول (٢٠-٨)

العلاقة بين علاوة المخاطرة للأصل (١) وعلاوة مخاطرة السوق

Dependent Variable: Y1
Method: Least Squares
Date: 05/21/04 Time: 16:32
Sample(adjusted): 2000:2 2004:4
Included observations: 19 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.002294	0.018807	-0.121983	0.9044
Y	1.928527	0.128717	14.98265	0.0000
AR(1)	0.523106	0.216169	2.419890	0.0278

R-squared	0.973257	Mean dependent var	0.190526
Adjusted R-squared	0.969914	S.D. dependent var	0.136686
S.E. of regression	0.023708	Akaike info criterion	-4.502033
Sum squared resid	0.008993	Schwarz criterion	-4.352911
Log likelihood	45.76931	F-statistic	291.1469
Durbin-Watson stat	1.924468	Prob(F-statistic)	0.000000

$$Y_1 = -0.002 + 1.93\ Y + e_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\text{-}23)$$
$$(0.019)\ (0.13) \qquad R^2 = 0.97 \quad DW = 2.3$$

وبفحص الصيغة (٢٠–٢٣) نجد :

(أ) أن المعلمة التقاطعية لا تختلف جوهرياً عن الصفر وهو ما يتفق مع التوقعات القبلية . ويعني هذا أنه عندما تكون علاوة مخاطرة السوق مساوية للصفر فإن علاوة مخاطرة الأصل (١) = صفر أيضاً .

(ب) المعلمة الانحدارية قيمتها المطلقة أكبر من الواحد (١,٩٣ تقريباً) ولها معنوية إحصائية ، وهو ما يعني أن درجة مخاطرة الاستثمار في الأصل (١) أكبر من درجة مخاطرة السوق ككل ، حيث أن مخاطرة الاستثمار في هذا الأصل تبلغ ضعف مخاطرة السوق ككل ١,٩ مرة تقريباً .

(حـ) المعلمة الانحدارية موجبة ، وهو ما يعني أن الارتباط بين عائد الأصل (١) وعوائد أصول السوق ككل طردياً . ومن ثم فإن إضافة هذا الأصل للمحفظة المالية لا يقلل من درجة المخاطرة بدرجة كبيرة .

(د) نسبة مخاطرة السوق = ر ٢ = ٩٧,٣ ٪ .

نسبة المخاطرة الخاصة (١ – ر ٢) = ٢,٧ ٪ .

ونظراً لانخفاض نسبة المخاطرة الخاصة فإن إمكانية تخفيض المخاطرة بالتنويع في هذه الحالة تكون منخفضة أيضاً .

وبتقدير العلاقة بين علاوة المخاطرة للأصل (٢) وعلاوة مخاطرة السوق نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٠–٩) وذلك بعد استبعاد أثر الارتباط السلسلي الذي ظهر في التقدير باستخدام AR(1) . ومن الواضح أن العلاقة المقدرة تتمثل في :

$$Y_2 = 0.052 + 0.019\ Y + e_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\text{-}24)$$
$$(0.013)\ (0.11) \qquad R^2 = 0.027 \quad DW = 1.945$$

وبفحص الصيغة (٢٠–٢٤) يتضح أن :

جدول (٢٠-٩)

العلاقة بين علاوة المخاطرة للأصل (٢) وعلاوة مخاطرة السوق

Dependent Variable: Y2
Method: Least Squares
Date: 05/21/04 Time: 16:35
Sample(adjusted): 2000:2 2004:4
Included observations: 19 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 4 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.051788	0.013279	3.899920	0.0013
Y	0.019427	0.107073	0.181440	0.8583
AR(1)	0.163874	0.248921	0.658337	0.5197

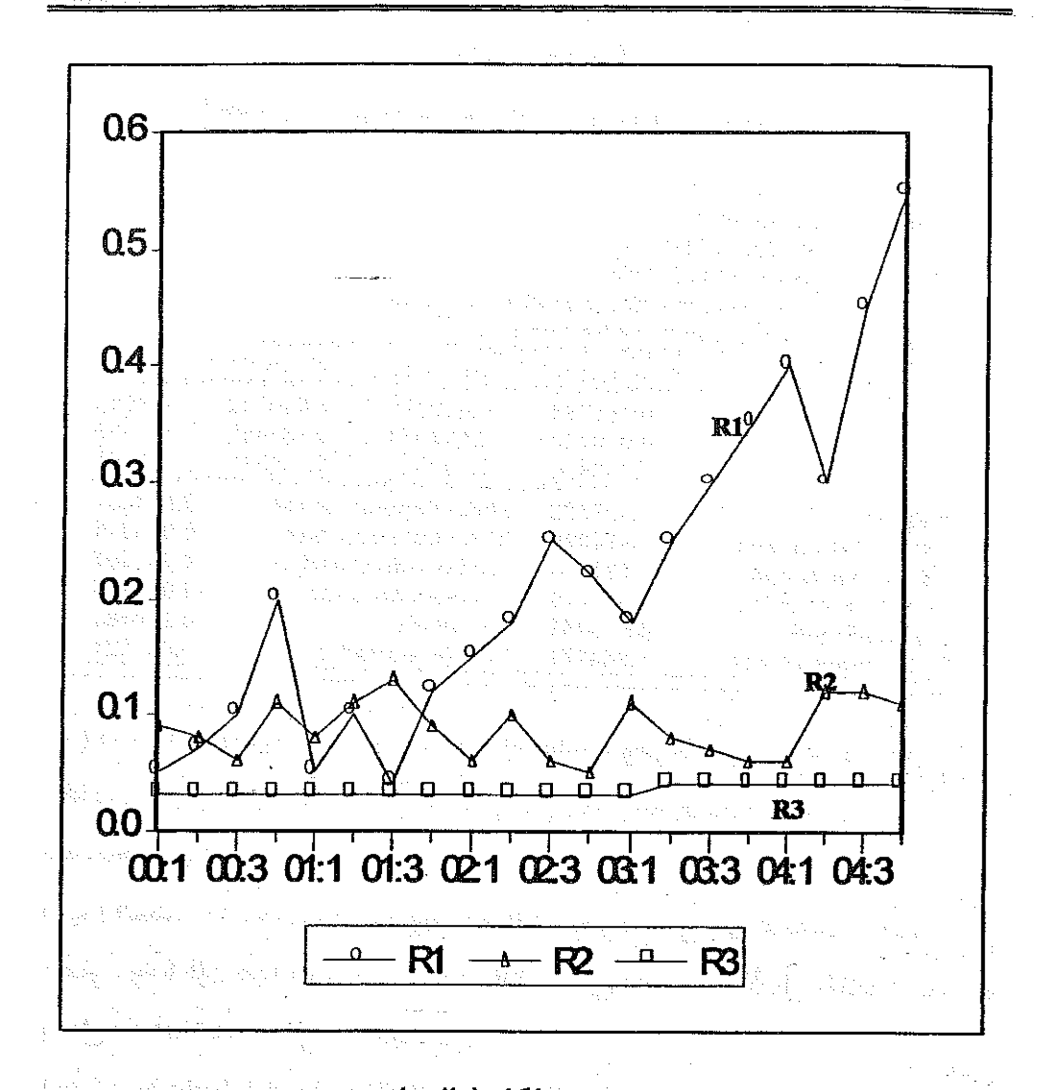
R-squared	0.026822	Mean dependent var	0.053684
Adjusted R-squared	-0.094825	S.D. dependent var	0.025865
S.E. of regression	0.027064	Akaike info criterion	-4.237307
Sum squared resid	0.011719	Schwarz criterion	-4.088185
Log likelihood	43.25441	F-statistic	0.220488
Durbin-Watson stat	1.944771	Prob(F-statistic)	0.804524

(أ) المعلمة التقاطعية موجبة ولها معنوية إحصائية ، وهو ما يعنى أنه عندما تكون علاوة مخاطرة السوق مساوية للصفر ، فإن الأصل (٢) يتمتع بعلاوة مخاطرة = ٥,٢ ٪ مما يجعل منه أصلاً متميزاً .

(ب) المعلمة الانحدارية غير معنوية إحصائياً ، وهو ما يعنى أنها لا تختلف جوهرياً عن الصفر . ولذا فإن هذا يتضمن أن معدل التقلب في عائد هذا الأصل منخفضاً جداً مما يجعل منه أصلاً شبه خالي من المخاطرة .

(جـ) نسبة مخاطرة السوق = ٢,٢٧ ٪ ، ونسبة المخاطرة الخاصة = ٩٧,٣ ٪ وهذا يعنى أن إضافة مزيد من الأصول للمحفظة يقلل من درجة المخاطرة الكلية بدرجة كبيرة .

(٦) يتضح من الشكل (٢٠-٥) أن أكثر الأصول عرضة للمخاطرة هو ١ ثم ٢ ثم ٣ .



شكل (٢٠-٥)

معدلات عوائد الأصول المالية (١) ، (٢) ، (٣)

الفصل الحادي والعشرون

منحنيات التعلم والتكاليف ووفورات الحجم

Learning Curve , Cost Function and Economies to Scale

يعتبر هذا الفصل تطبيقاً على كلٍ من الانحدار البسيط والمتعدد ، وهو يتعرض بالقياس للعلاقة بين التكاليف ، والتعلم بالممارسة ، ووفورات الحجم . ويقع هذا الفصل في مبحثين :

المبحث الأول : تعريفات وفورات الحجم ومنحنيات التعلم .

المبحث الثاني : العلاقة بين التكاليف ووفورات الحجم والتعلم .

المبحث الأول

تعريفات وفورات الحجم ومنحنيات التعلم

(٢١-١-١) وفورات الحجم :

تشير وفورات الحجم Economies to Scale إلى الحالة التي يترتب فيها على زيادة حجم الطاقة الإنتاجية انخفاض في تكلفة الوحدة . وترجع وفورات الحجم إلى عوامل كثيرة منها :

(أ) عدم القابلية للتجزئة : فعلى سبيل المثال يتطلب تشغيل مصنع صغير الحجم استخدام عربة نقل تعمل بنصف طاقتها طول الوقت ، واستخدام طاقم إدارة كامل يعمل بنصف طاقته طول الوقت ويحصل على أجوره كاملة . وبتوسيع طاقة هذا المصنع للضعف فإنه لن يحتاج لزيادة طاقم الإدارة أو أسطول النقل، الأمر الذي يترتب عليه انخفاض تكلفة الوحدة مع زيادة طاقة المشروع . وكلما كان حجم رأس المال المستثمر في المشروع كبيراً كلما كان الانخفاض في تكلفة الوحدة الناجم عن زيادة حجم الإنتاج كبيراً نظراً للانخفاض الكبير في متوسط التكلفة الثابتة الذي يصاحب زيادة الإنتاج .

(ب) العلاقات الهندسية Technical Relations : إن بناء مصنع كبير مساحته ضعف مساحة مصنع صغير لا يترتب عليها زيادة تكاليف الإنشاء للضعف رغم مضاعفة طاقة الإنتاج ، وإنما تزداد بنسبة أقل ، ويرجع ذلك لأسباب هندسية وفنية . فحجم صندوق أبعاده : ٣ × ٣ × ٣ قدم (طول × عرض × ارتفاع) = ٢٧ قدم ٣ . وحجم صندوق أبعاده: ١ × ١ × ١ قدم = ١ قدم ٣ . وهو ما يعنى أن طاقة الصندوق الكبير = ٢٧ طاقة الصندوق الصغير ، هذا في حين أن كمية الأخشاب التي يحتاجها الصندوق الكبير ٦ ألواح (٤ جوانب وسقف وقاع) ، مساحة اللوح ٩ قدم ٢ = ٩ × ٦ = ٥٤ قدم ٢ . وكمية الأخشاب التي يحتاجها بناء الصندوق الصغير ٦ ألواح مساحة اللوح ١ قدم ٢ = ٦ × ١ = ٦ قدم ٢ . فإذا كانت تكلفة قدم الخشب = ١٠ جنيه :

∴ تكاليف بناء الصندوق الكبير = ٥٤ × ١٠ = ٥٤٠ .

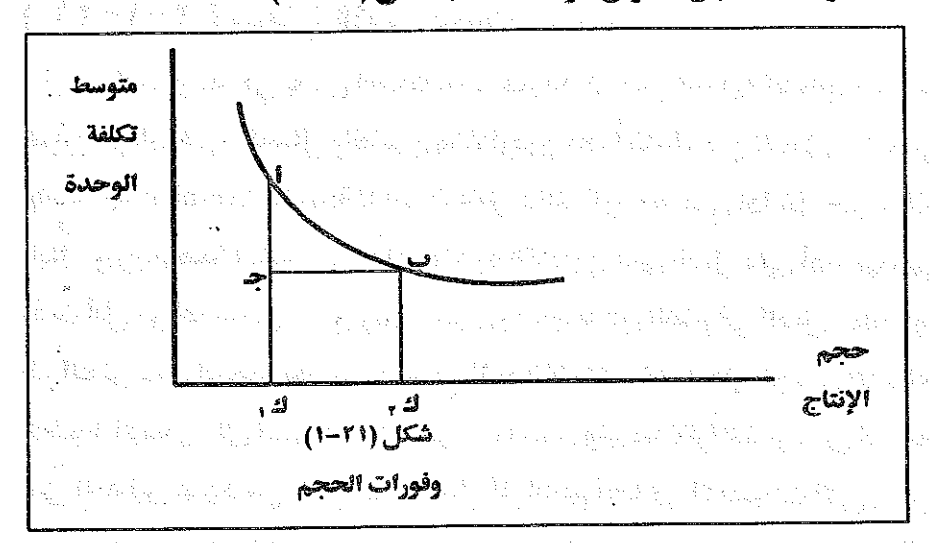
تكاليف بناء الصندوق الصغير = ٦ × ١٠ = ٦٠ .

∴ متوسط التكلفة الثابتة للقدم مكعب للصندوق الكبير = $\frac{٥٤٠}{٢٧}$ = ٢٠ جنيه.

متوسط التكلفة الثابتة للقدم مكعب للصندوق الصغير = $\frac{٦٠}{١}$ = ٦٠ جنيه.

وهذا يعني أن مضاعفة طاقة الصندوق ٢٧ مرة ترتب عليها مضاعفة التكاليف الكلية للإنشاء ٩ مرات فقط ($\frac{٥٤٠}{٦٠}$) مما ترتب عليه انخفاض تكلفة الوحدة إلى الثلث . وهذا يرجع لأسباب فنية . ويمثل الانخفاض في تكلفة الوحدة في هذه الحالة نوع من وفورات الحجم .

ويمكن التعبير عن وفورات الحجم بالتحرك من نقطة لأخرى على نفس منحنى التكلفة المتوسطة بالأجل الطويل ، وذلك كما بالشكل (٢١-١) .



شكل (٢١-١)

وفورات الحجم

فزيادة حجم الإنتاج من ك ١ إلى ك ٢ يترتب عليها انخفاض تكلفة الوحدة بالمقدار (أ حـ) وهو ما يعبر عن وفورات الحجم .

وترتبط وفورات الحجم بما يسمى غلة الحجم . فغلة الحجم Returns to Scale تشير إلى نسبة الزيادة في الإنتاج نتيجة لزيادة جميع عناصر الإنتاج بنسبة معينة . فإذا رمزنا لها بالرمز " م" M فإن :

غلة الحجم (م) = التغير النسبي في الإنتاج / التغير النسبي في عناصر الإنتاج = R

فإذا كانت م > ١ فإن غلة الحجم تكون متزايدة .

وإذا كانت م < ١ فإن غلة الحجم تكون متناقصة .

وإذا كانت م = ١ فإن غلة الحجم تكون ثابتة .

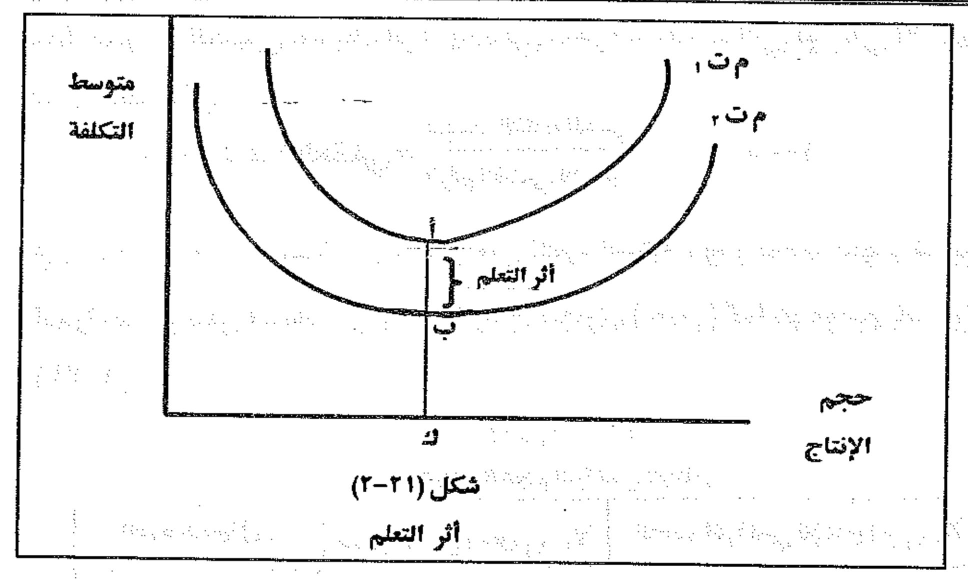
وعموماً فإن :

وفورات الحجم = غلة الحجم – ١ = م – ١ (M = R-1) ..... (٢١-١)

ومن ثم فهي من الناحية القياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر حسب حالة غلة الحجم السائدة .

(٢١-١-٢) منحنى التعلم Learning Curve

لقد لوحظ في بعض الحالات أنه مع تكرار نفس العملية الإنتاجية مع مرور الزمن تزداد خبرة العمال والفنيين والإداريين نظراً للتعلم من العمل أو الممارسة Learning by doing. ونتيجة لذلك تنخفض تكلفة الوحدة حتى إذا ظل حجم الإنتاج ثابتاً . ويرجع هذا أساساً إلى زيادة مقدرة القائمين على العمل على أداء مهامهم في وقت أقل ، وبكفاءة أعلى ، مع زيادة خبرتهم الناجمة عن التعلم في العمل . ولقد لوحظ أثر التعلم على التكلفة بوضوح أكبر في المجالات التي تعتمد على تجميع الأجزاء في خطوط الإنتاج مثل السيارات والطائرات والسفن وغيرها نظراً لتكرار نفس المهمة من قبل العاملين عديد من المرات . ويتمثل أثر التعلم أيضاً في التحسينات التي يمكن أن يدخلها الفنيون في الآلات والمعدات التي يستخدمونها نتيجة لخبراتهم المتراكمة، والوفر الذي يمكن تحقيقه من تقليل فاقد المواد . ويتمثل أثر التعلم عموماً في نقل منحنى التكلفة المتوسطة بالكامل من وضع لوضع أقل كما بالشكل (٢١-٢) .



شكل (٢١-٢)
أثر التعلم

ولا شك أن قياس أثر التعلم ووفورات الحجم على التكلفة له فوائد عديدة ، حيث يساعد الشركة على اتخاذ قرارات هامة خاصة بالاستثمار والتسعير والإنتاج .

فحتى تستفيد الشركة من وفورات الحجم لا بد من زيادة الاستثمار في الطاقة الإنتاجية وبالتالي زيادة الإنتاج ، وربما تخفيض السعر ، لما يصاحب ذلك من انخفاض في التكلفة . وقبل اتخاذ أي قرار من هذه القرارات لا بد من قياس مقدار وفورات الحجم .كما يترتب على انخفاض التكلفة إما نتيجة لأثر التعلم أو لوفورات الحجم حماية الشركة القائمة من المنافسة المحتملة من قبل شركات أخرى . ويرجع هذا لميزة انخفاض التكلفة التي لا يمكن للشركات الجديدة أن تتمتع بها قبل مرور وقت طويل . وهذا يعني أن وفورات الحجم وأثر التعلم يخدمان كمانع لدخول السوق Barriers to entry. ومن أبرز الصيغ المستخدمة في تمثيل منحنى التعلم :

ل ز = ل . ع ز^ح هـ^ئز .... (٢١-٢)

$$L_t = L_0 X_t^{\alpha} e^{u_t}$$

حيث : ل ز (L_t) = متوسط التكلفة الحقيقي للوحدة في الفترة ز . ويتم الحصول على

هذا المتوسط الحقيقي باستبعاد أثر الزيادة في أسعار المدخلات التي تؤثر هي الأخرى على التكلفة . أي أن :

متوسط التكلفة الحقيقي = (متوسط التكلفة النقدي ÷ الرقم القياسي للأسعار) × ١٠٠

ع ز (X_t) = الحجم التراكمي للإنتاج قبل الفترة الحالية ، وهو يؤخذ كمؤشر للخبرة المتراكمة . ويمكن اشتقاقه من بيانات الإنتاج الجاري (ص ز) كما هو موضح بالجدول (٢١-١) .

جدول (٢١-١)

اشتقاق الحجم التراكمي للإنتاج

الفترة الزمنية(ز)	حجم الإنتاج (ص ز) Y_t	الحجم التراكمي للإنتاج (ع ز) X_t
١	١٠٠	صفر
٢	١٥٠	١٠٠
٣	٣٠٠	٢٥٠
٤	٣٥٠	٥٥٠
٥	٤٠٠	٩٠٠

وهذا يعنى أن إنتاج الفترة الحالية لا يتضمنه الحجم التراكمي للإنتاج ، وذلك لأن ما يعبر عن الخبرة السابقة هو تراكم الإنتاج في الفترات السابقة .

حـ = مرونة تكلفة الوحدة لحجم الإنتاج التراكمي ومن المتوقع أن تكون سالبة (α).

ل. = تكلفة إنتاج الوحدة الحقيقي في فترة الأساس (L_0) .

هـ = أساس اللوغاريتم الطبيعي (e) .

ء = الحد العشوائي (u) .

ولتقدير الصيغة (٢١-٢) بطريقة المربعات الصغرى يتعين تحويلها لصيغة لوغاريتمية مزدوجة على النحو التالي:

لو ل ز = لو ل . + حـ لو ع ز + ء ز .... (٢١-٣)

$$\ln L_t = \ln L_0 + \alpha \ln X_t + u_t$$

وإذا أهملنا الحد العشوائي في الصيغة (٢١-٢) نجد أن :

ق = ل ز / ل . = ع ز حـ .... (٢١-٤)

$$d = \frac{L_t}{L_0} = X_t^{\alpha}$$

حيث : ل ز / ل . = نسبة تكلفة الوحدة في الفترة " ز " إلى تكلفة الوحدة في الفترة الأولى.
ووفقاً للصيغة (٢١-٤) فإن تضاعف الخبرة الذي يصاحبه تضاعف الإنتاج التراكمي يؤثر على التكلفة وفقاً للعلاقة التالية :

ق = ٢ حـ $(d = 2^{\alpha})$ .... (٢١-٥)

ومن ثم يمكن تحديد : ق (d) لكل حـ (α) كما بالجدول (٢١-٢) .

جدول (٢١-٢)

اشتقاق ق من حـ

حـ (α)	-٠,٥	-٠,٣٣	-٠,٢٥	-٠,١٦	-٠,١٠
ق (d)	٠,٧١	٠,٨٠	٠,٨٤	٠,٨٩	٠,٩٣

ووفقاً لهذا الجدول إذا كانت مرونة التكلفة للتعلم - ٠,٥ فإن تضاعف التعلم يترتب عليه تخفيض التكلفة في الفترة الحالية إلى نسبة ٧١ ٪ من المستوى السابق لها ، أما إذا كانت المرونة - ٠,١٠ ، فإن تضاعف التعلم يترتب عليه تخفيض التكلفة إلى نسبة ٩٣ ٪ من المستوى السابق لها ، وهكذا .

المبحث الثاني

العلاقة بين التكاليف ووفورات الحجم والتعلم

(٢١-٢-١) وفورات الحجم ودالة التكاليف :

من الممكن قياس كلٍ من وفورات الحجم وأثر التعلم في دالة تكاليف واحدة . ومن أبرز صيغ دوال التكاليف التي تستخدم في هذا الغرض هي دالة التكاليف المشتقة من دالة إنتاج كوب – دوجلاس . ولتوضيح صيغة دالة التكاليف تلك دعنا نبدأ بصيغة دالة إنتاج كوب – دوجلاس التالية :

ص = أ س ١ ^أ١^ س ٢ ^أ٢^ س ٣ ^أ٣^ ....(٢١-٦)

$$Y = A X_1^{\alpha 1} X_2^{\alpha 2} X_3^{\alpha 3}$$

حيث : ص = حجم الإنتاج (Y) .

س ١ = عنصر العمل (X_1) ، س ٢ = عنصر رأس المال (X_2) ، س ٣ = المواد الأولية أو على الأخص الوقود (X_3) .

أ ١ = مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة للعمل = α_1 .

أ ٢ = مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لرأس المال = α_2 .

أ ٣ = مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة للمواد أو الوقود = α_3 .

أ = مستوى المعرفة التكنولوجية ، حيث بارتفاع هذا المستوى تنتقل دالة الإنتاج ككل لأعلى (A) .

غلات الحجم = م = أ ١ + أ ٢ + أ ٣	($R = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$) ...(٢١-٧)
وفورات الحجم = م – ١	($M = R - 1$) ....(٢١-٨)

وإذا بدأنا بدالة التكاليف التالية :

ت = ث ١ س ١ + ث ٢ س ٢ + ث ٣ س ٣ = $\sum$ ث ر س ر .... (٢١-٩)

حيث $ث_ر$ تشير إلى ثمن عنصر الإنتاج "ر"

وأردنا تدنية التكاليف في ظل قيد الإنتاج المعبر عنه بالدالة (٢١-٦) نحصل على الدالة المقيدة التالية :

$$ف = \sum ث_ر س_ر + \lambda (ص - أ س_1^{أ_1} س_2^{أ_2} س_3^{أ_3}) \quad ....(٢١-١٠)$$

ولتدنية التكلفة نحصل على المشتقات الجزئية الأولى للصيغة (٢١-١٠) ونساويها بالصفر ، ونجري بعض التعويضات فنحصل على دالة التكاليف المشتقة من دالة كوب – دوجلاس على النحو التالي :

$$ت = ك ص^{\frac{1}{م}} ث_1^{\frac{أ_1}{م}} ث_2^{\frac{أ_2}{م}} ث_3^{\frac{أ_3}{م}} \quad ....(٢١-١١)$$

$$C = K Y^{\frac{1}{R}} P_1^{\frac{\alpha_1}{R}} P_2^{\frac{\alpha_2}{R}} P_3^{\frac{\alpha_3}{R}}$$

$$حيث: \ ك = م [أ أ_1^{أ_1} أ_2^{أ_2} أ_3^{أ_3}]^{-\frac{1}{م}} \quad ....(٢١-١٢)$$

$$K = R [A \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \alpha_3^{\alpha_3}]^{-\frac{1}{R}}$$

م = مؤشر غلات الحجم (R) .

ولتقدير الصيغة (٢١-١١) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نقوم بالحصول على اللوغاريتم الطبيعي فنصل إلى :

$$لو ت = لو ك + \frac{1}{م} لو ص + \frac{أ_1}{م} لو ث_1 + \frac{أ_2}{م} لو ث_2 + \frac{أ_3}{م} لو ث_3 \quad (٢١-١٣)$$

$$\ln C = \ln K + \frac{1}{R}\ln Y + \frac{\alpha_1}{R}\ln P_1 + \frac{\alpha_2}{R}\ln P_2 + \frac{\alpha_3}{R}\ln P_3$$

ولو افترضنا أن دالة التكاليف متجانسة من الدرجة الأولى في أسعار عناصر الإنتاج (وهو ما يعني أنه في ظل ثبات حجم الإنتاج فإن مضاعفة أسعار عناصر الإنتاج يترتب عليها مضاعفة التكاليف الكلية) فإن هذا يعني أن مجموع المرونات الجزئية للتكاليف = ١ . أي أن :

$$\frac{أ_1}{م} + \frac{أ_2}{م} + \frac{أ_3}{م} = \frac{أ_1 + أ_2 + أ_3}{م} = 1 \qquad \text{(٢١-١٤)}$$

$$\frac{\alpha_1}{R} + \frac{\alpha_2}{R} + \frac{\alpha_3}{R} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{R} = 1$$

هذا مع العلم أن الشرط (٢١-١٤) لا يعنى بالضرورة أن هناك غلة حجم ثابتة ، فقد تكون غلة الحجم ثابتة أو متزايدة أو متناقصة لأن هذا الأمر يتعلق بأسعار عناصر الإنتاج وليس بالعلاقة بين كمية الإنتاج وكميات عناصر الإنتاج .

ومن المعادلة (٢١-١٤) نجد أن :

$$\frac{أ_3}{م} = 1 - \frac{أ_1}{م} - \frac{أ_2}{م} \qquad \text{(٢١-١٥)}$$

وبالتعويض من (٢١-١٥) في (٢١-١٣) نحصل على :

$$لوت = لوك + \frac{1}{م} لوص + \frac{أ_1}{م} لوث_1 + \frac{أ_2}{م} لوث_2 + لوث_3 - \frac{أ_1}{م} لوث_3 - \frac{أ_2}{م} لوث_3$$

$$\therefore لوت - لوث_3 = لوك + \frac{1}{م} لوص + \frac{أ_1}{م}(لوث_1 - لوث_3) + \frac{أ_2}{م}(لوث_2 - لوث_3) \qquad \text{(٢١-١٦)}$$

ويمكن كتابة هذه الصيغة على النحو التالي:

$$لوت^* = ب_. + ب\ لوص + ب_1\ لوث^*_1 + ب_2\ لوث^*_2 \qquad \text{(٢١-١٧)}$$

$$\ln C^* = \beta_0 + \beta \ln Y + \beta_1 \ln P^*_1 + \beta_2 \ln P^*_2$$

حيث :

$لوت^* = لوت - لوث_3$ $(\ln C^* = \ln C - \ln P_3)$

$لوث^*_1 = لوث_1 - لوث_3$ $(\ln P^*_1 = \ln P_1 - \ln P_3)$

$لوث^*_2 = لوث_2 - لوث_3$ $(\ln P^*_2 = \ln P_2 - \ln P_3)$ (٢١-١٨)

$ب_. = لوك$ $(\beta_0 = \ln K)$

$ب = \frac{1}{م}$ ، $ب_1 = \frac{أ_1}{م}$ ، $ب_2 = \frac{أ_2}{م}$ $\beta = \frac{1}{R}, \beta_1 = \frac{\alpha_1}{R}, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{R}$

ويتعين أن نتذكر أن دالة التكاليف (٢١-١٧) مبينة على أساس افتراض تجانس دالة التكاليف من الدرجة الأولى بالنسبة لأسعار عناصر الإنتاج . وبتقدير الصيغة (٢١-١٧) يمكن تحديد غلات الحجم ووفورات الحجم .

فمن (٢١-١٨) نجد أن :

م = غلات الحجم = $\frac{١}{ب}$ $.(R = \frac{1}{\beta})$

∴ وفورات الحجم = م - ١ $.(M = R - 1)$

أ ١ = مرونة الإنتاج للعمل = م ب ١ $.(\alpha_1 = R\beta_1)$

أ ٢ = مرونة الإنتاج لرأس المال = م ب ٢ $.(\alpha_2 = R\beta_2)$

ومن الصيغة (٢١-١٥) نجد أن : $\frac{أ_٣}{م}$ = (١ - ب ١ - ب ٢)

∴ أ ٣ = مرونة الإنتاج للمواد = $\frac{١ - ب_١ - ب_٢}{ب}$ $\alpha_3 = \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{\beta}$

حيث : م = $\frac{١}{ب}$

(٢١-٢-٢) دالة تكاليف كوب - دوجلاس ومنحنى التعلم :

مما سبق يتضح أن الصيغة العامة لدالة تكاليف كوب - دوجلاس هي :

ت ز = ك ص ز^(١/م) ث ١ز^(أ١/م) ث ٢ز^(أ٢/م) ث ٣ز^(أ٣/م) .... (٢١-١١)

$$C_t = KY_t^{\frac{1}{R}} P_{1t}^{\frac{\alpha 1}{R}} P_{2t}^{\frac{\alpha 2}{R}} P_{3t}^{\frac{\alpha 3}{R}}$$

وصيغة التعلم :

ل ز = ل . ع ز^ح .... (٢١-٢)

$$L_t = L_0 X_t^{\alpha}$$

وذلك مع إهمال الحدود العشوائية مرحلياً . والآن نريد أن ندمج منحنى التعلم في دالة التكاليف .

لقد عرفنا سابقاً أن ك = م [أ أ$_{١}^{١١}$ أ$_{٢}^{٢١}$ أ$_{٣}^{٣١}$] $^{-\frac{١}{م}}$ .... (٢١-١٢)

كما أن أ (A) = مستوى المعرفة التكنولوجية في دالة الإنتاج . وحيث أن مستوى المعرفة التكنولوجية بالمنشأة يتأثر بالخبرة المتراكمة من التعلم فهما على ارتباط وثيق . ولذا يمكن افتراض أن " أ " تتأثر بتراكم الخبرة والمعرفة الناجمة عن التعلم ، وتأخذ الصيغة التالية:

أ$_{ز}$ = ع$_{ز}^{-ح}$ $A_t = X_t^{-\alpha}$ .... (٢١-١٩)

وذلك مع الأخذ في الاعتبار أن ح (α) > صفر . وبالتعويض من (٢١-١٩) في (٢١-١٢) عن " أ " A نحصل على :

ك = ع$_{ز}^{\frac{ح}{م}}$ ك * ..... (٢١-٢٠)

حيث ك * = م [أ$_{١}^{١١}$ أ$_{٢}^{٢١}$ أ$_{٣}^{٣١}$] $^{-\frac{١}{م}}$ .... (٢١-٢١)

وبالتعويض من (٢١-٢٠) في المعادلة (٢١-١١) نحصل على :

ت$_{ز}$ = ك * ع$_{ز}^{\frac{ح}{م}}$ ص$_{ز}^{\frac{١}{م}}$ ث$_{١ز}^{\frac{أ_١}{م}}$ ث$_{٢ز}^{\frac{أ_٢}{م}}$ ث$_{٣ز}^{\frac{أ_٣}{م}}$ .... (٢١-٢٢)

$$C_t = K_0^* X_t^{\frac{\alpha}{R}} Y_t^{\frac{1}{R}} P_{1t}^{\frac{\alpha 1}{R}} P_{2t}^{\frac{\alpha 2}{R}} P_{3t}^{\frac{\alpha 3}{R}}$$

ولتقدير الصيغة (٢١-٢٢) نحصل على اللوغاريتم الطبيعي للطرفين :

لو ت$_{ز}$ = لو ك * + $\frac{ح}{م}$ لو ع$_{ز}$ + $\frac{١}{م}$ لو ص$_{ز}$ + $\frac{أ_١}{م}$ لو ث$_{١ز}$ + $\frac{أ_٢}{م}$ لو ث$_{٢ز}$ + $\frac{أ_٣}{م}$ لو ث$_{٣ز}$ .... (٢١-٢٣)

$$\ln C_t = \ln K^*_0 + \frac{\alpha}{R} \ln X_t + \frac{1}{R} \ln Y_t + \frac{\alpha_1}{R} \ln P_{1t} + \frac{\alpha_2}{R} \ln P_{2t} + \frac{\alpha_3}{R} \ln P_{3t}$$

ومن الممكن أن نجري بعض التعديلات على الصيغة (٢١-٢٢) على النحو التالي :

(أ) إذا كانت أسعار عناصر الإنتاج ث ١ ، ث ٢ ، ث ٣ ، ثابتة عبر الفترة محل الاعتبار فإنها لا تؤثر على التغير في التكاليف ، وبالتالي يتجمع أثرها في الثابت ك * وتصبح الصيغة (٢١-٢٣) كما يلي :

لوت ز = لوك * + ح/م لوع ز + ١/م لوص ز .... (٢١-٢٤)

$$\ln C_t = \ln K_0^* + \frac{\alpha}{R} \ln X_t + \frac{1}{R} \ln Y_t$$

(ب) إذا كانت أسعار عناصر الإنتاج متغيرة عبر الزمن بنفس نسبة معدل التضخم فمن الممكن استخدام الرقم القياسي لأسعار التجزئة (ث) (P) كمؤشر لأسعار عناصر الإنتاج. وعندئذ يمكن افتراض أن :

ث ز = ث ١ ^(أ١/م) ث ٢ ^(أ٢/م) ث ٣ ^(أ٣/م) .... (٢١-٢٥)

$$P_t = P_1^{\frac{\alpha_1}{R}} P_2^{\frac{\alpha_2}{R}} P_3^{\frac{\alpha_3}{R}}$$

وبالتعويض من (٢١-٢٥) في (٢١-٢٢) تصبح دالة التكاليف :

ت ز = ك * ع ز ^(ح/م) ص ز ^(١/م) ث ز .... (٢١-٢٦)

$$C_t = K^*_0 \; X_t^{\frac{\alpha}{R}} Y_t^{\frac{1}{R}} P_t$$

∴ لوت ز = لوك * + لوع ز + لوص ز + لوث ز .... (٢١-٢٧)

$$\ln C_t = \ln K^*_0 + \frac{\alpha}{R} \ln X_t + \frac{1}{R} \ln Y_t + \ln P_t$$

وإذا نظرنا إلى التكاليف الكلية على أنها تكاليف حقيقية فلابد من قسمة التكاليف النقدية على الرقم القياسي للأسعار . ومن ثم فإن :

التكاليف الكلية الحقيقية = ت ز′ = ت ز / ث ز $\left(C'_t = \frac{C_t}{P_t} \right)$

وبالتالي فإن :

لوت/ز = لو (ت ز / ث ز) = لوت ز - لوث ز .... (٢١-٢٨)

وبالتعويض من (٢١-٢٧) في (٢١-٢٨) نحصل على :

لوت/ز = لوك * + حـ/م لوع ز + ١/م لوص ز .... (٢١-٢٩)

$$\ln C'_t = \ln K^*_0 + \frac{\alpha}{R} \ln X_t + \frac{1}{R} \ln Y_t$$

ولكن من الملاحظ بالمعادلة (٢١-٢) أن منحنى التعلم يشير للعلاقة بين متوسط التكلفة الحقيقي و حجم الإنتاج التراكمي ، هذا في حين أن الصيغة (٢١-٢٩) تحتوي على التكاليف الكلية الحقيقية . ولذا حتى يمكن قياس أثر التعلم من خلالها لابد من استبدال التكاليف الكلية الحقيقية بمتوسط التكلفة الحقيقية . ومن المعروف أن :

متوسط التكلفة الحقيقية = ل ز = التكاليف الكلية الحقيقية / حجم الإنتاج

أي أن :

ل ز = ت/ز / ص ز

∴ لو ل ز = لو (ت/ز / ص ز) = لوت/ز - لوص ز .... (٢١-٣٠)

وبالتعويض من (٢١-٢٩) في (٢١-٣٠) وإضافة الحد العشوائي نحصل على :

لو ل ز = لوك * + حـ/م لوع ز + ١/م لوص ز - لوص ز + ع

∴ لو ل ز = لوك * + حـ/م لوع ز + ١-م/م لوص ز + ع .... (٢١-٣١)

$$\ln L_t = \ln K^*_0 + \frac{\alpha}{R} \ln X_t + \frac{1-R}{R} \ln Y_t + u_t$$

وتستخدم الصيغة (٢١-٣١) في قياس أثر كل من التعلم ووفورات الحجم .

ويمكن استخدام الصيغة العامة التالية في تقدير (٢١-٣١) .

لو ل ز = ك + ك ١ لوع ز + ك ٢ لو ص ز + ع ز .... (٢١-٣٢)
$\ln L_t = K_0 + \beta_1 \ln X_t + \beta_2 \ln Y_t + u_t$

حيث :

ك = لو ك * ، ك ١ = حـ / م = أثر التعلم ، ك ٢ = (١ - م) / م = أثر وفورات الحجم

$K_0 = \ln K^*_0$ و $\beta_1 = \frac{\alpha}{R}$ و $\beta_2 = \frac{1-R}{R}$

ومن المتوقع أن تكون ك ١ (β_1) < صفر .

ولو أن غلات الحجم متزايدة ، م > ١ فإن ك ٢ < صفر ، وهو ما يعني أنه مع زيادة حجم الإنتاج تقل تكلفة الوحدة (وفورات حجم موجبة) . ولو أن غلات الحجم متناقصة ، م < ١ ، فإن ك ٢ > صفر ، وهو ما يعنى أن متوسط التكلفة الحقيقي يزداد مع زيادة حجم الإنتاج (وفورات حجم سالبة) ، ولو أن غلات الحجم ثابتة ، م = ١ ، فإن ك ٢ = صفر ، وهو ما يعنى ثبات متوسط التكلفة الحقيقي مع زيادة حجم الإنتاج . وعندئذ يختفي لو ص ز ، وتصبح دالة التكلفة معبرة فقط عن منحنى التعلم .

(حـ) مما سبق يتضح أن افتراض ثبات غلة الحجم يجعل دالة تكاليف كوب دوجلاس في صورتها المتوسطة تصبح هي نفسها منحنى التعلم حيث :

لو ل ز = ك + ك ١ لوع ز + ع .... (٢١-٣٣)
$\ln L_t = K_0 + \beta_1 \ln X_t + u_t$

وبتقدير الصيغة (٢١-٣٢) يمكن اختبار ما إذا كان هذا الافتراض صحيح أم خاطئ باستخدام إحصائية " t " أو الخطأ المعياري .

ففرض العدم في حالة ثبات غلة الحجم هو   م = ١   ($R = 1$)

أو   ك ٢ = صفر   ($\beta_2 = 0$)

والفرض البديل هو م ≠ ١ $(R \neq 1)$

أو ك٢ ≠ صفر : $(\beta_2 \neq 0)$

ومن ثم فإذا كانت "ك٢" معنوية إحصائياً نرفض فرض العدم القائل بأن غلة الحجم ثابتة ، ونقبل الفرض البديل القائل بأن غلة الحجم غير ثابتة .

أما إذا كانت " ك٢ " غير معنوية إحصائياً نقبل فرض العدم القائل بأن غلة الحجم ثابتة، وتصبح الصيغة (٢١-٣٣) صحيحة ومعبرة عن منحنى التعلم .

(د) بتقدير الصيغة (٢١-٣٢) يمكن تحديد معامل غلة الحجم (م) ، ومعامل وفورات الحجم (م - ١) ، ومعامل أثر التعلم (حـ) وذلك على النحو التالي:

ك٢ = (١ - م) / م = ١ / م - ١

∴ ١ / م = ك٢ + ١

∴ معامل غلة الحجم = م = ١ / (ك٢ + ١) $\left(R = \frac{1}{1+\beta_2} \right)$ .... (٢١-٣٤)

معامل وفورات الحجم = (م - ١) $(M = R - 1)$ .... (٢١-٣٥)

وحيث أن : ك١ = حـ / م

∴ معامل أثر التعلم = حـ = م ك١ = ك١ / (ك٢ + ١) .... (٢١-٣٦)

$$\alpha = R\,\beta_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2 + 1}$$

(٢١-٢-٣) بعض المشاكل القياسية

يوجد هناك بعض المشاكل القياسية المتعلقة بتقدير الصيغ السابقة :

(أ) في بعض الحالات قد يصعب إيجاد بيانات عن متوسط التكاليف الكلية والتي تستخدم كمتغير تابع في الصيغة (٢١-٣٢) ولذا قد تستبدل بمتوسط تكلفة العمل . ويكون التقدير صحيحاً إذا كانت جميع التكاليف تتغير بنفس معدل التغير في تكلفة العمل .

(ب) وفي أحيان أخرى قد يستخدم السعر كبديل لمتوسط التكلفة . وللحصول على السعر الحقيقي نقسم سعر السلعة أو متوسط أسعار السلع التي تبيعها الشركة على الرقم القياسي لأسعار التجزئة . ولكن في بعض الحالات تخفض بعض الشركات السعر بصورة تجعله لا يعكس التكلفة بغرض تحقيق أهداف أخرى مثل زيادة نصيبها النسبي في السوق أو منع منشآت أخرى للدخول إلى السوق ، وفي حالات أخرى ترفع الشركة السعر بدرجة مغالى فيها بحيث تجعله لا يعكس التكلفة . وفي هذه الحالات يعتبر استخدام السعر كمؤشر للتكلفة المتوسطة مضللاً .

(حـ) إذا كانت العلاقة الحقيقية الممثلة للواقع هي :

لو ل ز = ك + ك ١ لو ع ز + ك ٢ لو ص ز + ى ١ز

$$\ln L_t = K_0 + \beta_1 \ln X_t + \beta_2 \ln Y_t + u_{1t}$$

وقمنا بتقدير العلاقة الممثلة لمنحنى التعلم على النحو التالي :

لو ل ز = ك * + ق ١ لو ع ز + ى ٢ز

$$\ln L_t = K_0^* + C_1 \ln X_t + u_{2t}$$

فإن هذا يعني أننا حذفنا ص ز (Y_t) كمغير تفسيري مما يترتب عليه ما يسمى تحيز الحذف (ق ١ − ك ١) $(C_1 - \beta_1)$

وإذا قمنا بتقدير الصيغة التالية :

لو ع ز = ف + ف ١ لو ص ز + ى ٣ز

$$\ln X_t = F + F_1 \ln Y_t + u_{3t}$$

فمن الممكن إثبات أن :

تحيز الحذف = ق ١ - ك ١ = ف ١ ك ٢ .... (٢١-٣٧)
$(C_1 - \beta_1) = F_1 \beta_2$

وبالتالي سوف لا يكون هناك تحيز حذف في أحد حالتين :

(١) ف ١ = صفر ، وذلك عندما لا يوجد ارتباط بين ع ز ، ص ز

(٢) ك ٢ = صفر ، وذلك عندما م = ١ أي غلة الحجم ثابتة ، وهو ما يعني أن متوسط التكلفة لا يتأثر بحجم الإنتاج .

أما إذا كان هناك ارتباط طردي بين الإنتاج الجاري (ص ز) والإنتاج التراكمي في الفترات السابقة (ع ز) فإن ف ١ > صفر ومن ثم :

في ظل غلات الحجم المتناقصة م < ١ وبالتالي ك ٢ > صفر ، ق ١ - ك ١ > صفر أي التحيز يكون موجباً وتكون معلمة أثر التعلم ق ١ مقومة بأكثر من قيمتها .

وفي ظل غلات الحجم المتزايدة م > ١ ، وبالتالي ك ٢ < صفر ، ق ١ - ك ١ < صفر ، أي التحيز يكون سالباً وتكون معلمة أثر التعلم ق ١ مقومة بأقل من قيمتها .

(٢١-٢-٤) بعض النتائج التطبيقية

(أ) يوضح الجدول (٢١-٣) بعض النتائج لدراسات تطبيقية أجريت على أنشطة مختلفة. فمن الواضح أن أكبر نسبة من المنتجات تتراوح مرونة منحنى التعلم بالنسبة لها بين - ٠,٢٥ إلى - ٠,٣٢ ، ويتراوح ميل منحنى التعلم بين ٠,٨٠ - ٠,٨٤ ، وهو ما يعني أن التعلم يخفض التكلفة الحقيقية للوحدة إلى نسب ٨٠ - ٨٤ ٪ من التكلفة السابقة. أما الغالبية العظمى للمنتجات (٧٩ - ٩٧ ٪) فتتراوح مرونة منحنى التعلم بالنسبة لها بين - ٠,١٦ إلى -٠,٤١ وميله يتراوح بين ٧٥ ٪ - ٨٩ ٪ .

(ب) مرونة منحنى التعلم بالنسبة للأنشطة الصناعية أكبر من الأنشطة الخاصة بتجارة المواد الأولية والتسويق والمبيعات وشركات التوزيع .

(حـ) أثر التعلم على التكلفة يكون أقوى في حالة المنتجات النمطية وذات مراحل التجميع المتعددة .

جدول (٢١-٣)

نتائج بعض الدراسات التطبيقية

مرونة منحنى التعلم (قيمة مطلقة)	ميل منحنى التعلم	عدد المنتجات
٠,٧٤ – ٠,٦٣	٠,٦٤ – ٠,٦٠	٣
٠,٦٢ – ٠,٥٢	٠,٦٩ – ٠,٦٥	٣
٠,٥١ – ٠,٤٢	٠,٧٤ – ٠,٧٠	١٠
٠,٤١ – ٠,٣٣	٠,٧٩ – ٠,٧٥	٢٣
٠,٣٢ – ٠,٢٥	٠,٨٤ – ٠,٨٠	٣٠
٠,٢٤ – ٠,١٦	٠,٨٩ – ٠,٨٥	٢٦
٠,١٥ – ٠,٠٨	٠,٩٤ – ٠,٩٠	٦
٠,٠٧ – ٠,٠١	٠,٩٩ – ٠,٩٥	١

مثال (٢١-١)

أثر التعلم ووفورات الحجم على التكلفة

إذا علمت أن البيانات التالية تخص منشأة ما خلال فترة ١٢ سنة .

جدول (٢١-٤)

Year	TS1	P	Y
1984	6.000	100	10
1985	9.042	110	15
1986	11.100	120	25
1987	13.728	130	40
1988	15.120	135	56
1989	15.949	140	64
1990	18.522	150	84
1991	20.079	155	102
1992	22.176	160	126
1993	23.760	165	150
1994	25.287	170	175
1995	25.707	165	205

حيث : تكاليف كلية نقدية بالمليون جنيه = TS1

الرقم القياسي للأسعار = P

حجم الناتج بالمليون طن = Y

المطلوب :

(أ) حدد معامل أثر التعلم في هذه المنشأة وفسر معناه .

(ب) حدد معامل أثر وفورات الحجم فيها وفسر معناه .

(حـ) حدد طبيعة غلات الحجم .

وللإجابة على المطلوبات السابقة نتبع الخطوات التالية :

(١) نحصل أولاً على التكاليف الكلية الحقيقية TS حيث :

$$TS = \frac{TS1}{p} \cdot 100$$

وذلك كما بالجدول (٢١-٥).

جدول (٢١-٥)

Year	TS1	P	TS
1984	6.000000	100.0000	6.000000
1985	9.042000	110.0000	8.220000
1986	11.10000	120.0000	9.250000
1987	13.72800	130.0000	10.56000
1988	15.12000	135.0000	11.20000
1989	15.94900	140.0000	11.39214
1990	18.52200	150.0000	12.34800
1991	20.07900	155.0000	12.95419
1992	22.17600	160.0000	13.86000
1993	23.76000	165.0000	14.40000
1994	25.28700	170.0000	14.87471
1995	25.70700	165.0000	15.58000

(٢) نحصل على متوسط التكلفة الحقيقي $S = \frac{TS}{Y}$

(٣) ثم نحدد الناتج التراكمي في الفترات السابقة (X) باستخدام (Eviews) :

```
Smpl 84 84
X = 0
Smpl 85 95
X = Y ( - 1 ) + X ( - 1 )
```

فنحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢١-٦)

جدول (٢١-٦)

obs	Y	X	S	LY	LX	LS
1984	10.00000	0.000000	0.600000	2.302585	NA	-0.510826
1985	15.00000	10.00000	0.548000	2.708050	2.302585	-0.601480
1986	25.00000	25.00000	0.370000	3.218876	3.218876	-0.994252
1987	40.00000	50.00000	0:264000	3.688879	3.912023	-1.331806
1988	56.00000	90.00000	0.200000	4.025352	4.499810	-1.609438
1989	64.00000	146.0000	0.178002	4.158883	4.983607	-1.725959
1990	84.00000	210.0000	0.147000	4.430817	5.347108	-1.917323
1991	102.0000	294.0000	0.127002	4.624973	5.683580	-2.063553
1992	126.0000	396.0000	0.110000	4.836282	5.981414	-2.207275
1993	150.0000	522.0000	0.096000	5.010635	6.257668	-2.343407
1994	175.0000	672.0000	0.084998	5.164786	6.510258	-2.465124
1995	205.0000	847.0000	0.076000	5.323010	6.741701	-2.577022

(٤) نقوم بتقدير الصيغة التالية :

$$\ln S_t = A + b_1 \ln X_t + b_2 \ln Y_t + u_t$$

فنحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢١-٧)

جدول (٢١-٧)

Dependent Variable: LS
Method: Least Squares
Date: 05/23/04 Time: 06:25
Sample(adjusted): 1985 1995
Included observations: 11 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.197036	0.068944	17.36254	0.0000
LX	-0.105324	0.029259	-3.599641	0.0070
LY	-0.575646	0.050273	-11.45046	0.0000

R-squared	0.999893	Mean dependent var	-1.803331
Adjusted R-squared	0.999867	S.D. dependent var	0.627463
S.E. of regression	0.007245	Akaike info criterion	-6.789947
Sum squared resid	0.000420	Schwarz criterion	-6.681430
Log likelihood	40.34471	F-statistic	37496.97
Durbin-Watson stat	2.026909	Prob(F-statistic)	0.000000

أي :

$$\ln S = 1.197 - 0.105 \ln X - 0.575 \ln Y + u$$

لو ل ز = ١,١٩٧ – ٠,١٠٥ لو ع ز – ٠,٥٧٥ لو ص ز + د ز

(٠,٠٦٩) (٠,٠٢٩) (٠,٠٥)

ر ٢ المعدل = ٠,٩٩٩

DW = ٢

حيث : ك ١ = $\frac{جـ}{م}$ = – ٠,١٠٥

ك ٢ = $\frac{١ - م}{م}$ = – ٠,٥٧٥

ويتضح مما سبق :

(١) معامل غلة الحجم = م = $\frac{١}{ك_٢ + ١}$ = $\frac{١}{١ - ٠,٥٧٥}$ = $\frac{١}{٠,٤٢٥}$ = ٢,٣٥

وهو ما يعني أن غلة الحجم متزايدة ، حيث أن زيادة عناصر الإنتاج بنسبة ١٠٠ ٪ يترتب عليها زيادة حجم الإنتاج بنسبة ٢٣٥ ٪ .

(٢) معامل وفورات الحجم = م – ١ = ٢,٣٥ – ١ = ١,٣٥ ، وهذا يعني أن وفورات الحجم موجبة . فكل زيادة في عناصر الإنتاج بنسبة ١٠٠ ٪ تحقق وفراً إضافياً في الناتج بنسبة ١٣٥ ٪ . وباستخدام التكلفة يترتب على مضاعفة الناتج (زيادته بنسبة ١٠٠ ٪) تخفيض متوسط التكلفة الحقيقي للوحدة بنسبة ٥٧,٥ ٪ حيث ك ٢ = – ٠,٥٧٥ ، وهي تشير لمرونة متوسط التكلفة الحقيقي بالنسبة لحجم الناتج .

(٣) مرونة متوسط التكلفة للتعلم حـ = م ك ١ = ٢,٣٥ (– ٠,١٠٥) = – ٠,٢٥ ، وهو ما يعني أن : ق = ٢ $^{-٠,٢٥}$ = ٠,٨٤ . ومن ثم فإن مضاعفة التعلم يترتب عليها تخفيض متوسط التكلفة الحقيقي إلى نسبة ٨٤ ٪ من المستوى السابق .

الفصل الثاني والعشرون

قياس التغير في النوعية

The Measurement of Quality Change

في كثير من الحالات تكون التغيرات في الأسعار راجعة للتغيرات في نوعية السلعة ، ولذا يصبح من المفيد تحديد أثر التغير في النوعية على السعر لأسباب عديدة منها :

(أ) يهم المنتجون معرفة أي خصائص السلعة أكثر تأثيراً في السعر ، وأيها أقل تأثيراً حتى يركزوا على تلك الخصائص التي تؤثر في السعر تأثيراً جوهرياً .

(ب) يستخدم التغير في الأسعار كمؤشر للتضخم ، ولا شك أن التغير في السعر الراجع لتغير النوعية لا يعتبر تضخماً ، ولذا من المفيد عزل أثر التغير في النوعية على الأسعار قبل معرفة التغير في الأسعار الذي يعتبر تضخماً حقيقياً .

(حـ) في بعض الحالات يدرج السعر كأحد المتغيرات التفسيرية لتقدير بعض الدوال أو النماذج مثل نموذج السوق وما يتضمنه من دالتي الطلب والعرض . وفي هذه الحالة إذا استخدمنا البيانات المنشورة عن السعر كما هي فإنها تعكس أثر السعر وأثر النوعية في نفس الوقت على الطلب أو العرض مما يعطي نتائج مضللة . وحتى تكون النتائج دقيقة يتعين استبعاد أثر النوعية من السعر ، ثم استخدام السعر المعدل في تقدير دوال الطلب أو العرض .

وسوف نتعرض في هذا الفصل للطرق المختلفة لعزل أثر التغير في النوعية على السعر . وقبل أن نفعل ذلك سوف نشير إلى كيفية استخدام المتغيرات الصورية أو الثنائية في الصيغ شبه اللوغاريتمية .

فإذا أخذنا الصيغة شبه اللوغاريتمية التالية :

لو ص = أ + ب ١ س + ب ٢ و + ع .... (٢٢-١)

$$\ln Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 D_t + u_t$$

حيث : ص = المرتب السنوي للمدرس (Y)

س = عدد سنوات الخبرة (X)

" و " متغير ثنائي = ١ إذا كان المدرس ذكر (D = 1)

= صفر إذا كان المدرس أنثى (D = 0)

$$ب_١ = \frac{ء\, لو\, ص}{ء\, س} = \frac{ء\, ص}{ص} \cdot \frac{١}{ء\, س} = \frac{التغير\ النسبي\ في\ ص}{التغير\ المطلق\ في\ س}$$

$$ب_٢ = \frac{ء\, ص}{ص} \cdot \frac{١}{ء\, و}$$

∴ ب ، تشير إلى نسبة التغير في متوسط المرتب الشهري مع تغير سنوات الخبرة بسنة واحدة ، حيث ء س = ١ = سنة خبرة .

ولكن لا يمكن القول أن "ب ٢ " تشير إلى نسبة الزيادة في مرتب المدرس الذكر عن متوسط مرتب المدرس الأنثى في هذه الحالة . ولتحديد ذلك نتبع إجراء Halvorsen & Palmquist وهو :

نحصل على مقابل لوغاريتم $\hat{ب}_٢$ = $هـ^{\hat{ب}_٢}$ = الرقم القياسي لقيمة متغير فئة المقارنة

∴ نسبة الزيادة في مرتب الذكر عن الأنثى = $هـ^{\hat{ب}_٢} - ١$ $(e^{\hat{\beta}2} - 1)$ = الرقم القياسي لمتغير فئة المقارنة – الرقم القياسي لمتغير فئة الأساس (١٠٠٪) .

ويعتبر هذا الفصل تطبيقاً على استخدام المتغيرات الصورية أو الثنائية في مجال قياس العلاقات الاقتصادية . وهو يحتوي على مبحثين :

المبحث الأول : طرق قياس أثر التغير في النوعية على السعر .

المبحث الثاني : تطبيقات لطريقة سعر الرفاهية .

المبحث الأول

طرق قياس أثر التغير في النوعية على السعر

نتعرض في هذا المبحث لعدد من طرق قياس أثر التغير في النوعية على السعر كما يلي:

(٢٢-١-١) طريقة " النموذج المتناسب " " Matched Model " :

تعتبر هذه الطريقة تقليدية في عزل أثر النوعية على السعر . وبمقتضى هذه الطريقة إذا أردنا حساب رقم قياسي للأسعار لا يعكس التغير في النوعية نقوم بمقارنة أسعار النماذج السلعية التي لم تتغير نوعيتها عبر الزمن . فإذا أردنا حساب الرقم القياسي لأسعار التليفزيونات عبر فترة زمنية معينة مثلاً ، نقتصر على أسعار النماذج التي لم تتغير نوعيتها خلال هذه الفترة ، ويتم استبعاد النماذج التي تغيرت نوعياتها . ويبنى الرقم القياسي لأسعار المنتجين في الولايات المتحدة Producer Price Index (PPI) على أساس هذه الطريقة . ولكن يعيب هذه الطريقة أنه في الحالات التي يكون فيها التقدم التكنولوجي سريعاً ومصحوباً بتغيرات مستمرة في النوعية كما هو الحال في مجالات السيارات والتليفزيونات والكمبيوتر ، فإن الرقم القياسي للأسعار المبني على أساس طريقة النموذج المتناسب لا يعكس إلا أسعار نسبة منخفضة جداً من نوعيات السلع محل الاعتبار . فقد توجد هناك ١٠ نماذج مختلفة في الحالة الواحدة ، منها نموذج واحد هو الذي لم تتغير نوعيته عبر الفترة محل البحث ، أما باقي النماذج فقد تتغير نوعيتها أكثر من مرة . ومن ثم ففي هذه الحالة لا يمثل الرقم القياسي للأسعار المتوسط العام للأسعار تمثيلاً جيداً . ومن ناحية أخرى قد توجد هناك اختلافات فنية غير ظاهرة بين نوعيات النموذج الواحد عبر الزمن ، مما لا يمكن إدراكه من قبل غير المتخصصين بصورة دقيقة . وفى مثل هذه الحالة يؤدى عدم إدراك التغيرات في نوعية النموذج من قبل غير المتخصصين إلى الوقوع في خطأ إدراجه ضمن أسعار النموذج المتناسب .

(٢٢-١-٢) تحليل العلاقة بين السعر والنوعية عند نقطة زمنية معينة :

يعتبر Frederick Waugh المتخصص في مجال الاقتصاد الزراعي هو أول من قدم بحثاً عن قياس العلاقة بين السعر والنوعية عام ١٩٢٨ . وكان عنوان البحث " العوامل النوعية المؤثرة على أسعار الخضروات " " Quality Factors Influencing Vegetable Prices ". وفى هذا البحث حاول Waugh أن يقيس أثر بعض الخصائص مثل الحجم والشكل واللون ودرجة النضج وتماثل الوحدات على أسعار بعض المنتجات الزراعية مثل نبات الهليون Asparagus والطماطم والخيار . ولقد كان الهدف من البحث هو تحديد ما إذا كانت زراعة وبيع النوعيات الجيدة من الخضروات تحقق علاوة كافية تعوض المنتجين عن الزيادة في التكلفة التي يتحملوها عند زراعة هذه النوعيات الجيدة أم لا .

ولعزل أثر التغيرات الموسمية على الأسعار تم استخدام الأسعار النسبية وليس الأسعار المطلقة للمنتجات الزراعية كمتغير تابع . فبالنسبة لنوعية معينة ، السعر النسبي هو:

ث ر * = $\frac{\text{ث ر}}{\text{ث}}$ ($Pr_i = \frac{Pa_i}{P}$) حيث ث ر (Pa_i) = السعر المطلق للنوعية ر ، ث (P) = متوسط سعر السلعة فـd السوق بنوعياتها المختلفة . ونظراً لأن التغيرات الموسمية تنعكس في كل من ث ر ، ث فإن استخدام السعر النسبي يزيل أثرها.

ولقد قام Waugh بقياس علاقة انحدار متعدد بين السعر النسبي وخصائص المنتج القابلة للقياس لكل سلعة من السلع الثلاثة سابقة الذكر باستخدام بيانات ٢٠٠ عملية شراء لكل واحدة خلال الفترة ٦ مايو - ٢ يوليو ١٩٢٧ .

وبالنسبة لنبات الهليون مثلاً قام Waugh بتقدير معادلة انحدار خطي متعدد بين :

ث*ر = السعر النسبي للهليون من نوعيات مختلفة كمتغير تابع (Pr_i)

والمتغيرات التفسيرية :

خ = طول الجزء أخضر اللون من وحدة الهليون بالبوصة (L_i)

ع = عدد السيقان في كل وحدة هليون . ومن المعروف أنه كلما كان قطر الساق أقل كلما كان عدد السيقان أكثر . ويعتبر هذا المتغير ممثلاً لحجم الساق . ويفضل دائماً أن يكون عدد السيقان أقل لأن هذا يعنى أن حجم الساق أكبر (N_i)

ح = الانحراف المعياري لأقطار السيقان في كل وحدة هليون كمؤشر للتماثل .
(S_i) Uniformity

ثم استخدم الصيغة التالية في عملية التقدير :

ث*ر = أ + ب ١ خ ر + ب ٢ ع ر + ب ٣ ح ر + ى .... (٢-٢٢)

$$P_{ri} = \alpha + \beta_1 L_i + \beta_2 N_i + \beta_3 S_i + u'_i$$

وتمثل ب ر (حيث ر = ١ إلى ٣) الآثار الجزئية للخصائص النوعية على السعر النسبي . ولقد جاء تقدير الصيغة السابقة على النحو التالي :

ث*ر = أ + ٠,١٣٨٢٦ خ ر − ١,٥٣٣٩٤ ع ر − ٠,٢٧٥٥٣ ح ر + ى .... (٣-٢٢)

ومن الواضح أن :

(١) زيادة طول الجزء الأخضر من الهليون بمقدار بوصة واحدة يؤدى لزيادة السعر النسبي بمقدار ٠,١٣٨ نقطة .

(٢) تؤدي زيادة عدد السيقان في وحدة الهليون بمقدار ساق واحد إلى انخفاض السعر النسبي بمقدار ١,٥٣ نقطة .

(٣) وتؤدى زيادة الاختلاف بين أقطار السيقان بمقدار وحدة انحراف معياري واحدة (عدم التماثل) إلى انخفاض السعر النسبي بمقدار ٠,٢٧٥٥ نقطة .

وفى محاولة لتحديد الأهمية النسبية لكل خاصية من هذه الخصائص على السعر يمكن استخدام ما يسمى بمعامل التحديد المنفصل لكل متغير Separate Coefficient of Determination . فإذا كانت معادلة الانحدار تأخذ الصيغة التالية :

ص = أ + ب ١ س ١ + ب ٢ س ٢ + ب ٣ س ٣ + ى

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

فإن معامل التحديد المنفصل للمتغير س ر يتحدد كما يلي :

$$ر^{٢}_{ف.س ر} = \frac{\hat{ب}_{ر} \sum س_{ر} ص_{ر}}{\sum (ص_{ر})^{٢}} \quad .... \quad (٢٢-٤)$$

$$R^2_{S.Xi} = \frac{\hat{\beta}_i \sum y_i x_i}{\sum y_i^2}$$

حيث :

$س_{ر} = س_{ر} - \bar{س}$

$ص_{ر} = ص_{ر} - \bar{ص}$

ويختلف معامل التحديد المنفصل عن معامل التحديد الجزئي Partial Coefficient of Determination . وتوجد طريقتان للحصول على معامل التحديد الجزئي . تتمثل الطريقة الأولى في استخدام إحصائية " t " على النحو التالي:

$$ر^{٢}_{ج.ص١} = \frac{ت^{٢}_{١}}{ت^{٢}_{١} + (ن - ك)} \qquad R^2_{P.X1} = \frac{t_1^2}{t_1^2 + (n-K)} \quad (٢٢-٥)$$

وتتمثل الطريقة الثانية في تتبع الخطوات التالية بالنسبة للمتغير (س ١):

(أ) تقدير صيغة الانحدار دون أن تحتوى على المتغير س ١ (X 1)

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}_{٢} س_{٢} + \hat{ب}_{٣} س_{٣} + د_{١} \quad .... \quad (٢٢-٦)$$

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_{i1}$$

ثم نحدد قيم البواقي د ١ باستخدام الصيغة المقدرة .

(ب) تقدير صيغة انحدار يكون فيها س ١ متغير تابع وباقي المتغيرات التفسيرية كمتغيرات مستقلة كما يلي :

$$س_{١} = \hat{ح}_{١} + \hat{ح}_{٢} س_{٢} + \hat{ح}_{٣} س_{٣} + د_{٢} \quad .... \quad (٢٢-٧)$$

$$X_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 X_2 + \hat{C}_3 X_3 + e_{i2}$$

ثم نحدد قيم البواقي د ٢ باستخدام الصيغة المقدرة .

(حـ) تقدير صيغة الانحدار التالية :

د ١ = ق̂ + ق̂ ١ د٢ + و   (٢٢-٨)

$e_{t1} = \hat{K} + \hat{K}_1 e_{t2} + w_t$

ويكون ر ٢ د١ . د٢ لهذه الصيغة هو معامل التحديد الجزئي للمتغير س ١ .

ويعيب هذه الطريقة أن مجموع معاملات التحديد الجزئي لا تساوى معامل التحديد العام ر ٢ . هذا في حين أن محموع معاملات التحديد المفصلة يساوى معامل التحديد العام ر ٢

(٢٢ - ١ - ٣) قياس العلاقة بين السعر والنوعية عبر الزمن :

في أواخر الثلاثينات الميلادية دارت مناقشات في الكونجرس الأمريكي تم اتهام شركة جنرال موتورز فيها بأن سياستها التسعيرية للسيارات هى المسئولة عن تقلب مبيعاتها ، وبالتالي تقلب العمالة فيها ، الأمر الذي ساهم في زيادة البطالة في المجتمع الأمريكي آنذاك . وكدليل على ذلك قيل أن متوسط أسعار سيارات جنرال موتورز من الموديلات المختلفة كان قد زاد بنسبة ٤٥ ٪ خلال الفترة ١٩٢٥ - ١٩٣٥ . ولتجلية الحقيقة قامت جنرال موتورز بتمويل دراسه لتقدير دالة الطلب على سياراتها لمعرفة مدى تأثير السعر على المبيعات . ولقد تولى Andrew T. Court القيام بهذه الدراسة وعندما بدأ الدراسة واجهته مشكلة قياس متوسط السعر حيث اتضح أن التغير في السعر يرجع للتغير في النوعية . ومن ثم أصبح هناك حاجة لعزل أثر التغير في النوعية أولاً ، ثم تحديد التغير الصافي في السعر بعد ذلك . ولعمل ذلك استخدم ما سمى بطريقة سعر الرفاهية Hedonic Price Method . وسعر الرفاهية يعرف بأنه قيمة الزيادة في الرفاهية التي يحصل عليها أفراد المجتمع نتيجة لتمتعهم بخصائص سلعةٍ ما . و بالتالي فإن السعر الذي يدفعه المستهلك يحتوى على عنصرين ، سعر بحت وسعر رفاهية . وحاول كورت باستخدام الانحدار المتعدد أن يحدد تأثير كل خاصية من خصائص السيارة على سعرها.

كما حاول تحديد تأثير التغير في النوعية بوجه عام على السعر عبر الزمن . ولتوضيح طريقة سعر الرفاهية دعنا نستخدم المثال التالي :

افترض أن هناك موديلات مختلفة لسيارات مختلفة تم تقديمها في ٣ سنوات متتالية ١ ، ٢ ، ٣ . ودعنا نركز على ٣ خصائص لكل سيارة ، وزن السيارة (ن ر) W_i ، طول السيارة مقاساً بالمسافة بين محوري العجلة الأمامية والعجلة الخلفية (ط ر) L_i ، وقوة الموتور (ق ر) H_i . وإذا أشرنا إلى سعر الموديل ر بأنه (ث ر) P_i ، ثم استخدمنا متغيرين ثنائيين هما و ٢ ، و ٣ حيث :

و ٢ = ١ إذا كان الموديل لعام ٢ ($D_2 = 1$)

و ٢ = صفر إذا كان الموديل لعام آخر ($D_2 = 0$)

و ٣ = ١ إذا كان الموديل لعام ٣ ($D_3 = 1$)

و ٣ = صفر إذا كان الموديل لعام آخر ($D_3 = 0$)

ففي هذه الحالة يكون الموديل الذي يخدم كنقطة أساس وينعكس في المعلمة التقاطعية هو موديل السنة الأولى :

ولقد استخدم كورت معادلة الانحدار التالية :

لو ث ر = أ ١ + أ ٢ و ٢ر + أ ٣ و ٣ر + ب ١ ن ر + ب ٢ ط ر + ب ٣ ق ر + ع ر ...... (٢٢-٩)

$$\ln P_i = \alpha_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 W_i + \beta_2 L_i + \beta_3 H_i + u_i$$

وبتقدير الصيغة (٢٢-٩) من البيانات المتاحة عن الموديلات المختلفة خلال السنوات الثلاثة يمكن تحديد :

لو ث ١ = أ ١ + ب ١ ن ر + ب ٢ ط ر + ب ٣ ق ر ... (٢٢-١٠)

$$\ln P_1 = \alpha_1 + \beta_1 W_i + \beta_2 L_i + \beta_3 H_i$$

لو ث ٢ = (أ ١ + أ ٢) + ب ١ ن ر + ب ٢ ط ر + ب ٣ ق ر ...... (٢٢-١١)

$$\ln P_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_1 W_i + \beta_2 L_i + \beta_3 H_i$$

لو ث ٣ = (أ ١ + أ ٣) + ب ١ ن ر + ب ٢ ط ر + ب ٣ ق ر ...... (٢٢-١٢)

$$\ln P_3 = (\alpha_1 + \alpha_3) + \beta_1 W_i + \beta_2 L_i + \beta_3 H_i$$

حيث تشير كل معادلة من المعادلات الثلاثة السابقة إلى القيمة المتوقعة للوغاريتم الطبيعي لسعر الموديل . ولا شك أن هذا يتضمن أن تأثير النوعية على السعر لا يختلف من موديل لآخر ، فزيادة قوة الموتور (ق) بمقدار وحدة واحدة تؤثر على لوغاريتم السعر بمقدار "ب٣" بالنسبة لأي نموذج . وهكذا الأمر بالنسبة للخصائص الأخرى .

وبعد عزل أثر التغير في النوعية ممثلة في معاملات الانحدار الجزئية ب ١ ، ب ٢، ب ٣ ، فإن التغير في السعر الذي لا يرجع للنوعية ينعكس في تغير المعلمة التقاطعية من نموذج لآخر .أي أن التغير الصافي في السعر من نموذج لآخر ومن سنة لأخرى يتمثل في الفرق بين المعلمات التقاطعية ، حيث :

التغير الصافي في السعر بين ١ ، ٢ = لوث ٢ - لوث ١ = أ٢ (α_2)

التغير الصافي في السعر بين ١ ، ٣ = لوث ٣ - لوث ١ = أ٣ (α_3)

التغير الصافي في السعر بين ٢ ، ٣ = لوث ٣ - لوث ٢ = (أ٣ - أ٢) ($\alpha_3 - \alpha_2$)

ويلاحظ مما سبق أن معاملات المتغير الثنائي و ٢ ، و ٣ تمثل التغيرات الصافية في لوغاريتم السعر عبر الزمن أو بين الموديلات بعد عزل أثر النوعية . وللحصول على التغير الصافي في السعر كنسبة يجب الحصول على مقابل اللوغاريتم . فلو اتخذنا السنة ١ كنقطة أساس فإن الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية (بعد استبعاد النوعية) لهذه السنة = ١ ، والرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية في سنة ٢ = مقابل لوغاريتم أ ٢ = هـ^أ٢ ، والرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية في سنة ٣ = مقابل لوغاريتم أ ٣ = هـ^أ٣

∴ هـ^أ٢ - ١ = معدل التغير في السعر الصافي في العام ٢ عنه في العام ١ ($e^{\alpha_2} - 1$)

هـ^أ٣ - ١ = معدل التغير في السعر الصافي في العام ٣ عنه في العام ١ ($e^{\alpha_3} - 1$)

وتكون هذه النتائج صحيحة فقط إذا كانت الصيغة المستخدمة في التقدير هي شبه لوغاريتميه على النحو السابق .أما إذا كانت الصيغة المقدرة خطية على النحو التالي :

ث ر = أ ١ + أ ٢ و ٢ر + أ ٣ و ٣ر + ب ١ ن ر + ب ٢ ط ر + ب ٣ ق ر + ع ر ... (٢٢-١٣)

$$P_i = \alpha_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 W_i + \beta_2 L_i + \beta_3 H_i + u_i$$

فإن اتخاذ السنة ١ كسنة أساس يعني أن :

الرقم القياسي للسعر في السنة ١ = ١

حيث ثَ = أ١ = متوسط السعر المعدل للنوعية في سنـــة الأســاس

الرقم القياسي للسعر في السنة ٢ = ١+ أ٢ / ثَ = ١ + أ٢ / أ١

الرقم القياسي للسعر في السنة ٣ = ١+ أ٣ / ثَ = ١ + أ٣ / أ١

ويوجد هناك بعض الفروض العلمية التي يمكن اختبارها مثل :

(أ) " النوعية لا تؤثر على السعر " . ويمكن اختبار هذا الفرض من خلال اختبار فرض العدم :

ف : ب١ = ب٢ = ب٣ = صفر في معادلة (٢٢-٩) : $H0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

في مواجهة الفرض البديل :

ف١ : ب١ ≠ صفر ، ب٢ ≠ صفر ، ب٣ ≠ صفر : $H_1 : \beta_1 \neq , \beta_2 \neq 0 , \beta_3 \neq 0$

(ب) " إحدى النوعيات لا تؤثر في السعر ". ويمكن اختبار ذلك عن طريق اختبار معنوية كل معلمة انحدارية من المعلمات الثلاثة ب١ ، ب٢ ، ب٣ على حده .

(حـ) كل التغيرات في السعر خلال الفترة ١ - ٣ ترجع لتغيرات النوعية . أي أنه بعد استبعاد أثر التغير في النوعية فإن " السعر المعدل للنوعية " Quality - Adjusted Price Index لم يتغير . أي أن التضخم لم يكن له أثر على السعر .

ويمكن اختبار هذا الفرض من خلال :

فرض العدم : ف : أ٢ = أ٣ = صفر $(\alpha_2 = \alpha_3 = 0)$

الفرض البديل : ف١ : أ٢ ≠ صفر ، أ٣ ≠ صفر $(\alpha_2 \neq 0 , \alpha_3 \neq 0)$

(د) أن السعر المعدل للنوعية لم يتغير بين سنتين ٢ ، ٣ فقط .

يمكن اختبار هذا الفرض من خلال :

فرض العدم : ف : أ٣ - أ٢ = صفر $(\alpha_3 - \alpha_2 = 0)$

الفرض البديل : ف ١ :   أ٣ – أ٢ ≠ صفر $(\alpha_3 - \alpha_2 \neq 0)$

(هـ) يمكن قياس مقدار التغير في نوعية سيارة ما عبر الفترة ١ – ٣ قياساً كمياً .

فبعد تقدير الصيغة :

لوث̂ ر = أ̂ ١ + أ̂ ٢ و٢ر + أ̂ ٣ و٣ر + ب̂ ١ ن ر + ب̂ ٢ ط ر + ب̂ ٣ ق ر

$$\ln \hat{P}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \ D_2 + \ \hat{\alpha}_3 \ D_3 + \hat{\beta}_1 W_i + \hat{\beta}_2 \ L_i + \hat{\beta}_3 \ H_i$$

نطرح من طرفي هذه المعادلة مقدار التغير الصافي في السعر غير الراجع للنوعية وهو أ̂ ٢ و٢ر + أ̂ ٣ و٣ر $(\hat{\alpha}_2 \ D_{2i} + \ \hat{\alpha}_3 \ D_{3i})$ **فنحصل على :**

لوث̂ ر – أ̂ ٢ و٢ر – أ̂ ٣ و٣ر = أ̂ ١ + ب̂ ١ ن ر + ب̂ ٢ ط ر + ب̂ ٣ ق ر .... (٢٢-١٤)

$$\ln \hat{P}_i - \hat{\alpha}_2 \ D_{2i} - \ \hat{\alpha}_3 \ D_{3i} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 W_i + \hat{\beta}_2 \ L_i + \hat{\beta}_3 \ H_i$$

وباستخدام الطرف الأيسر (الأيمن) يمكن تحديد مقدار التغير في السعر الراجع لتغير النوعية . ولتحديد مقدار التغير في النوعية بين الفترتين الأولى والثالثة نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بحساب الصيغة التالية للفترة الأولى :

أ̂ ١ + ب̂ ١ ن̄ ١ + ب̂ ٢ ط̄ ١ + ب̂ ٣ ق̄ ١ $(\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \bar{W}_1 + \hat{\beta}_2 \ \bar{L}_1 + \hat{\beta}_3 \ \bar{H}_1)$

(٢) نقوم بحساب نفس الصيغة للفترة الثالثة :

أ̂ ١ + ب̂ ١ ن̄ ٣ + ب̂ ٢ ط̄ ٣ + ب̂ ٣ ق̄ ٣ $(\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \bar{W}_3 + \hat{\beta}_2 \ \bar{L}_3 + \hat{\beta}_3 \ \bar{H}_3)$

(٣) نحصل على الفرق بينهما الذي يمثل مقدار التغير في النوعية :

Δع = ب̂ ١ (ن̄ ٣ – ن̄ ١) + ب̂ ٢ (ط̄ ٣ – ط̄ ١) + ب̂ ٣ (ق̄ ٣ – ق̄ ١) .... (٢٢-١٥)

$$\Delta Q = \hat{\beta}_1 \ (\bar{W}_3 \ - \bar{W}_1) + \hat{\beta}_2 (\bar{L}_3 \ - \bar{L}_1 \ ) + \hat{\beta}_3 \ (\ \bar{H}_3 \ - \bar{H}_1)$$

ويمثل هذا الفرق لوغاريتم (السعر غير المعدل للنوعية / السعر المعدل للنوعية)

وعندما قام كورت بتطبيق طريقة سعر الرفاهية على بيانات جنرال موتورز اتضح له أن السعر المعدل للنوعية انخفض بنسبة ٥٥ ٪ خلال الفترة ١٩٢٥ - ١٩٣٥، ومن ثم فإن الزيادة بنسبة ٤٥ ٪ المنوه عنها عند استخدام بيانات منشورة كانت ترجع أساساً للتغير في النوعية . وعند استبعاد التغير في النوعية اتضح أن أسعار السيارات انخفضت ولم ترتفع .

المبحث الثاني

تطبيقات لطريقة سعر الرفاهية

(٢٢-٢-١) تطبيق طريقة سعر الرفاهية على أسعار الكمبيوتر

Application of the Hedonic Method to Price Indexes for Computers:

ينظر المتخصصون في ا لاقتصاد القياسي Econometricians إلى البدائل غير المتجانسة على أن كل واحدة منها تمثل سلة من الخصائص وأن سعرها هو المقابل لكل هذه الخصائص . وتساهم كل خاصية بنسبة معينة من السعر . وليس من الضروري أن تظل العلاوة المدفوعة مقابل كل خاصية ثابتة عبر الزمن وإنما قد تكون متغيرة .

ولقد حدثت هناك تطورات كثيرة في صناعة الكمبيوتر منذ نشأتها . ويمكن التمييز في هذا الصدد بين ثلاثة أجيال للكمبيوتر ، امتد الجيل الأول خلال الفترة ١٩٥٣ / ١٩٥٤ ميلادية حتى ١٩٥٩ / ١٩٦٠ وهو جيل الكمبيوتر الضخم Mainfrme Computer . وكان هذا الجيل يقوم على الأنابيب الفارغة vacuum tubes . أما الجيل الثاني فقد امتد خلال الفترة ١٩٦٠ حتى ١٩٦٤ أو ١٩٦٥ ميلادية وهو الجيل الذي تم فيه إحلال الترانزستور الصلب Solid-State Transistor محل الأنابيب الفارغة . وبالنسبة للجيل الثالث والذي بدأ بعد عام ١٩٦٥ فلقد قام على تكنولوجيا الدوائر المتكاملة Integrated Circuits متمثلاً في سلسلة كمبيوتر IBM 360 .

ومن التطورات الأخرى التي لحقت بصناعة الكمبيوتر هو انفصال جانب الأجهزة الصلبة Hardware عن جانب البرامج والأقراص المرنة Software وذلك منذ أواخر الستينات .

بالإضافة إلى ذلك ظهرت هناك عملية تأجير أجهزة الكمبيوتر بدلاً من بيعها ولذا وجب التمييز بين أسعار التأجير وأسعار الشراء .

ومن الدراسات الرائدة في هذا المجال دراسة قام بها Gregory C. Chow عام ١٩٦٧ عن الطلب على الكمبيوتر ، وكان الهدف من الدراسة هو تفسير نمو الطلب

على خدمات الكمبيوتر في الولايات المتحدة خلال الفترة ١٩٥٥ – ١٩٦٥ . وقد أراد تشاو أن يفصل نمو الطلب على خدمات الكمبيوتر الراجع للتغير في النوعية كنتيجة مباشرة للتغير التكنولوجي ، عن نمو الطلب الراجع للتغير في السعر المعدل للنوعية (أي الصافي من أثر النوعية) .

واستخدم تشاو سعر التأجير الشهري للكمبيوتر (ث ر) P_t كمتغير تابع ، ثم اختار ٣ خصائص للكمبيوتر لتخدم كمتغيرات تفسيرية . وافترض أن الخصائص الأخرى التي تم حذفها مرتبطة بدرجة كبيرة مع الخصائص التي تم التركيز عليها . وتتمثل هذه الخصائص في :

(أ) وقت الضرب (L_t) Multiplication Time محسوباً على أساس متوسط الوقت اللازم لإتمام عملية ضرب معينة (ض ر) . وبالطبع فإن هذه الصفة تعكس خاصية السرعة في الكمبيوتر . ومن الأفضل أن نحسب هذا المتغير كمتوسط مرجح للوقت اللازم لإتمام مختلف العمليات كالضرب والجمع وغيرها . ومن المتوقع أن توجد هناك علاقة عكسية بين هذا المتغير وسعر تأجير الكمبيوتر ، فكلما قل الوقت اللازم لإتمام العملية كلما ارتفع سعر تأجير الكمبيوتر لسرعة إنجازه للمهمة .

(ب) حجم الذاكرة (M_t) Memory size (م ر) وقد تم حساب هذا المتغير كحاصل ضرب عدد الكلمات التي تسعها الذاكرة بالألف في عدد الأرقام الثنائية لكل كلمة # of binary digits . ومن المتوقع أن توجد هناك علاقة طردية بين حجم الذاكرة وسعر تأجير الكمبيوتر .

(حـ) متوسط الوقت اللازم لاستدعاء المعلومة من الذاكرة (س ر) R_t ، وهى صفة أخرى تعكس السرعة في حالة الكمبيوتر . ومن المتوقع أن توجد هناك علاقة عكسية بين هذا المتغير وسعر تأجير الكمبيوتر .

وقام تشاو بجمع بيانات عن عدد من الموديلات المختلفة للكمبيوتر يتراوح بين ٩ إلى ١٨ في كل سنة . واستخدم الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة التالية في تقدير العلاقة بين سعر التأجير وخصائص الكمبيوتر المختلفة .

لوث ر = لو أ + ب ١ لوض ر + ب ٢ لوم ر + ب ٣ لوس ر + ع ر .... (٢٢-١٦)

$$\ln P_t = \ln A + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln M_t + \beta_3 \ln R_t + u_t$$

وقام بتقدير العلاقة (٢٢-١٦) لكل سنة من السنوات الممتدة من ١٩٥٥ حتى ١٩٦٥ .

ثم قام بتقدير دالة مستخدماً بيانات سلسلة قطاعية للفترة ١٩٦٠ - ١٩٦٥ احتوت على ٨٢ مشاهدة . وكانت الصيغة المقدرة تحتوى على متغير ثنائي Dummy Variable لكل سنة من السنوات مع اعتبار ١٩٦٠ سنة أساس تنعكس في المعلمة التقاطعية .

ومن ثم كانت الصيغة المقدرة على النحو التالى :

لوث ر = أ*٠ + أ ١ و ١ + أ ٢ و ٢ + أ ٣ و ٣ + أ ٤ و ٤ + أ ٥ و ٥ + ب ١ لوض ر + ب ٢ لوم ر

+ ب ٣ لوس ر + ع ر .... (٢٢-١٧)

$$\ln P_t = \alpha^*_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \alpha_4 D_4 + \alpha_5 D_5 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln M_t + \beta_3 \ln R_t + u_t$$

وجاء تقدير هذه الصيغة على النحو التالي :

لوث ر = - ٠,١٠٤٥ - ٠,١٣٩٨ و ١ - ٠,٤٨٩١ و ٢ - ٠,٥٩٣٨ و ٣

(٠,١٦٦٥) (٠,١٧٣٨) (٠,١٦٦١)

- ٠,٩٢٤٨ و ٤ - ١,١٦٣ و ٥ - ٠,٠٦٥٤ لوض ر + ٠,٥٧٩٣ لوم ر + ٠,١٤٠٦ لوس ر

(٠,١٦٦٣) (٠,١٦٦) (٠,٠٢٨٤) (٠,٠٣٥٤) (٠,٠٢٩٣)

ر ٢ = ٠,٩٠٨ .... (٢٢-١٨)

ويلاحظ بشأن المعادلة (٢٢-١٨) ما يلي :

(١) أن الخصائص الثلاثة ممثلة في سرعة إتمام العمليات وحجم الذاكرة وسرعة استدعاء المعلومات من الذاكرة تؤثر تأثيراً جوهرياً على سعر تأجير الكمبيوتر ، وإن كان حجم الذاكرة (م ر) هو أكثرها معنوية في التأثير نظراً لأنه صاحب أعلى " t " محسوبة (٠,٥٧٩٣ ÷ ٠,٠٣٥٤ = ١٦,٣٦) .كما أن تأثيرات هذه الخصائص على السعر تتفق مع التوقعات القبلية .

(٢) تشير المعلمات المقدرة للخصائص الثلاثة إلى المرونات حيث :

$\hat{\text{ب}}_{١}$ = – ٠,٠٦٥٤ وهى تشير إلى مرونة سعر التأجير بالنسبة لوقت إتمام العمليات . فكلما قل وقت إتمام العمليات بنسبة ١٠ ٪ ازداد سعر التأجير بنسبة ٠,٦ ٪ تقريباً .

$\hat{\text{ب}}_{٢}$ = ٠,٥٧٩٣ وهى تشير إلى مرونة سعر التأجير بالنسبة لحجم الذاكرة . فكلما زاد حجم الذاكرة بنسبة ١٠ ٪ زاد سعر التأجير بنسبة ٥,٨ ٪ تقريباً .

$\hat{\text{ب}}_{٣}$ = – ٠,١٤٠٦ تشير إلى مرونة سعر التأجير بالنسبة لوقت استدعاء المعلومة . فكلما قل وقت استدعاء المعلومة من الذاكرة بنسبة ١٠ ٪ ، ارتفع سعر التأجير بنسبة ١,٤ ٪ تقريباً .

(٣) ومع أخذ الإشارة في الاعتبار نجد أن معلمات المتغيرات الثنائية تتناقص عبر الزمن وهو ما يشير إلى تزايد مقدار الانخفاض في سعر تأجير الكمبيوتر بعد عزل أثر النوعية مع مرور الزمن .

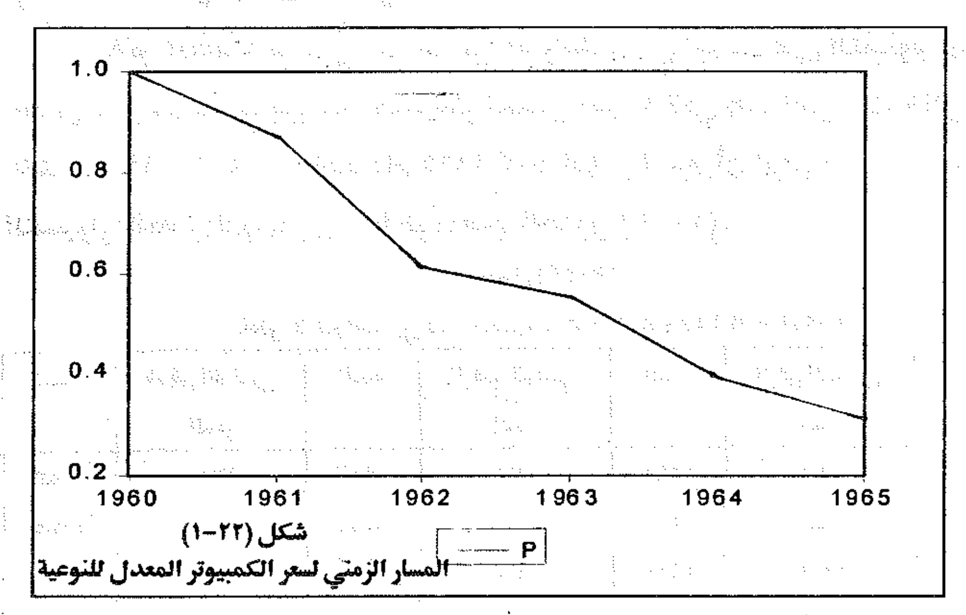
(٤) يمكن حساب الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية Quality- Adjusted Price Index عن طريق مقابل اللوغاريتم للمعلمات المقدرة للمتغيرات الثنائية مع اعتبار أن الرقم القياسي لسعر سنة الأساس (١٩٦٠) = ١ .

ويوضح الجدول (٢٢-١) الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية خلال السنوات المختلفة.

جدول (٢٢-١) – الرقم القياسي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية

السنة	معلمة المتغير الثنائي	الرقم القياسي للسعر المعدل	بيان
١٩٦٠		١	
١٩٦١	٠,١٣٩٨ –	٠,٨٦٩٥	$(٢,٧١٨)^{-٠,١٣٩٨}$
١٩٦٢	٠,٤٨٩١ –	٠,٦١٣٢	$(٢,٧١٨)^{-٠,٤٨٩١}$
١٩٦٣	٠,٥٩٣٨ –	٠,٥٥٢٢	$(٢,٧١٨)^{-٠,٥٩٣٨}$
١٩٦٤	٠,٩٢٤٨ –	٠,٣٩٦٦	$(٢,٧١٨)^{-٠,٩٢٤٨}$
١٩٦٥	١,١٦٣ –	٠,٣١٢٥	$(٢,٧١٨)^{-١,١٦٣}$

ويتضح من هذا الجدول أن السعر المعدل للنوعية انخفض عام ١٩٦٥ عن نظيره عام ١٩٦٠ بنسبة = ١ - ٠,٣١٢٥ = ٦٨,٨ ٪ تقريباً . كما يوضح الشكل (٢٢-١) المسار الزمني للرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية :



شكل (٢٢-١)
المسار الزمني لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية

وبتقدير معدل النمو المركب باستخدام الصيغة شبه اللوغاريتميه نحصل على النتيجة التالية الموضحة بالجدول (٢٢-٢) .

جدول (٢٢-٢)

Dependent Variable: LP
Method: Least Squares
Date: 05/24/04   Time: 17:14
Sample: 1960 1965
Included observations: 6

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.275763	0.055967	4.927263	0.0079
T	-0.236443	0.014371	-16.45284	0.0001

R-squared	0.985438	Mean dependent var	-0.551787
Adjusted R-squared	0.981798	S.D. dependent var	0.445601
S.E. of regression	0.060118	Akaike info criterion	-2.523813
Sum squared resid	0.014457	Schwarz criterion	-2.593227
Log likelihood	9.571440	F-statistic	270.6961
Durbin-Watson stat	3.343025	Prob(F-statistic)	0.000080

وفقاً لهذه النتيجة فإن الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية كان ينخفض سنوياً بنسبة ٢٣,٦ ٪ تقريباً خلال الفترة ١٩٦٠ – ١٩٦٥ .

(٢٢–٢–٢) بعض النتائج التطبيقية

قام Triplett بفحص عدد كبير من الدراسات التي أجريت على الكمبيوتر ثم حصل على متوسط مرجح لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية لكل هذه الدراسات خلال الفترة ١٩٥٣ – ١٩٧٢ . وبأخذ عام ١٩٦٥ كسنة أساس اتضح أن الرقم القياسي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية كان كما هو موضح بالجدول (٢٢–٣) .

جدول (٢٢–٣)

تطور الرقم القياسي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية (٥٣ – ١٩٧٢)

السنة	الرقم القياسي للسعر	السنة	الرقم القياسي للسعر	السنة	الرقم القياسي للسعر
١٩٥٣	١٣٢٠	١٩٦٠	٤٣٥	١٩٦٧	٢٦,٩
١٩٥٤	١١٣٩	١٩٦١	٣٣٢	١٩٦٨	٢٤,٣
١٩٥٥	١٠١٠	١٩٦٢	٢٣٩	١٩٦٩	٢٤,٢
١٩٥٦	٨٦٣	١٩٦٣	١٨٣	١٩٧٠	٢٣,٣
١٩٥٧	٧٦١	١٩٦٤	١٣٩	١٩٧١	١٨,١
١٩٥٨	٦٨٩	١٩٦٥	١٠٠	١٩٧٢	١٤,٨
١٩٥٩	٥٩١	١٩٦٦	٣٨		

ويتضح من هذه النتائج ما يلي :

(١) أن سعر الكمبيوتر المعدل للنوعية كان يتناقص سنوياً خلال الفترة ١٩٥٣ – ١٩٧٢ .

(٢) لقد بلغ سعر الكمبيوتر المعدل للنوعية عام ١٩٧٢ حوالي ١٪ فقط من سعره عندما تم تقديمه لأول مرة عام ١٩٥٣ .

(٣) بعد تقديم الجيل الثاني للكمبيوتر في ١٩٥٩ ، ١٩٦٠ انخفض سعر الكمبيوتر بنسبة كبيرة عنها عام ١٩٥٨ بلغت ٣٧ ٪ تقريبا .

(٤) لقد بلغ معدل الانخفاض السنوي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية خلال الفترة ٥٣ – ١٩٧٢ حوالي ٢٧ ٪.

ولقد ظهرت دراسات بعد ١٩٧٢ لتحليل أسعار الكمبيوتر . وكان من أبرز هذه الدراسات دراسة Cole وآخرين . ولقد ركزت هذه الدراسة على أجزاء الكمبيوتر وليس على الكمبيوتر كنظام متكامل . وعلى وجه التحديد تم التركيز على :

(أ) مشغلات الكمبيوتر   Computer processors

(ب) السواقات الصلبة   Hard disk drives

(حـ) الطابعة   Printer

(ء) الشاشة   Monitor

ويوجد لكل جزء من هذه الأجزاء خصائص مثل السرعة وحجم الذاكرة للمشغلات ، والطاقة للسواقة ، وهكذا .

وقد توصلت هذه الدراسة إلى أن دالة الأسعار كانت متجانسة من الدرجة الأولى لكل وحدة من الوحدات السابقة ، وهو ما يعنى أن مضاعفة خصائص أي جزء يضاعف السعر .

ولقد اتضح من دراسة أخرى أن سعر الكمبيوتر المعدل للنوعية خلال الفترة ١٩٧٢ - ١٩٨٤ كان مساره كما بالجدول (٢٢-٤) باعتبار أن ١٩٨٢ هي سنة الأساس :

جدول (٢٢-٤)

تطور الرقم القياسي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية (٧٢ - ١٩٨٤)

السنة	الرقم القياسي لسعر الكمبيوتر المعدل للنوعية	السنة	الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية
١٩٧٢	٤٠٨,١	١٩٧٩	١٤٦,٢
١٩٧٣	٣٦٩,٣	١٩٨٠	١١٧,٥
١٩٧٤	٢٩١,١	١٩٨١	١٠٧,٤
١٩٧٥	٢٦٥,١	١٩٨٢	١٠٠
١٩٧٦	٢٣١,١	١٩٨٣	٧٧,١
١٩٧٧	١٩٩,٧	١٩٨٤	٦٨,٥
١٩٧٨	١٦٩,٣		

ووفقاً للتقديرات بالجدول عاليه فإن الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية كان يتناقص بمعدل سنوي ١٣,٨ ٪ في المتوسط خلال الفترة ٧٢ – ١٩٨٤ ، وبإدماج البيانات خلال الفترة ٥٣ – ١٩٧٢ مع الفترة ٧٢ – ١٩٨٤ يتضح أن الكمبيوتر الذي كان يتكلف ٥٣٢ دولار تقريباً عام ١٩٥٣ أصبح يتكلف ١ دولار عام ١٩٨٢ بعد استبعاد أثر النوعية .

مثال (٢٢–١)

أثر النوعية على أسعار السيارات

قام باحث بجمع بيانات عن عدد من موديلات مختلفة للسيارات خلال ٦ سنوات ١٩٩٠ – ١٩٩٥ بواقع ٨ موديلات في كل سنة . وكانت البيانات التي جمعها تتعلق بخصائص هذه الموديلات وأسعارها على النحو التالي :

سعر السيارة بالألف جنيه $P =$

قوة الموتور مقاسة بالقوة الحصانية $X_1 =$

مساحة الركوب بالمتر المربع $X_2 =$

استهلاك البنزين مقاساً بعدد اللترات / ١٠٠ كم $X_3 =$

وزن السيارة بالطن $X_4 =$

والمطلوب : (١) تحديد الخصائص ذات التأثير الجوهري على سعر السيارة .

(٢) تحديد المسار الزمني للرقم القياسي لسعر السيارة المعدل للنوعية .

(٣) تحديد أثر النوعية على السعر بوجهٍ عام خلال الفترة (٩٠ – ١٩٩٥) .

للإجابة على الأسئلة السابقة لا بد من استحداث متغيرات ثنائية تعبر عن الزمن على النحو التالي:

إذا كانت السنة ١٩٩١ $D_1 = 1$

بالنسبة للسنوات الأخرى $D_1 = 0$

إذا كانت السنة ١٩٩٢ $D_2 = 1$

بالنسبة للسنوات الأخرى $D_2 = 0$

إذا كانت السنة ١٩٩٣ $D_3 = 1$

بالنسبة للسنوات الأخرى $D_3 = 0$

إذا كانت السنة ١٩٩٤ $D_4 = 1$

بالنسبة للسنوات الأخرى $D_4 = 0$

إذا كانت السنة ١٩٩٥ $D_5 = 1$

بالنسبة للسنوات الأخرى $D_5 = 0$

وبالتالي فإن البيانات تصبح على النحو التالي الموضح بالجدول (٢٢-٥) :

جدول (٢٢-٥)-بيانات عن الموديلات المختلفة للسيارات (افتراضية)

obs	P	X1	X2	X3	X4	D1	D2	D3	D4	D5
1	30. 00	15. 00	2.00	45.00	1.50	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	32. 00	15.20	2.10	41.00	1.60	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	35. 00	15.60	2.28	36.00	1.65	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	40. 00	15.90	2.60	30.00	1.70	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	42. 00	16.00	2.80	27.00	1.75	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	45. 00	16.20	3.00	24.00	1.90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	48. 00	16.50	3.15	21.50	1.92	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	50. 00	16.70	3.25	19.10	1.95	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	45. 00	16.20	3.00	24.00	1.90	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	47. 00	16.40	3.10	22.00	1.92	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	48. 00	16.90	3.15	20.70	1.93	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	49. 00	17.00	3.18	18.50	1.94	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
13	50. 00	17.50	3.25	17.10	1.96	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	52. 00	17.80	3.40	15.10	1.98	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	55. 00	18.00	3.60	14.00	2.00	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
16	60. 00	20.00	3.80	12.00	2.40	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17	55. 00	18.00	3.60	14.00	2.00	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
18	58. 00	19.00	3.58	13.00	2.20	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
19	60. 00	20.00	3.80	12.00	2.40	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
20	65. 00	23.00	4.00	11.00	2.60	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
21	69. 00	25.50	4.50	10.50	2.65	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
22	72. 00	27.00	4.70	10.00	2.80	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
23	73. 00	28.00	4.80	9.90	2.90	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
24	75. 00	29.50	4.90	9.50	3.00	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
25	72. 00	27.00	4.70	10.00	2.80	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
26	75. 00	27.50	4.90	9.50	3.00	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
27	79. 00	29.00	5.00	9.00	3.30	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
28	80. 00	29.50	5.20	8.90	3.35	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
29	82. 00	31.00	5.40	8.80	3.40	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
30	85. 00	33.00	5.70	8.60	3.50	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
31	86. 00	33.50	5.80	8.50	3.55	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
32	89. 00	34.00	6.00	8.30	3.60	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
33	85. 00	33.00	5.70	8.60	3.50	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
34	86. 00	35.00	5.80	8.50	3.55	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
35	88. 00	35.50	5.90	8.30	3.57	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
36	89. 00	37.00	6.00	8.30	3.60	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
37	90.00	38.20	6.20	8.20	3.70	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
38	92.00	39.00	6.40	8.10	3.80	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
39	95.00	42.00	6.60	7.90	4.00	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
40	96.00	43.20	6.70	7.80	4.10	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
41	95.00	42.50	6.60	7.90	4.00	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
42	97.00	44.00	6.80	7.80	4.30	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
43	98.00	45.30	6.90	7.70	4.40	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
44	99.00	46.00	7.00	7.70	4.50	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
45	100.00	48.00	7.20	7.60	4.55	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
46	102.00	50.00	7.60	7.50	4.60	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
47	105.00	52.00	7.90	7.40	4.80	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
48	110.00	54.00	8.50	7.20	5.00	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

وبتجريب صيغ التقدير المختلفة نحصل على النتائج التالية :

أولاً : استخدام الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة :

$$P = A\, X_1^{b1}\, X_2^{b2}\, X_3^{b3}\, X_4^{b4}\, e^{\sum_{i=1}^{5} a_i D_i + u_i}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$$L\,P = A^* + b_1 LX_1 + b_2 LX_2 + b_3 LX_3 + b_4 LX_4 + a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + a_5 D_5 + u_i$$

وباستخدام هذه الصيغة في التقدير نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٢-٦) :

جدول (٢٢-٦)

Dependent Variable: LP
Method: Least Squares
Date: 05/24/04 Time: 18:32
Sample(adjusted): 2 48
Included observations: 47 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 16 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.895890	0.136199	28.60449	0.0000
LX1	0.063407	0.066683	0.950881	0.3480
LX2	0.386265	0.064308	6.006491	0.0000
LX3	-0.243923	0.026156	-9.325531	0.0000
LX4	0.143455	0.057676	2.487242	0.0176
D1	-0.015717	0.009780	-1.607087	0.1168
D2	-0.012019	0.012015	-1.000368	0.3238
D3	-0.003020	0.013880	-0.217546	0.8290
D4	-0.008877	0.016882	-0.525801	0.6023
D5	-0.015430	0.019118	-0.807101	0.4249
AR(1)	0.580757	0.129914	4.470323	0.0001

R-squared	0.999354	Mean dependent var	4.232161
Adjusted R-squared	0.999175	S.D. dependent var	0.327548
S.E. of regression	0.009409	Akaike info criterion	-6.292890
Sum squared resid	0.003187	Schwarz criterion	-5.85
Log likelihood	158.8829	F-statistic	5571
Durbin-Watson stat	2.355106	Prob(F-statistic)	0.00

$$\underset{(0.1349)}{L\,P = 3.8986} + \underset{(0.066)}{0.06\, L X_1} + \underset{(0.064)}{0.389\, L X_2} - \underset{(0.0259)}{0.244\, L X_3} + \underset{(0.0577)}{0.145\, L X_4}$$

$$- \underset{(0.0096)}{0.0156\, D_1} - \underset{(0.0119)}{0.0119\, D_2} - \underset{(0.0138)}{0.0028\, D_3} - \underset{(0.0168)}{0.0085\, D_4} - \underset{(0.019)}{0.015\, D_5}$$

$$Adj\ R^2 = 0.999 \quad , DW=2.35$$

(١) بفحص معادلة الانحدار المقدرة عاليه يتضح ما يلي :

أ – أن قوة الموتور (X_1) وإن كانت تؤثر تأثيراً طردياً على سعر السيارة إلا أن هذا التأثير غير جوهري ، حيث أن :

$$S\hat{b}_1 > \frac{\hat{b}_1}{2} \qquad (0.066 > 0.03)$$

ب – أن مساحة الركوب بالسيارة تؤثر طردياً وجوهرياً على سعر السيارة . فمرونة سعر السيارة بالنسبة لمساحة الركوب (X_2) = ٠,٣٨٩ ، وهو ما يعني أن كل زيادة في مساحة الركوب بالسيارة بنسبة ١٠ ٪ يترتب عليها زيادة سعر السيارة بنسبة ٣,٩ ٪ تقريباً.

حـ – أن معدل استهلاك السيارة للبنزين (X_3) يؤثر عكسياً وجوهرياً على سعر السيارة . فمرونة سعر السيارة بالنسبة لمعدل استهلاك البنزين/١٠٠ كم = – ٠,٢٤٤، وهو ما يعني أن كل انخفاض في كمية استهلاك البنزين بنسبة ١٠ ٪ يترتب عليها ارتفاع في سعر السيارة بنسبة ٢,٤٤ ٪.

د – أن وزن السيارة (X_4) ذو تأثير طردي وجوهري على سعر السيارة . فمرونة سعر السيارة بالنسبة لوزنها = ٠,١٤٥ وهو ما يعني أن كل زيادة في وزن السيارة بنسبة ١٠ ٪ يترتب عليها زيادة السعر بنسبة ١,٤٥ ٪ .

(٢) يمكن تحديد الرقم القياسي لسعر السيارة المعدل للنوعية من خلال مقابل اللوغاريتم لمعلمات المتغيرات الثنائية على النحو الموضح بالجدول (٢٢–٧) :

جدول (٢٢–٧)– تطور الرقم القياسي لسعر السيارة المعدل للنوعية

السنة	المعلمة المقدرة	الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية	بيان
١٩٩٠	–	١	
١٩٩١	٠,٠١٥٦-	٠,٩٨٥	$(٢,٧١٨)^{-٠,٠١٥٦}$
١٩٩٢	٠,٠١١٩-	٠,٩٨٨	$(٢,٧١٨)^{-٠,٠١١٩}$
١٩٩٣	٠,٠٠٢٨-	٠,٩٩٧	$(٢,٧١٨)^{-٠,٠٠٢٨}$
١٩٩٤	٠,٠٠٨٥-	٠,٩٩١	$(٢,٧١٨)^{-٠,٠٠٨٥}$
١٩٩٥	٠,٠١٥-	٠,٩٨٥	$(٢,٧١٨)^{-٠,٠٠٨٥}$

وبتقدير معدل النمو المركب للرقم القياسي لسعر السيارات المعدل خلال الفترة ٩٠ – ١٩٩٥ كما بالجدول (٢٢–٨) نجد أنه لا يختلف جوهرياً عن الصفر ، مما يعني أن هذا السعر كان ثابتاً تقريباً خلال هذه الفترة وأنه لم يتأثر بالتضخم . كما يمكن القول أن كل التغيرات في سعر السيارات خلال هذه الفترة كانت ترجع للتغيرات في النوعية ، وهذا ما يظهره معامل التحديد المعدل ٩٩,٩ ٪ .

جدول (٢٢–٨)

Dependent Variable: LPX
Method: Least Squares
Date: 05/24/04 Time: 18:57
Sample: 1990 1995
Included observations: 6

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.004229	0.006030	-0.701387	0.5217
T	-0.001379	0.001548	-0.890921	0.4233

R-squared	0.165578	Mean dependent var	-0.009058
Adjusted R-squared	-0.043027	S.D. dependent var	0.006342
S.E. of regression	0.006477	Akaike info criterion	-6.979833
Sum squared resid	0.000168	Schwarz criterion	-7.049246
Log likelihood	22.93950	F-statistic	0.793740
Durbin-Watson stat	2.151310	Prob(F-statistic)	0.423318

(٣) تحديد أثر التغير في النوعية على السعر :

نقوم بحساب الصيغة التالية المعبرة عن التغير في النوعية خلال الفترة (٩٠ – ٩٥) .

$$\Delta Q = \hat{b}_1 [(L\overline{X_1})_5 - (L\overline{X}_1)_1] + \hat{b}_2 [(L\overline{X}_2)_5 - (L\overline{X}_2)_1] + \hat{b}_3 [(L\overline{X}_3)_5 - (L\overline{X}_3)_1] + \hat{b}_4 [(L\overline{X}_4)_5 - (L\overline{X}_4)_1]$$

$$\Delta Q = 0.06 (3.862 - 2.765) + 0.389 (1.986 - 0.9586) - 0.244 (2.077 - 3.37) + 0.145 (1.506 - 0.553)$$

$$\Delta Q = 0.932$$

ثم نقوم بحساب الصيغة التالية المعبرة عن التغير في السعر غير المعدل للنوعية :

$$\Delta P = L P_5 - L P_0 = 4.61165 - 3.6798 = 0.932$$

∴ الأثر النسبي للتغير في النوعية = $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{٠,٩٣٢}{٠,٩٣٢} = ١٠٠٪$.

أي أن كل التغير في السعر يرجع للتغير في النوعية ، وهو ما يعني أن السعر المعدل للنوعية ثابت .

جدول (٢٢-٩)

متوسطات سنة الأساس ١٩٩٠

	LP	LX1	LX2	LX3	LX4
Mean	3.679840	2.764913	0.958633	3.374573	0.553562
Median	3.713275	2.769454	0.992565	3.348517	0.545122
Maximum	3.912023	2.815409	1.178655	3.806662	0.667829
Minimum	3.401197	2.708050	0.693147	2.949688	0.405465
Std. Dev.	0.188611	0.037683	0.186779	0.308288	0.094771

جدول (٢٢-١٠)

متوسطات سنة ١٩٩٥

	LP	LX1	LX2	LX3	LX4
Mean	4.611657	3.862387	1.986323	2.027755	1.506229
Median	4.600145	3.849921	1.959996	2.034684	1.509602
Maximum	4.700480	3.988984	2.140066	2.066863	1.609438
Minimum	4.553877	3.749504	1.887070	1.974081	1.386294
Std. Dev.	0.047189	0.083554	0.085630	0.030057	0.067906

ثانياً : استخدام الصيغة الخطية :

$$P = A + a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + a_5 D_5 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + u$$

ووفقاً لهذه الصيغة فإن القيمة المتوقعة (متوسط) لسعر السيارة في سنة الأساس ١٩٩٠ هو:

$$E[P / X_1, X_2, X_3, X_4, D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = 0] =$$

$$\hat{P} = \hat{A} + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_2 + \hat{b}_3 X_3 + \hat{b}_4 X_4$$

و الفرق بين متوسط سعر السيارة في عام ١٩٩١ ، ١٩٩٠ كسنة أساس = a_1

و الفرق بين متوسط سعر السيارة في عام ١٩٩٢ ، ١٩٩٠ كسنة أساس = a_2

و الفرق بين متوسط سعر السيارة في عام ١٩٩٣ ، ١٩٩٠ كسنة أساس = a_3

والفرق بين متوسط سعر السيارة في عام ١٩٩٤ ، ١٩٩٠ كسنة أساس = a_4

والفرق بين متوسط سعر السيارة في عام ١٩٩٥ ، ١٩٩٠ كسنة أساس = a_5

وبتقدير الصيغة الخطية السابقة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٢-١١) .

جدول (٢٢-١١)

Dependent Variable: P
Method: Least Squares
Date: 05/24/04 Time: 19:05
Sample(adjusted): 2 48
Included observations: 47 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 15 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	32.70253	3.427577	9.541004	0.0000
X1	0.281166	0.186392	1.508466	0.1402
X2	4.512360	1.079561	4.179811	0.0002
X3	-0.958294	0.243301	-3.938724	0.0004
X4	5.902238	1.449931	4.070702	0.0002
D1	2.109247	1.918005	1.099709	0.2788
D2	3.241953	2.537844	1.277444	0.2096
D3	3.977060	2.632257	1.510894	0.1395
D4	2.746501	2.634374	1.042563	0.3041
D5	2.669671	2.746875	0.971894	0.3376
AR(1)	0.819217	0.052485	15.60848	0.0000

R-squared	0.999184	Mean dependent var	72.34043
Adjusted R-squared	0.998958	S.D. dependent var	21.63961
S.E. of regression	0.698576	Akaike info criterion	2.321911
Sum squared resid	17.56831	Schwarz criterion	2.754924
Log likelihood	-43.56491	F-statistic	4410.371
Durbin-Watson stat	1.982369	Prob(F-statistic)	0.000000

$$\hat{P} = \underset{(3.42)}{32.7} + \underset{(0.186)}{0.28}\,X_1 + \underset{(1.08)}{4.51}\,X_2 - \underset{(0.243)}{0.96}\,X_3 + \underset{(1.45)}{5.90}\,X_4$$

$$+ \underset{(1.92)}{2.11}\,D_1 + \underset{(2.54)}{3.24}\,D_2 + \underset{(2.63)}{3.98}\,D_3 + \underset{(2.63)}{2.75}\,D_4 + \underset{(2.75)}{2.67}\,D_5$$

$$\text{Adj } R^2 = 0.99 \quad , \; DW=1.98$$

وبفحص المعادلة السابقة يتضح ما يلي :

(١) أن قوة الموتور (X_1) تؤثر طردياً على سعر السيارة ولكن هذا التأثير غير جوهري

حيث : $S\hat{b}_1 > \frac{\hat{b}_1}{2}$

(٢) أن مساحة الركوب بالسيارة (X_2) تؤثر تأثيراً طردياً وجوهرياً على سعر السيارة

حيث : $S\hat{b}_2 < \frac{\hat{b}_2}{2}$. فكل زيادة في المساحة الداخلية للسيارة بمقدار متر مربع يصاحبها زيادة في ثمن السيارة بمقدار ٤٥١٢ جنيه في المتوسط .

(٣) أن معدل استهلاك السيارة من البنزين (X_3) يؤثر تأثيراً عكسياً وجوهرياً على سعر السيارة . فكل انخفاض في استهلاك البنزين للسيارة بمقدار ١ لتر / ١٠٠ كيلو يؤدي لارتفاع السعر بمقدار ٩٥٨ جنيه في المتوسط .

(٤) أن وزن السيارة (X_4) يؤثر تأثيراً طردياً وجوهرياً على سعر السيارة . فكل زيادة في وزن السيارة بمقدار ١ كيلو جرام يصاحبه زيادة في سعرها بمقدار ٥,٩ جنيه في المتوسط .

ويمكن تحديد الرقم القياسي لسعر السيارة المعدل بالنوعية كما بالجدول (٢٢-١٢) ، مع العلم أن متوسط سعر السيارة المعدل للنوعية في سنة الأساس ١٩٩٠ = ٣٢,٧ وهو يتمثل في المعلمة التقاطعية الخطية السابقة .

جدول (٢٢-١٢)

الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية وفقاً للصيغة الخطية

السنة	معلمة المتغير الثنائي	متوسط سعر السيارة المعدل للنوعية	الرقم القياسي P للسعر (١٩٩٠ = ١٠٠)
١٩٩٠	-	٣٢,٧٠	١
١٩٩١	٢,١١	٣٤,٨١	١,٠٦٥
١٩٩٢	٣,٢٤	٣٥,٩٤	١,٠٩٩
١٩٩٣	٣,٩٨	٣٦,٦٨	١,١٢٢
١٩٩٤	٢,٧٥	٣٥,٤٥	١,٠٨٥
١٩٩٥	٢,٦٧	٣٥,٣٧	١,٠٨٢

جدول (٢٢-١٣)

معدل النمو المركب في الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية

Dependent Variable: LPX
Method: Least Squares
Date: 05/24/04 Time: 19:17
Sample: 1990 1995
Included observations: 6

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.025146	0.031675	0.793881	0.4717
T	0.013457	0.008133	1.654536	0.1734

R-squared	0.406307	Mean dependent var	0.072245
Adjusted R-squared	0.257884	S.D. dependent var	0.039496
S.E. of regression	0.034024	Akaike info criterion	-3.662287
Sum squared resid	0.004631	Schwarz criterion	-3.731701
Log likelihood	12.98686	F-statistic	2.737489
Durbin-Watson stat	1.148301	Prob(F-statistic)	0.173361

ومن الواضح بالجدول (٢٢-١٣) أن التغير في الرقم القياسي للسعر المعدل للنوعية غير جوهري ، ويؤكد هذه الحقيقة أن معلمات المتغيرات الثنائية ليس لها معنوية إحصائية . وتتفق هذه النتيجة مع تلك التي تم الحصول عليها من استخدام الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة ، والتي تؤكد أن التضخم لم يؤثر جوهرياً على السعر المعدل للنوعية .

ويمكن تحديد أثر التغير في النوعية على السعر باستخدام الصيغة الخطية بين الفترتين فترة الأساس والفترة الخامسة كما يلي :

$$\Delta Q = \hat{b}_1 [(\overline{X}_1)_5 - (\overline{X}_1)_0] + \hat{b}_2 [(\overline{X}_2)_5 - (\overline{X}_2)_0]$$

$$+ \hat{b}_3 [(\overline{X}_3)_5 - (\overline{X}_3)_0] + \hat{b}_4 [(\overline{X}_4)_5 - (\overline{X}_4)_0]$$

$$\Delta Q = 0.28 (47.725 - 15.887) + 4.5 (7.31 - 2.647)$$

$$- 0.96 (7.6 - 30.45) + 5.9 (4.518 - 1.746)$$

$$\Delta Q = 8.915 + 20.984 + 21.936 + 16.355$$

$$\Delta Q = 68.19$$

$$\Delta P = P_5 - P_0 = 100.75 - 40.25 = 60.5$$

الأثر النسبي للنوعية = $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ = ٦٨,١٩ / ٦٠,٥ = ١,١٣

التغير النسبي في السعر المعدل للنوعية = ١ – ١,١٣ = – ٠,١٣

وهذا يعني أن كل التغير في السعر بين الفترتين الأولى والخامسة يرجع للتغير في النوعية . بل أكثر من هذا فإن التحسن في النوعية كان أكبر من الارتفاع في السعر بنسبة ١٣ ٪ ، وهو ما يعني أن السعر المعدل للنوعية انخفض بنسبة ١٣ ٪ ، ولكن نظراً لأن السعر المعدل للنوعية كان ثابتاً فإن النقص بمقدار ١٣ ٪ يعتبر غير جوهري .

جدول (٢٢–١٤)

متوسطات سنة الأساس ١٩٩٠

	P	X1	X2	X3	X4
Mean	40.25000	15.88750	2.647500	30.45000	1.746250
Median	41.00000	15.95000	2.700000	28.50000	1.725000
Maximum	50.00000	16.70000	3.250000	45.00000	1.950000
Minimum	30.00000	15.00000	2.000000	19.10000	1.500000
Std. Dev.	7.382412	0.596268	0.480974	9.384181	0.164224

جدول (٢٢–١٥)

متوسطات السنة الأخيرة ١٩٩٥

	P	X1	X2	X3	X4
Mean	100.7500	47.72500	7.312500	7.600000	4.518750
Median	99.50000	47.00000	7.100000	7.650000	4.525000
Maximum	110.0000	54.00000	8.500000	7.900000	5.000000
Minimum	95.00000	42.50000	6.600000	7.200000	4.000000
Std. Dev.	4.832923	4.016662	0.642401	0.226779	0.304651

الفصل الثالث والعشرون

دالة الطلب على الكهرباء

Estimation of Demand for Electricity

مقدمة

لعل السؤال الذي يثور منذ البداية لماذا نهتم بتقدير دالة الطلب على الكهرباء ؟ يوجد هناك عدد من الأسباب التي نوردها فيما يلي :

(أ) يحتاج التخطيط لإقامة محطة توليد كهرباء فضلاً عن تنفيذها إلى وقت طويل يمتد بين ٣ – ١٠ سنوات . ولتوفير الكميات المطلوبة من الكهرباء في وقتها المحدد يتعين التنبؤ بالطلب على الكهرباء في وقت مبكر حتى يمكن إقامة المحطات ذات الحجم الملائم والتي تمدنا بالكميات اللازمة من الكهرباء . وتستخدم عادةً دوال الطلب المقدرة للكهرباء في عمليات التنبؤ .

(ب) يؤدي إقامة محطات توليد كهرباء دون الاستعانة بتنبؤات دوال الطلب إما إلى وجود قصور في عرض الكهرباء أو إلى وجود طاقة عاطلة في محطات توليد الكهرباء ، ولكلٍ من هذين العاملين آثار اقتصادية خطيرة .

ويحتوي هذا الفصل على مبحثين :

المبحث الأول : نموذج الطلب على الكهرباء .

المبحث الثاني : بعض المشاكل القياسية في تقدير الطلب على الكهرباء .

المبحث الأول

نموذج الطلب على الكهرباء

(٢٣-١-١) الخصائص المميزة للطلب على الكهرباء :

يوجد هناك عدد من الخصائص التي تميز الطلب على الكهرباء عن غيره من السلع والخدمات :

(١) على خلاف السلع الاستهلاكية لا يعتبر الطلب على الكهرباء طلباً مباشراً وإنما طلباً مشتقاً . فالكهرباء لا تستهلك مباشرة مثل بعض السلع كالخبز والتفاح والملابس ، وإنما تطلب لتستخدم في تشغيل سلع وأجهزة أخرى مثل الثلاجات والغسالات والآلات والمصاعد واللمبات وغيرها . ومن ثم فإن الطلب عليها مشتق من الطلب على السلع والأجهزة التي تستخدم من خلالها .

(٢) تستخدم الكهرباء في تشغيل سلع وأجهزة معمرة قد تستمر في بعض الحالات لمدة عشرين عام أو أكثر . ولذا فإن مخزون السلع المعمرة المستخدمة للكهرباء قد يكون ثابتاً في الأجل القصير . ومن ثم فإن التغير في الكمية المطلوبة من الكهرباء في الأجل القصير يرجع لتغير معدل استخدام هذا المخزون الثابت من الأجهزة . فارتفاع السعر الحقيقي للكهرباء قد يترتب عليه تقليل عدد ساعات تشغيل المكيفات الكهربائية يومياً ، وتقليل عدد اللمبات الكهربائية المضاءة ، والعكس صحيح . أما في الأجل الطويل فإن الطلب على الكهرباء يتغير مع تغير مخزون الأجهزة والسلع المستخدمة للكهرباء . ولذا فإنه من المتوقع أن تكون مرونة الطلب على الكهرباء في الأجل الطويل أكبر منها في الأجل القصير .

(٣) يتغير سعر الكهرباء مع تغير الشريحة التي يستهلك فيها الفرد للكهرباء . ويترتب على ذلك أن السعر الحدي للكهرباء يختلف عن السعر المتوسط . ويتضح هذا من الجدول (٢٣-١) (لأسرة واحدة) :

جدول (٢٣-١)

السعر الحدي والسعر المتوسط (افتراضي) *

سعر الكيلو / وات بالقرش	الشريحة بالكيلو / وات	السعر المتوسط بالقرش	السعر الحدي بالقرش
٢٠	٣٠ الأولى	٢٠	٢٠
١٥	٢٠٠ الثانية	١٥,٦٥	١٥
١٠	٣٠٠ الثالثة	١٢,٤٥	١٠
٥	٥٠٠ الرابعة	٨,٨٣	٥

ووفقاً للنظرية الاقتصادية من الأفضل استخدام السعر الحدي عند تقدير الطلب على الكهرباء . ونظراً لوجود أكثر من سعر حدي تبعاً للكمية التي يستهلكها كل مشترك ، فإن السعر الحدي للمدينة يتم حسابه على أساس أنه السعر الحدي المقابل للكمية المستهلكة في المتوسط للفرد . ومن الواضح أن استخدام السعر المتوسط في تقدير دالة الطلب على الكهرباء في حالة نظام الشرائح من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية يترتب عليه وجود مشكلة التحيز الآني ، ذلك لأنه بجانب أن الكمية المطلوبة تتأثر بالسعر المتوسط ، فإن السعر المتوسط يتأثر بالكمية المطلوبة .

(٤) يلاحظ أن تكلفة تقديم كيلو / وات كهرباء في أوقات الذروة ربما يكون أعلى منها في أوقات غير الذروة . وتسعى شركات الكهرباء لتتقاضى سعر حدي في أوقات الذروة أعلى من السعر الحدي في أوقات غير الذروة . وفي حالة البيانات السنوية يسعى الاقتصاديون للحصول على سعر حدي مرجح للسنة ككل حيث :

---

* الشريحة الثانية : متوسط = $\frac{(٣٠ \times ٢٠) + (١٥ \times ٢٠٠)}{٣٠ + ٢٠٠} = \frac{٣٦٠٠}{٢٣٠} = ١٥,٦٥$

حدي = $\frac{٣٦٠٠ - ٦٠٠}{٢٣٠ - ٣٠} = \frac{٣٠٠٠}{٢٠٠} = ١٥$

الشريحة الثالثة : متوسط = $\frac{٣٦٠٠ + ٣٠٠٠}{٥٣٠} = \frac{٦٦٠٠}{٥٣٠} = ١٢,٤٥$

الشريحة الرابعة : متوسط = $\frac{٦٦٠٠ + ٢٥٠٠}{١٠٣٠} = ٨,٨٣$

ث ز = ث ١ . و ١ + ث ٢ و ٢ $(P_t = W_1 P_1 + W_2 P_2)$ ....(٢٣-١)

ث ١ = السعر الحدي للذروة .

و ١ = الوزن المرجح للذروة = كمية استهلاك الذروة / كمية استهلاك كلية

ث ٢ = السعر الحدي لغير الذروة .

و ٢ = الوزن المرجح لوقت غير الذروة = كمية استهلاك غير الذروة / كمية استهلاك كلية

أما إذا كانت البيانات موسمية فإنها قد تعكس مثل هذه التقلبات بطبيعتها دون حاجة لتعديل .

ولقد أثبتت التجربة أن الكهرباء من المجالات التي يصعب فيها تقدير تنبؤات دقيقة. ويتضح هذا من الفرق الكبير بين معدل نمو الطلب المتوقع للكهرباء في شمال أمريكا ومعدل نمو الطلب الفعلي بالجدول (٢٣-٢) .

جدول (٢٣-٢) - تنبؤات مجلس الجودة الكهربائية لشمال أمريكا
North American Electric Reliability Council

سنة تم فيها التوقع	الفترة التي تم التنبؤ لها	معدل النمو السنوي المتوقع	معدل النمو السنوي الفعلي	نسبة الفعلي للمتوقع ٪
١٩٧٣	٧٤ - ١٩٨٣	٧,٥ ٪	٢,٣	٣٠,٦
١٩٧٤	٧٥ - ١٩٨٤	٦,٧	٣,٠	٤٤,٨
١٩٧٥	٧٦ - ١٩٨٥	٦,٣	٢,٩	٤٦,٠
١٩٧٦	٧٧ - ١٩٨٦	٥,٨	٢,٤	٤١,٤
١٩٧٧	٧٨ - ١٩٨٧	٥,٣	٢,٣	٤٣,٤
١٩٧٨	٧٩ - ١٩٨٨	٤,٨	٢,٤	٥٠,٠

(٢٣-١-٢) تقدير دالة الطلب على الكهرباء في الأجلين القصير والطويل :

لقد كان كلٍ من Carl Kaysen , Franklin M . Fisher أول من صاغ نموذجاً لتقدير دالة الطلب على الكهرباء في الأجل القصير . ومن المعروف أن الطلب على الكهرباء في الأجل القصير يتغير بتغير نسبة استغلال Utilization Ratio طاقة الأجهزة والمعدات الكهربائية . وقد استخدم كلٍ من فيشر وكيزين مجموع عدد

الكيلووات / ساعة لكل الأجهزة الكهربائية إذا ما تم استخدامها استخداماً عادياً كمؤشر لطاقة هذه الأجهزة (ق ر ز) حيث :

ف ر ز = طاقة الأجهزة الكهربائية التي تمتلكها الأسرة "ر" في الفترة "ز" مقاسة بعدد الكيلووات ساعة التي تقدر على اشتغالها إذا ما استخدمت استخداماً عادياً (W_{it}) .

ك ر ز = عدد الكيلووات ساعة الفعلية التي تستهلكها الأسرة " ر " من الكهرباء في الفترة "ز" (q_{it})

ك رز = أ رز ق رز	$q_{it} = a_{it} W_{it}$ .... (٢٣-٢)

أ رز = نسبة تشغيل الأجهزة الكهربائية من قبل الأسرة "ر" في الفترة "ز" (a_{it})

أ رز = ء (ث رز ، ل رز)	$a_{it} = a_{it} (P_{it} , Y_{it})$ ...... (٢٣-٣)

ث رز (P_{it}) = السعر الحقيقي للكهرباء ، ل رز (Y_{it}) = متوسط الدخل الحقيقي .

وهذا يعني أن نسبة تشغيل الأجهزة الكهربائية دالة في السعر الذي تدفعه الأسرة في الكيلووات / ساعة كهرباء في الفترة "ز" ، وفي الدخل الحقيقي للأسرة في الفترة " ز" . وبالتعويض من (٢٣-٣) في (٢٣-٢) نحصل على :

ك رز = ء (ث رز ، ل رز) ق رز	.... (٢٣-٤)
	$q_{it} = a_{it} (P_{it} , Y_{it}) W_{it}$

وتعني الصيغة (٢٣-٤) أن الكمية المطلوبة من الكهرباء في الأجل القصير (ك رز) تتحدد بالدخل الحقيقي ، والسعر الحقيقي (والذي يختلف من أسرة لأخرى تبع اختلاف الشريحة) ، وطاقة الأجهزة الكهربائية المملوكة من قبل الأسرة. ولقد استخدم كل من فيشر وكيزين الصيغة التالية للتعبير عن الدالة (٢٣-٤) .

ك رز = ث رز^أ١ ل رز^أ٢ ق رز	.... (٢٣-٥)
	$q_{it} = P_{it}^{\alpha} \ Y_{it}^{\beta} \ W_{it}$

وبالحصول على لوغاريتم الطرفين نجد أن :

لو ك رز = أ١ لو ث رز + أ٢ لو ل رز + لو ق رز	........................(٢٣-٦)
	$\ln q_{it} = \alpha \ln P_{it} + \beta \ln Y_{it} + \ln W_{it}$

وإذا افترضنا أن مخزون stock الأجهزة الكهربائية لدى الأفراد ينمو سنوياً بمعدل ثابت = م (r) : ∴ ق رز / ق رز-١ = هـ م حيث : هـ = أساس اللوغاريتم الطبيعي

$$\frac{W_{it}}{W_{it-1}} = e^r$$

∴ لو ق رز – لو ق رز-١ = م .... (٢٣-٧)

وبالحصول على الصيغة (٢٣-٦) للفترة السابقة (ز – ١) نجد أن :

لو ك رز-١ = أ١ لو ث رز-١ + أ٢ لو ل رز-١ + لو ق رز-١ .... (٢٣-٨)

بطرح (٢٣-٨) من (٢٣-٦) والتعويض من (٢٣-٧) نحصل على :

لو ك رز – لو ك رز-١ = م + أ١ (لو ث رز – لو ث رز-١) + أ٢ (لو ل رز – لو ل رز-١)

.... (٢٣-٩)

$$\ln q_{it} - \ln q_{it-1} = r + \alpha_1 (\ln P_{it} - \ln P_{it-1}) + \alpha_2 (\ln Y_{it} - \ln Y_{it-1})$$

ولقد قام كلٍ من فيشر و كيزين بتقدير الصيغة (٢٣-٩) لكل ولاية من الولايات المتحدة عبر ١٢ سنة (١٩٤٦ – ١٩٥٧) واقتصر مخزون الأجهزة على ٧ أنواع من الأجهزة الكهربائية . ولقد اتضح من القياس أن مرونة الطلب السعرية قصيرة الأجل للكهرباء أقل من الواحد بالنسبة لكل الولايات تقريباً . وكانت أكبر بالنسبة للولايات الأقل تقدماً منها للولايات الأكثر تقدماً .

وتشير أ١ ، أ٢ إلى مرونة الطلب السعرية ومرونة الطلب الدخلية للكهرباء على التوالي. كما تشير الصيغة (٢٣-٩) إلى أن معدل نمو الطلب على الكهرباء (لو ك رز – لو ك رز-١) دالة في معدل التغير في السعر (لو ث رز – لو ث رز-١) ومعدل نمو الدخل الحقيقي (لو ل رز – لو ل رز-١) . ولقد قام كلٍ من فيشر وكيزين بتقدير دالة الطلب على الكهرباء في الأجل الطويل . ولعمل ذلك استخدما ما يسمى Saturation Model . وتتمثل متغيرات هذا النموذج في :

معدل نمو مخزون الأجهزة كمؤشر لمعدل نمو الكمية المطلوبة من الكهرباء في الأجل الطويل = لو ق رز – لو ق رز-١ ($\ln W_{it} - \ln W_{it-1}$) بافتراض أن الأجهزة تستخدم بكل طاقتها العادية في الأجل الطويل .

والمتغيرات المستقلة :

معدل النمو السكاني = لو س رز – لو س رز-١ $(lnX_{it}-lnX_{it-1})$

معدل نمو الأسر المستخدمة للكهرباء = لو م رز – لو م رز-١ $(lnM_{it}-lnM_{it-1})$

معدل نمو السعر الحقيقي للأجهزة الكهربائية = لو ع رز – لو ع رز-١ $(lnR_{it}-lnR_{it-1})$

معدل نمو الدخل الدائم المتوقع = لو ى رز – لو ى رز-١ $(lnH_{it}-lnH_{it-1})$

متوسط الدخل الجاري = ل رز (Y_{it})

السعر المتوقع للكهرباء = ث رز (P_{it})

السعر المتوقع للغاز = غ رز (G_{it})

عدد الزيجات الجديدة = ج رز (B_{it})

وللمحافظة على درجات الحرية عند مستوى مرتفع استخدم فيشر وكيزين بيانات سلسلة قطاعية (ولايات وسنوات) . وتم استخدام المتوسط المتحرك للدخل الحقيقي الفردي عبر ١٧ سنة كمؤشر للدخل الدائم مع استخدام أوزان نسبية متناقصة. كما تم استخدام المتوسط المتحرك لمدة ثلاث سنوات لقياس السعر المتوقع للكهرباء والسعر المتوقع للغاز .

ولقد اتضح أن العوامل الاقتصادية أقل تأثيراً من العوامل غير الاقتصادية في طلب الكهرباء بالأجل الطويل ، خاصة العوامل الديموغرافية .

كما أن استخدام بيانات عن مخزون الأجهزة الكهربائية أدى إلى عدم دقة البيانات وإلى أخطاء في التقدير .

(٢٣-١-٣) نماذج قياسية بدون بيانات عن مخزون الأجهزة الكهربائية :

من الممكن استخدام بعض الصيغ التي تساعد على تقدير مرونات الطلب السعرية والدخلية للكهرباء في الأجلين الطويل و القصير في معادلة واحدة ودون استخدام بيانات عن مخزون الأجهزة الكهربائية . ومن أبرز النماذج المستخدمة في ذلك نموذج التعديل الجزئي Partial Adjustment Model . ويأخذ هذا النموذج الصيغة التالية :

لوك ز = أ + أ، لوك ز-١ + أ٢ لوث ز + أ٣ لول ز + ى ز ....(٢٣-١٠)

$$\ln q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln q_{t-1} + \alpha_2 \ln P_t + \alpha_3 \ln Y_t + u_t$$

حيث :

ك ز = الكمية الفعلية المستهلكة من الكهرباء في الفترة ز (q_t)

ك ز-١ = الكمية الفعلية المستهلكة من الكهرباء في الفترة السابقة ز – ١ (q_{t-1})

ث ز = سعر الكهرباء في الفترة ز (P_t)

ل ز = متوسط الدخل الحقيقي في الفترة ز (Y_t)

أ٢ = مرونة الطلب السعرية للكهرباء في الأجل القصير (α_2)

أ٣ = مرونة الطلب الدخلية في الأجل القصير (α_3)

مرونة الطلب السعرية في الأجل الطويل = أ٢ / (١ – أ١) = $\dfrac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)}$

مرونة الطلب الدخلية في الأجل الطويل = أ٣ / (١ – أ١) = $\dfrac{\alpha_3}{(1-\alpha_1)}$

ويمكن أن يضاف للمعادلة (٢٣–١٠) أي عدد من المتغيرات التفسيرية الأخرى التي يعتقد أنها تؤثر في الطلب على الكهرباء .

ويلاحظ أنه إذا كان هناك مشكلة ارتباط ذاتي فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تعطى نتائج غير متسقة ومتحيزة وعندئذ يتعين استخدام طريقة أخرى مثل طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين لتقدير نموذج التعديل الجزئي.

المبحث الثاني

بعض المشاكل القياسية في تقدير الطلب على الكهرباء

يوجد هناك بعض المشاكل القياسية التي تتعلق بتقدير الطلب على الكهرباء منها :

(٢٣-٢-١) مشكلة التحيز الآني Simultaneity Bias

عندما يتبع نظام الشرائح في تسعير الكهرباء فإن متوسط سعر الكيلو وات كهرباء (محسوباً على أساس حاصل قسمة الإنفاق الكلى للكهرباء على عدد الكيلو وات / ساعة المستهلكة) يتأثر بالكمية المستهلكة من الكهرباء . ومن ثم فإن استخدام متوسط سعر الكهرباء كمتغير تفسيري في تقدير دالة الطلب يؤدى إلى تحيز المعلمات المقدرة ، ذلك لأن السعر وإن كان يؤثر في الكمية فإن الكمية تؤثر في السعر في آنٍ واحد . ومن ثم فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لا يمكن أن يفصل الأثرين عن بعضهما. ولحل هذه المشكلة يفضل استخدام السعر الحدي للكهرباء بدلاً من استخدام السعر المتوسط .

(٢٣-٢-٢) محاولة Robert Halvoresen :

لقد استخدم هالفورسن الصيغة التالية لوصف نظام الشرائح :

ت = أ ك ^ب^	.... (٢٣-١١)
$E = A q^{b}$	

حيث : ت = الإنفاق الكلى على الكهرباء (E)

ك = الكمية المستهلكة من الكهرباء بالكيلو وات (q)

أ ، ب = معلمات (A , b)

وبالحصول على لوغاريتم الطرفين نجد :

لوت = لوأ + ب لوك	.... (٢٣-١٢)
$\ln E = \ln A + b \ln q$	

∴ السعر المتوسط (ث م) = ت / ك = أ ك ب−١ $P_a = (Aq^{b-1})$

ومنها: لو ث م = لو أ + (ب − ١) لو ك .... (٢٣−١٣)

$$Ln\ p_a = \ln A + (b-1) \ln Q$$

والسعر الحدي (ث ح) = 6ت / 6ك = أ ب ك ب−١ : $P_m = Abq^{b-1}$

ومنها : لو ث ح = لو أ + لو ب + (ب − ١) لو ك .... (٢٣−١٤)

ث ح / ث م = أ ب ك ب−١ / أ ك ب−١ = ب = ثابت .... (٢٣−١٥)

$$P_m / P_a = b$$

لو ث ح − لو ث م = لو ب .... (٢٣−١٦)

$$Ln\ P_m - \ln P_a = \ln b$$

وللتخلص من مشكلة التحيز الآني يتم تقدير أ ، ب من خلال الصيغة (٢٣−١٣)، ثم يتم التعويض عن القيم المقدرة لهما في الصيغة (٢٣−١٤) للحصول على ث ح أو لو ث ح ثم تستخدم البيانات المتحصل عليها عن ث ح أو لو ث ح في تقدير الصيغة (٢٣−١٠).

ولكن يتضح أنه طالما أن ث ح تمثل نسبة ثابتة من ث م وفقاً للصيغة (٢٣−١٥) حيث ث ح = ب ث م ($P_m = b\ P_a$) فإن إحلال ث ح محل ث م لن يؤثر على المعلمات الانحدارية المقدرة وإنما يؤثر فقط على المعلمة التقاطعية .

(٢٣−٢−٣) تقدير السعر الحدي

من المفضل حساب سعر حدي لكل كمية مستهلكة . ويتم اختيار السعر الحدي الذي يقابل الكمية المستهلكة في المتوسط بالولاية المعينة . ويوضح الجدول (٢٣−٣) كيفية عمل ذلك .

جدول (٢٣-٣)

تحديد السعر الحدي

سعر الكيلو وات بالقرش	الشريحة بالكيلو وات	متوسط الكمية المستهلكة للأسرة	السعر الحدي
٢٠	٣٠ الأولى	٣٠	٢٠
١٥	٢٠٠ الثانية	٢٣٠	١٥
١٠	٣٠٠ الثالثة	٥٣٠	١٠
٥	٥٠٠ الرابعة	١٠٣٠	٥

إذا كان متوسط استهلاك الأسرة في سنة من السنوات ٢٣٠ فإن السعر الحدي الذي يستخدم هو ١٥ . وإذا كانت الكمية ٦٠٠ (الشريحة الرابعة) يكون السعر الحدي ٥ ، وهكذا. وإذا كان يوجد هناك أكثر من شركة كهرباء تقدم معدلات مختلفة يجب حساب سعر حدي مرجح وفقاً للوزن النسبي للمنطقة التي تخدمها كل شركة .

(٢٣-٢-٤) الصيغة الملائمة لدالة الطلب :

إن استخدام الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة لتقدير دالة الطلب يتضمن أن مرونات الطلب السعرية والدخلية بالنسبة للكهرباء ثابتة ، فمهما زاد السعر أو الدخل تظل المرونة ثابتة. ولكن من الملاحظ أنه في بعض الحالات تقل مرونة الطلب الدخلية مع ارتفاع الدخل وتزداد مرونة الطلب السعرية مع ارتفاع السعر . وللتخلص من هذه المشكلة يتعين استخدام بعض الصيغ مثل Translog التي تسمح بتغير المرونة مع تغير الدخل والسعر .

مثال (٢٣-١)

تقدير دالة الطلب على الكهرباء

إذا علمت أن بيانات الجدول (٢٣-٤) تخص إحدى المدن خلال الفترة ١٩٨٠ – ١٩٩٥ ، حيث :

متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء بالألف كيلو وات $= Y$

السعر الحدي لكيلو وات الكهرباء بالعشرة قروش $= X_{n1}$

متوسط الدخل النقدي بالألف جنيه $X_{n2} =$

الرقم القياسي لأسعار التجزئة $P =$

جدول (٢٣-٤)

السعر الحدي ومتوسط استهلاك الكهرباء للأسرة في إحدى المدن

Year	Y	XN1	XN2	P
1980	3.0	1.8000	5.000	1.00
1981	3.2	1.6800	5.775	1.05
1982	3.5	1.6500	7.150	1.10
1983	3.9	1.6356	8.816	1.16
1984	4.4	1.5827	10.472	1.19
1985	5.0	1.5625	12.500	1.25
1986	5.7	1.6200	15.525	1.35
1987	6.5	1.6588	18.733	1.43
1988	7.4	1.7402	22.330	1.54
1989	8.4	1.7760	25.280	1.60
1990	9.5	1.8260	28.220	1.66
1991	10.7	1.7473	31.140	1.73
1992	11.9	1.6560	34.200	1.80
1993	13.0	1.7100	37.050	1.90
1994	14.5	1.7000	40.000	2.00
1995	16.0	1.7200	44.075	2.15

والمطلوب هو تقدير دالة الطلب على الكهرباء باستخدام نموذج التعديل الجزئي، ثم تفسير نتائج القياس .

حتى نجيب على المطلوب السابق يتعين إتباع الخطوات التالية :

(١) نحصل على :

السعر الحدي الحقيقي للكهرباء $X_1 = \frac{X_{n1}}{P}$

متوسط الدخل الحقيقي $X_2 = \frac{X_{n2}}{P}$

متغير استهلاك الكهرباء ذو الفجوة $Y_2 = Y_{t-1}$

وتتضح هذه البيانات في الجدول (٢٣-٥) .

جدول (٢٣-٥)

Year	Y	Y2	X1	X2
1980	3.000000	NA	1.800000	5.000000
1981	3.200000	3.000000	1.600000	5.500000
1982	3.500000	3.200000	1.500000	6.500000
1983	3.900000	3.500000	1.410000	7.600000
1984	4.400000	3.900000	1.330000	8.800000
1985	5.000000	4.400000	1.250000	10.00000
1986	5.700000	5.000000	1.200000	11.50000
1987	6.500000	5.700000	1.160000	13.10000
1988	7.400000	6.500000	1.130000	14.50000
1989	8.400000	7.400000	1.110000	15.80000
1990	9.500000	8.400000	1.100000	17.00000
1991	10.70000	9.500000	1.010000	18.00000
1992	11.90000	10.70000	0.920000	19.00000
1993	13.00000	11.90000	0.900000	19.50000
1994	14.50000	13.00000	0.850000	20.00000
1995	16.00000	14.50000	0.800000	20.50000

(٣) نقوم بالحصول على اللوغاريتم الطبيعي للمتغيرات السابقة ثم نقدر الصيغة :

$$\ln Y_t = C + b_1 \ln Y_{t-1} + b_2 \ln X_{1t} + b_3 \ln X_{2t} + u_t$$

فنحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٣-٦) .

جدول (٢٣-٦)

Dependent Variable: LY
Method: Least Squares
Date: 05/26/04 Time: 17:14
Sample(adjusted): 1981 1995
Included observations: 15 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.033852	0.048503	0.697939	0.4997
LY2	0.835562	0.022798	36.65091	0.0000
LX1	-0.113392	0.051401	-2.206055	0.0496
LX2	0.156704	0.016390	9.560801	0.0000

R-squared	0.999871	Mean dependent var	1.981312
Adjusted R-squared	0.999836	S.D. dependent var	0.533262
S.E. of regression	0.006837	Akaike info criterion	-6.909624
Sum squared resid	0.000514	Schwarz criterion	-6.720810
Log likelihood	55.82218	F-statistic	28382.00
Durbin-Watson stat	1.720761	Prob(F-statistic)	0.000000

(٤) نقوم بتفسير النتائج على النحو التالي:

(أ) مرونة الطلب السعرية في الأجل القصير $b_2 = -0.113$ وهي تعني أن تغير السعر بنسبة ١٠ ٪ يؤدى لتغير الكمية المطلوبة من الكهرباء بنسبة ١,١٣ ٪ في الاتجاه العكسي . ومن الملاحظ أن تأثير السعر جوهري في السوق على الكمية المطلوبة ، كما أنه يتفق مع منطق النظرية . وحيث أن مرونة الطلب السعرية أقل من الواحد فإن الطلب على الكهرباء غير مرن في الأجل القصير .

(ب) مرونة الطلب السعرية في الأجل الطويل = $\frac{b_2}{1 - b_1}$

$$= \frac{-٠,١١٣}{١ - ٠,٨٣٦} = \frac{-٠,١١٣}{٠,١٦٤} = -٠,٦٩$$

ومن الواضح أن مرونة الطلب السعرية في الأجل الطويل أكبر من مرونة الطلب السعرية في الأجل القصير . وهى تعني أن تغير السعر بنسبة ١٠ ٪ يترتب عليه تغير الكمية المطلوبة من الكهرباء في الأجل الطويل بنسبة ٦,٩ ٪ في الاتجاه العكسي. ولكن مازال الطلب على الكهرباء غير مرن حتى في الأجل الطويل .

(حـ) مرونة الطلب الدخلية في الأجل القصير $b_3 = 0.157$ وهي موجبة مما يتفق مع منطق النظرية . وتعنى أن زيادة الدخل الحقيقي بنسبة ١٠ ٪ تؤدى لزيادة الكمية المطلوبة من الكهرباء بنسبة ١,٥٧ ٪ في الأجل القصير . ويلاحظ أن هذا التأثير معنوي . وطالما أن مرونة الطلب الدخلية للكهرباء في الأجل القصير أقل من الواحد فهي تعتبر سلعة ضرورية في الأجل القصير .

(د) مرونة الطلب الدخلية في الأجل الطويل = $\frac{b_3}{1 - b_1}$

$$= \frac{٠,١٥٧}{٠,١٦٤} = ٠,٩٦$$

ومن الواضح أن مرونة الطلب الدخلية في الأجل الطويل أعلى منها في الأجل القصير ، حيث يترتب على زيادة الدخل بنسبة ١٠ ٪ زيادة الطلب على الكهرباء بنسبة ٩,٦ ٪ تقريباً .

الفصل الرابع والعشرون

اختبار نظرية تعادل القوى الشرائية

Testing of the Purchasing power Parity Theory (PPP)

مقدمة

تنص نظرية تعادل القوى الشرائية (PPP) على أن أسعار الصرف بين العملات تكون في وضع توازن إذا كانت القوة الشرائية لهذه العملات في الدول محل الاعتبار متساوية عند هذه الأسعار . فعلى سبيل المثال إذا كان سعر صرف الدولار في مصر هو : ١ دولار = ٦ جنيهات ، وكان سعر الكيلو اللحم البقري من نوع معين في مصر = ٢٤ جنيه، وكان سعر الكيلو من نفس نوع اللحم في الولايات المتحدة = ٤ دولار ، يقال في هذه الحالة أن سعر الصرف السائد في مصر هو سعر التوازن ، و لا يوجد هناك أي مبرر للانحراف عنه ، ذلك لأن عنده القوة الشرائية للعملتين متساوية ، حيث :

قيمة كيلو اللحم البقري في مصر بالجنيه = قيمة كيلو اللحم في الولايات المتحدة مقومة على أساس سعر الصرف في مصر (٦ جنيه للدولار) = ٢٤ جنيه .

ولكن إذا افترضنا أن سعر كيلو اللحم البقري في مصر = ٣٢ جنيه ، وفي الولايات المتحدة = ٤ دولار ، وسعر الصرف الرسمي في مصر : ١ دولار = ٦ جنيهات . إذن : سعر صرف التوازن وفقا لنظرية تعادل القوى الشرائية = ٣٢ جنيه ÷ ٤ دولار = ٨ جنيه . وهذا يعني أن سعر الصرف السائد في مصر دون السعر التوازني ، ومن ثم فإن الدولار يكون مقوماً بأقل من قيمته الحقيقية ، والجنيه يكون مقوماً بأعلى من قيمته الحقيقية ، حيث :

القيمة الفعلية للجنيه المصري بالدولار وفقا لسعر الصرف الرسمي = ١ ÷ ٦ = ٠,١٦٧ دولار

القيمة التوازنية للجنيه المصري بالدولار وفقا لنظرية PPP = ١ ÷ ٨ = ٠,١٢٥ دولار

وهذا يعني أن الجنيه المصري مقوم بأعلى من قيمته الحقيقية بنسبة ٣٣,٦ ٪ :

$$= [\ ١ - (\ \frac{٠,١٦٧}{٠,١٢٥}\ )\ ] = -٠,٣٣٦$$

والعكس صحيح .

ويهدف هذا الفصل إلى توضيح كيفية اختبار نظرية تعادل القوى الشرائية في الواقع ، وهو يعتبر تطبيق لتحليل السلاسل الزمنية واختبارات جذر الوحدة والتكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ . ويتضمن عدداً من المباحث التي تتمثل في :

المبحث الأول : صيغ نظرية تعادل القوى الشرائية .

المبحث الثاني : دراسات تطبيقية لاختبار الصيغة المطلقة لنظرية PPP .

المبحث الثالث : دراسات تطبيقية لاختبار الصيغة النسبية لنظرية PPP .

المبحث الأول

صيغ نظرية تعادل القوى الشرائية (PPP)

يمكن التفرقة بين صيغتين لنظرية تعادل القوى الشرائية :

(٢٤-١-١) الصيغة المطلقة لتعادل القوى الشرائية Absolute version of PPP

(٢٤-١-٢) الصيغة النسبية لتعادل القوى الشرائية Relative version of PPP

ونتعرض لكل صيغة منها بإيجاز في هذا المبحث ثم نتطرق للنموذج الاقتصادي الذي يستخدم في اختبارها .

(٢٤-١-١) الصيغة المطلقة لتعادل القوى الشرائية :

تنص هذه الصيغة على أنه في ظل غياب التدخلات الحكومية في حرية التجارة بين الدول ، وعدم وجود رسوم جمركية أو حصص استيراد أوتصدير أو ضرائب داخلية مفروضة على الواردات والصادرات ، بالإضافة إلى عدم وجود تكاليف نقل أو شحن ، فإن أسعار جميع السلع التجارية Traded goods المتماثلة تتساوى في جميع الدول عند أسعار الصرف السائدة . ويطلق على هذه الصيغة قانون السعر الواحد Law of one price . ولو تكلمنا للتبسيط عن سلعة واحدة ولتكن القمح ، فإن توفر الشروط السابقة يعني أن :

سعر القمح في مصر بالجنيه = سعر القمح في الولايات المتحدة الأمريكية × سعر الصرف

$$P_w^E = P_w^{US}.S \qquad (24-1)$$

حيث : سعر الدولار بدلالة الجنيهات المصرية = S

وتعبر الصيغة (٢٤-١) عن قانون السعر الواحد .

ووفقا لمنطق النظرية تضمن حرية التجارة بين الدول تحقق هذه الصيغة دائماً .

فلو افترضنا أن :

سعر طن القمح في مصر = P_w^E = ١٢٠٠ جنيه

سعر طن القمح في الولايات المتحدة = P_w^{US} = ٢٠٠ دولار

سعر الصرف الرسمي في مصر : ١ دولار = ٦ جنيهات

إذن قانون السعر الواحد يكون منطبقاً في هذه الحالة بمصر ، ومن ثم يكون سعر الصرف الرسمي هو السعر التوازني ، حيث :

قيمة طن القمح في مصر بالجنيه = قيمة سعر طن القمح في الولايات المتحدة بالدولار × سعر الصرف الرسمي = ٢٠٠ دولار × ٦ جنيهات = ١٢٠٠ جنيه .

ولكن إذا حدث وكان سعر طن القمح في الولايات المتحدة يساوي ١٥٠ دولار، ففي ظل سعر الصرف الرسمي السائد في مصر يكون سعر طن القمح الأمريكي بالجنيه = ١٥٠ × ٦ جنيهات = ٩٠٠ جنيه . وهذا يعني أن القمح في الولايات المتحدة الأمريكية أرخص منه في مصر (١٢٠٠ جنيه) ، وأن سعر الصرف الرسمي ليس هو سعر التوازن . وفي هذه الحالة يقوم كبار المستوردين في مصر بشراء كميات كبيرة من القمح بالولايات المتحدة وبيعها في مصر لتحقيق أرباح من الفروق في الأسعار . ويترتب على هذه العملية التي تسمح بها حرية التجارة عدداً من النتائج التي تتمثل في :

(١) في حالة أن تكون كميات القمح المستوردة كبيرة فإن زيادة الطلب على القمح في الولايات المتحدة سوف يترتب عليه ارتفاع سعر القمح بها (P_w^{US}) .

(٢) كما يترتب على استيراد كميات كبيرة من القمح الأمريكي إلى السوق المصرية زيادة عرض القمح بالداخل ،مما يؤدي إلى انخفاض سعر القمح بالجنيه المصري (P_w^{E}).

(٣) تستمر عملية المراجحة Arbitrage تلك حتى يتساوى سعر القمح في مصر مع سعر القمح في الولايات المتحدة ، ويتحقق ما يسمى قانون السعر الواحد ، وفي هذه الحالة لا يكون هناك حافز على تحرك القمح بين البلدين .

(٤) في خضم هذه العملية يزداد طلب المستوردين المصريين على الدولار لشراء القمح من الولايات المتحدة ، فيرتفع سعر صرف الدولار بدلالة الجنيه المصري حتى يصل لوضع التوازن .

ولكن لأن التجارة بين الدول تضم أكثر من سلعة فإن قانون السعر الواحد يمكن تعميمه ليشتمل على أسعار كل السلع التجارية Traded goods، ومن ثم يصبح هذا السعر بين الولايات المتحدة ومصر على النحو التالي :

$$P^E = S.P^{US} \qquad (24 - 2)$$

حيث :

المتوسط المرجح لأسعار السلع التجارية في مصر بالجنيه = P^E

المتوسط المرجح لأسعار السلع التجارية في الولايات المتحدة بالدولار = P^{US}

سعر صرف الدولار بالجنيه = S

ويقوم قانون السعر الواحد كما هو مصاغ في المعادلة (٢٤-٢) على عدد من الافتراضات أهمها :

(١) توحد حرية تجارة بين البلدين دون وجود قيود عليها من أي نوع .

(٢) تتماثل نوعية السلع التجارية في البلدين .

(٣) تتماثل الأوزان النسبية للسلع التجارية المدرجة في متوسط الأسعار بالبلدين . أي أن كل سلعة تحتل نفس الأهمية النسبية في البلدين .

ونظراً لأن مثل هذه الافتراضات من الصعب توفرها في الواقع فإن الصيغة المطلقة لنظرية تعادل القوى الشرائية نادراً ما تتحقق .

(٢٤-١-٢) الصيغة النسبية لتعادل القوى الشرائية :

تنص هذه الصيغة على أن التغير في سعر الصرف الحر في أي بلد ما هو إلا انعكاس لحصيلة التغيرات في أسعار السلع بين الدول . وبصورة أكثر تحديداً تتمثل هذه الصيغة في :

$$\%\Delta S = \%\Delta P^D - \%\Delta P^F \qquad (24 - 3)$$

حيث :

التغير النسبي في سعر الصرف مقاساً بوحدات العملة المحلية لكل وحدة من العملة الأجنبية = $\%\Delta S$

التغير النسبي في الرقم القياسي للأسعار المحلية (معدل التضخم المحلي) = $\%\Delta P^D$

التغير النسبي في الرقم القياسي للأسعار الأجنبية (معدل التضخم الأجنبي) = $\%\Delta P^F$

وتعني الصيغة السابقة أنه إذا كان معدل التضخم في الولايات المتحدة الأمريكية أعلى منه في مصر في سنة ما ، فإن هذا يترتب عليه انخفاض سعر صرف الدولار في مصر بنسبة الفرق بينهما . أي أنه إذا كان معدل التضخم في الولايات المتحدة ٦ ٪ ، وفي مصر ٤٪ ، فإن هذا يصاحبه انخفاض في قيمة الدولار بدلالة الجنيه بنسبة ٢٪ ، ومن ثم تزداد قيمة الجنيه بدلالة الدولار . فالدولة التي تصبح سلعها أغلى نسبيا في السوق الدولية تتدهور قيمة عملتها لانخفاض الطلب على سلعها ، وزيادة طلبها على سلع الآخرين وعملاتهم.

وتتصف الصيغة النسبية بكونها أكثر شمولا من الصيغة المطلقة ، حيث تعكس التغيرات في أسعار جميع السلع في المجتمع وليس فئة منها ، كما لا تشترط تماثل نوعيات السلع في البلدين ، وتتطلب بيانات كثيراً ما تكون متوفرة وهي الرقم القياسي لأسعار المستهلكين .

(٢٤-١-٣) النموذج الاقتصادي لنظرية تعادل القوى الشرائية :

حتى يمكن اختبار مدى تحقق الصيغة النسبية لنظرية القوى الشرائية في الواقع لابد من بناء نموذج اقتصادي قابل للقياس والاختبار . ومن الصيغ المستخدمة في هذا الصدد :

$$S_{1t} = \beta_{01}\left(\frac{P_t^F}{P_t^D}\right)^{\beta_1} e^{\varepsilon_t} \qquad (24-4)$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(\frac{P_t^F}{P_t^D}\right) + \varepsilon_t \qquad (24-5)$$

حيث : سعر الصرف السائد مقاساً بوحدات من العملة الأجنبية لكل وحدة من العملة المحلية = S_{1t}

اللوغاريتم الطبيعي لسعر الصرف = $S_t = \ln S_{1t}$

مرونة سعر الصرف للتغير في نسبة الأسعار الأجنبية للأسعار المحلية = β_1

اللوغاريتم الطبيعي للمعلمة التقاطعية = $\beta_0 = \ln \beta_{01}$

الرقم القياسي لأسعار المستهلكين في الخارج في الفترة t = P_t^F

الرقم القياسي لأسعار المستهلكين في الداخل في الفترة t = P_t^D

ووفقا للصيغة (٢٤-٤) إذا كان معدل التضخم في الخارج (معدل الارتفاع في الرقم القياسي للأسعار في الخارج $\%\Delta P^F$) أكبر من معدل التضخم في الداخل (معدل الارتفاع في الرقم القياسي للأسعار في الداخل $\%\Delta P^D$) يرتفع سعر صرف العملة المحلية بدلالة العملة الأجنبية (S_{1t}) وهو ما يعني انخفاض سعر صرف العملة الأجنبية بدلالة العملة المحلية ($1/S_{1t}$) .

وحتى يتحقق مبدأ تعادل القوى الشرائية بين الدول يتعين أن يكون : $\beta_1=1$. ويعني هذا الفرض أن سعر الصرف يكون في وضع توازن إذا ترتب على تغير الأسعار النسبية بين بلدين بنسبة معينة تغير في سعر الصرف المحلي بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه .

المبحث الثاني

دراسات تطبيقية للصيغة المطلقة لتعادل القوى الشرائية

يتطلب اختبار الصيغة المطلقة لتعادل القوى الشرائية مقارنة أسعار توليفة من السلع تتماثل خصائصها في عدد من الدول للتحقق من أن هذه الأسعار متساوية أم لا . ومن المحاولات التي تمت في هذا الصدد ما تقوم به نشرة الاقتصادي The Economist منذ ١٩٨٦ من مقارنة أسعار ساندوتش الهامبورجر الكبير والمعروف باسم Big Mac والذي يباع في محلات ماكدونالز McDonalds المنتشرة في ٨٠ دولة حول العالم . فمثل هذا الساندوتش في حد ذاته يعتبر توليفة من السلع المتماثلة التي لا تختلف خصائصها كثيراً من دولة لأخرى ، نظراً لأنه يتم تصنيعه وفقا لمعايير محددة . ومن أهم مكوناته : اللحم البقري (Beef) وصلصة خاصة (Special Sauce) ، والخس (Lettuce) ، والجبنة (Cheese) و المخللات من الخيار (Pickles of cucumber) والبصل (Onions) ، والسمسم (Seasame-seed) .

وتوجد صيغة مبسطة للنظرية في صورتها المطلقة يمكن الحصول عليها بإعادة صياغة المعادلة (٢٤-٢) على النحو التالي :

$$P^D = S.P^F \qquad (24-6)$$

حيث : متوسط السعر المحلي للسلعة أو لتوليفة السلع بالعملة المحلية = P^D

متوسط السعر الأجنبي للسلعة أو لتوليفة السلع بالعملة الأجنبية = P^F

سعر صرف العملة الأجنبية بدلالة العملة المحلية = S

$$\therefore S = \frac{P^D}{P^F}, \qquad \frac{1}{S} = \frac{P^F}{P^D} \qquad (24-7)$$

وبضرب طرفي المعادلة (٢٤-٧) في $[P^D/P^F]100$ نحصل على :

$$H_t = \left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{P^D}{P^F}\right)_t = 100 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24-8)$$

وتستخدم الصيغة (٢٤-٨) في اختبار الصيغة المطلقة لنظرية تعادل القوى الشرائية . فبحساب هذه الصيغة لسلعة معينة أو توليفة من السلع يوجد هناك ثلاث احتمالات :

(١) $H_t = 100$ وفي هذه الحالة يكون سعر الصرف السائد في البلد المعين هو السعر التوازني ، ومن ثم فإن القوة الشرائية للدولار باعتباره العملة الأجنبية في هذا البلد تكون مساوية للقوة الشرائية للدولار في الولايات المتحدة .

(٢) $H_t > 100$ وفي هذه الحالة تكون العملة المحلية للبلد محل الاعتبار مقومة بأكبر من قيمتها الحقيقية بدلالة العملة الأجنبية وهي الدولار في هذه الحالة Overvalued . ويعني هذا في نفس الوقت أن القوة الشرائية للدولار في هذا البلد أقل من القوة الشرائية للدولار في الولايات المتحدة في ظل سعر الصرف السائد .

(٣) $H_t < 100$ وفي هذه الحالة تكون العملة المحلية للبلد محل الاعتبار مقومة بأقل من قيمتها الحقيقية بدلالة العملة الأجنبية وهي الدولار في هذه الحالة Undervalued. وهذا يعني أن القوة الشرائية للدولار كعملة أجنبية في هذا البلد تكون أعلى من القوة الشرائية له في الولايات المتحدة في ظل سعر الصرف السائد .

ويوضح الجدول (٢٤-١) نتائج دراسة تطبيقية أجريت على أسعار Big Mac في عدد من الدول عام ١٩٩١ م (Pakko and others) .

جدول (٢٤-١)- مؤشرات الصيغة المطلقة لتعادل القوى الشرائية لـ Big Mac (١٩٩١)

م	البلد	H	م	البلد	H
١	استراليا	٨٦	٩	أيرلندا	١٠٠
٢	بلجيكا	١٢٩	١٠	إيطاليا	١٢٩
٣	بريطانيا	١٣٢	١١	اليابان	١٢٥
٤	كندا	٩٠	١٢	هولندا	١٢٤
٥	الدنمارك	١٨٥	١٣	سنغافورة	٧٠
٦	فرنسا	١٤٢	١٤	أسبانيا	١٥٠
٧	ألمانيا	١١٤	١٥	السويد	١٩١
٨	هونج كونج	٥١			

ووفقا لنتائج هذه الدراسة فإن هناك دولة واحدة تحققت فيها الصيغة المطلقة لنظرية تعادل القوى الشرائية وهي أيرلندا ، أما باقي الدول فلم تتحقق فيها . فالدول التي يقل فيها H عن ١٠٠ عملتها مقومة بأقل من قيمتها الحقيقية بدلالة الدولار وهي استراليا وكندا وهونج كونج وسنغافورة ، أما باقي الدول فعملاتها مقومة بأكثر من قيمتها الحقيقية بدلالة الدولار .

ومن أهم الأسباب التي تذكر لعدم انطباق نظرية تعادل القوى الشرائية في الواقع :

(١) وضع قيود على حرية التجارة من قبل الحكومات المختلفة وبدرجات متفاوتة ، مثال ذلك فرض رسوم جمركية على الواردات ، وفرض حصص استيرادية، وفرض ضرائب على مبيعات السلع المستوردة بالداخل . فكل هذه الممارسات من شأنها أن تؤدي لانحراف الأسعار المحلية عن الأسعار الخارجية لنفس السلع .

(٢) ارتفاع تكاليف الشحن والتأمين على البضائع المصدرة ، وهو ما يؤدي لاختلاف أسعار نفس السلع بين الدول .

(٣) احتواء متوسط الأسعار الذي يستخدم في اختبار النظرية ليس فقط على السلع التجارية Traded goods ولكن أيضا على السلع غير التجارية Non-traded goods وهي السلع غير القابلة للاستيراد أو التصدير مثال ذلك موقع المحل والمباني وخدمات العمالة غير الماهرة . فساندوتش الهامبورجر يدخل ضمن تكلفته إيجار المبنى وأجور العمالة وهي عناصر تختلف من دولة لأخرى ولا يمكن استيرادها من المكان الرخيص إلى المكان الذي ترتفع فيه التكلفة باعتبارها سلع غير تجارية . ويعتبر هذا من بين العوامل التي تؤدي لاختلاف أسعار نفس السلع بين الدول .

(٤) المنافسة غير الكاملة Imperfect competition : تتبع الشركات متعددة الجنسية أسلوب التمييز السعري Price discrimination في بيع منتجاتها بالدول المختلفة لتعظيم الأرباح . فهي تبيع المنتجات بأسعار أعلى في البلاد التي يكون فيها الطلب غير

مرن ، وتبيع نفس المنتجات بأسعار أقل في البلاد التي يكون الطلب فيها مرناً . ولاشك أن هذا من شأنه أن يؤدي لاختلاف أسعار نفس السلع في الدول المختلفة .

(٥) وجود عدم توازن في الحسابات الجارية Imbalances in Current accounts . فمن المعروف أن الحساب الجاري يرصد تحركات السلع والخدمات ورؤوس الأموال قصيرة الأجل وطويلة الأجل عبر الحدود . ومن ثم فعلى خلاف ما تقول به نظرية تعادل القوى الشرائية فإن تجارة السلع ليست هي العنصر الوحيد الذي يؤثر في سعر الصرف ، وإنما كل تدفقات العملات الأجنبية بكافة صورها . وتشير الدراسات إلى أن الدول التي تعاني من عجز في الحساب الجاري تقترض من الخارج لتسد هذا العجز وغالبا ما تكون عملتها مقومة بأقل من قيمتها الحقيقية بدلالة الدولار Undervalued، والدول التي يوجد لديها فائض وتقوم بالاستثمار في الخارج فغالبا ما تكون عملتها مقومة بأكثر من قيمتها بدلالة الدولار Overvalued . ولعل هذا يرجع إلى أن الدول التي يوجد لديها عجز تكون قيمة عملتها منخفضة بالرغم من حصولها على تدفقات بعملات أجنبية في صورة قروض ، والدول التي يوجد لديها فائض تكون قيمة عملاتها مرتفعة بالرغم من فقدانها تدفقات بالعملات الأجنبية في صورة استثمارات للخارج .

المبحث الثالث

دراسات تطبيقية لاختبار الصيغة النسبية لتعادل القوى الشرائية

من بين الدراسات التي تمت في هذا المجال دراسة قام بها كل من : Ramirez , M. & Khan, S. ، وهي تهدف إلى اختبار نظرية تعادل القوى الشرائية في صيغتها النسبية كما هي موضحة بالصيغة (٢٤– ٥) . وقد تم استخدام بيانات عن سعر الصرف العاجل Spot exchange rate والرقم القياسي لأسعار المستهلكين Consumer Price Index (CPI) لسلسلة شهرية من البيانات عبر ٢٣ سنة امتدت من يناير ١٩٧٣ حتى ديسمبر ١٩٩٦ م . وقد جمعت هذه البيانات لخمس من الدول الصناعية هي ألمانيا والمملكة المتحدة وفرنسا وكندا واليابان ، وذلك باعتبارها من أكثر الدول التزاماً بحرية سعر الصرف . كما تم استخدام الدولار الأمريكي كعملة مشتركة بينها جميعا في تقييم سعر الصرف . ويمكن عرض نتائج هذه الدراسة على النحو التالي :

(٢٤–٣–١) اختبار نظرية PPP باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية :

لقد بدأ الباحثان باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير الصيغة (٢٤–٥) من خلال البيانات المتاحة عن خمس دول ، وجاءت النتائج كما هي موضحة في الجدول (٢٤–٢) .

جدول (٢٤–٢) – الصيغة المقدرة لتعادل القوى الشرائية باستخدام طريقة OLS

In Dependent v.	β_0	β_1	F	DW	Adjusted R^2
US $ for Yen SE	3.79 (1.356)	-0.6089 (0.376)	3811.6	1.306	0.992
US $ for Canadian $ SE	0.2816 (0.055)	-0.2357 (0.179)	4908.7	1.599	0.978
US $ for £ pound SE	-0.454 (0.131)	-0.263 (0.241)	6342.7	1.204	0.978
US $ for Mark SE	0.516 (0.192)	-0.0056 (0.49)	8387.2	1.358	0.983
US $ for Franc SE	1.735 (0.172)	0.2156 (0.400)	8574.8	1.408	0.984

ويتضح من نتائج الجدول (٢٤–٢) ما يلي :

(١) تحمل أربعة من القيم المقدرة للمعلمة الانحدارية إشارةسالبة، وتعتبر هذه الإشارة

خطأ ، حيث يتعين أن تكون موجبة . وبالرغم من أن القيمة الوحيدة الموجبة هي تلك الخاصة بفرنسا إلا أنها بعيدة عن قيمة الواحد التي يجب أن تساويه المعلمة .

(٢) توجد هناك مؤشرات أولية توضح أن بيانات أسعار الصرف والأرقام القياسية للأسعار غير ساكنة Non-stationary ، حيث أن قيمة معامل التحديد مرتفعة جداً في جميع الحالات تفوق ٩٧ ٪ ، كما أن إحصائية F كبيرة جداً ، غير أن DW منخفضة لحد ما بدرجة تجعل الاختبار يقع في المنطقة غير المحددة ، وهو ما قد يوحي بوجود مشكلة ارتباط سلسلي .

(٣) من النتيجتين السابقتين توجد هناك مؤشرات بأن معادلات الانحدار المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية تعبر عن حالة انحدار زائف .

(٢٤-٣-٢) اختبارات جذر الوحدة والتكامل المشترك لمتغيرات PPP:

للتأكد من مدى استقرار بيانات أسعار الصرف والأرقام القياسية لأسعار المستهلكين قام الباحثان بإجراء اختبار ADF(I) باستخدام النموذج الأول مع إدراج ٤ فجوات زمنية بدون حد ثابت أو اتجاه زمني ، وذلك على النحو التالي :

$$\Delta Y_t = \lambda Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{4} \rho_{t-j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (24-9)$$

وقد اتضح أن : تاو المحسوبة أقل من القيمة الحرجة ADF مما يعني أنه لا يمكن رفض فرض العدم القائل بوجود جذر الوحدة ، ومن ثم فإن سلسلة البيانات تكون غير مستقرة لكلا المتغيرين : سعر الصرف والرقم القياسي للأسعار .

وكإجراء تصحيحي تم الحصول على الفروق الأولى للمتغيرين ، وأجري اختبار ADF مرة أخرى على فروق القيم الأصلية وفروق اللوغاريتم الطبيعي للقيم ، واتضح أن سلسلة البيانات في صيغة الفروق الأولى مستقرة . وتم استخدام ٤ فجوات زمنية في النموذج المقدر بدون حد ثابت أو حد اتجاه زمني لإجراء الاختبار . ولعل هذا يعني أن سلسلتي البيانات متكاملة من الرتبة الأولى . أي أن :

$$S_t , P_t \sim I(1)$$

ونظراً لأن المتغيرين متكاملين من نفس الرتبة يصبح من الممكن إجراء اختبار التكامل

المشترك لهما ، وقد اتضح من إجراء Granger –Engle test أن سلسلتي البيانات تتمتع بخاصية التكامل المشترك وهو ما يمكن من استخدام نموذج تصحيح الخطأ . وبالطبع لم تعد طريقة المربعات الصغرى العادية صالحة لتقدير صيغة تعادل القوى الشرائية .

(٢٤-٣-٣) تقدير نموذج تصحيح الخطأ ECM لتعادل القوى الشرائية ببيانات شهرية:

نظراً لأن سلسلتي البيانات تتمتعان بصفة التكامل المشترك فإن النموذج الملائم لتقدير العلاقة بينهما يصبح هو نموذج تصحيح الخطأ . ومن أبسط الصيغ لهذا النموذج في هذه الحالة الصيغة التالية :

$$\Delta S_t = \beta_0 + \sum \beta_i \Delta \ln\left(\frac{P_{t-i}^F}{P_{t-i}^D}\right) + \theta\left[S_t - \alpha_1 \ln\left(\frac{P^F}{P^D}\right) - \alpha_0\right]_{t-j} + \varepsilon_t . (24-10)$$

حيث : الفرق الأول للقيمة اللوغاريتمية لسعر الصرف العاجل = ΔS_t

الفرق الأول للقيمة اللوغاريتمية لنسبة السعر الأجنبي للمحلي = $\Delta \ln\left(P_{t-i}^F / P_{t-i}^D\right)$

حد تصحيح الخطأ = $\left[S_t - \alpha_1 \ln(P^F / P^D) - \alpha_0\right]$

ووفقا للنظرية يتعين أن يكون معدل سرعة التعديل (θ) سالباً ويختلف جوهرياً عن الصفر، وهو ما يعني أنه في حالة انحراف سعر الصرف العاجل عن سعر الصرف طويل الأجل الذي تعكسه نظرية تعادل القوى الشرائية بمقدار وحدة واحدة فسوف يكون هناك تعديل في سعر الصرف العاجل في الفترات المقبلة بمقدار (θ) تجاه سعر الصرف طويل الأجل . ومن المتوقع من ناحية أخرى أن يكون معامل فرق نسبة السعر مختلفاً جوهريا عن الصفر في الاتجاه الموجب .

ومن الواضح أن الفرق الأول لنسبة السعر هو المتغير الوحيد المدرج في الصيغة (٢٤-١٠) كأحد العوامل التي تؤثر في سعر الصرف بالأجل القصير . ولا يوجد ما يمنع من إدراج متغيرات أخرى تؤثر في الأجل القصير بسعر الصرف مثل : سعر الفائدة والناتج الكلي والعرض النقدي . وقد أوضحت الاختبارات أن سلسلة هذه المتغيرات متكاملة من الرتبة الأولى وتتمتع بخاصية التكامل المشترك . ومن ثم قام الباحثان باستخدام الصيغة التالية لاختبار نظرية تعادل القوى الشرائية :

$$\begin{aligned}\Delta S_t = \beta_0 &+ \Sigma\, \beta_{1i}\Delta \ln\left(m^F_{t-i} / m^D_{t-i}\right) + \Sigma\, \beta_{2i}\Delta \ln\left(r^F_{t-i} / r^D_{t-i}\right) \\ &+ \Sigma\, \beta_{3i}\Delta \ln\left(y^F_{t-i} / y^D_{t-i}\right) + \Sigma\, \beta_{4i}\Delta \ln\left(P^F_{t-i} / P^D_{t-i}\right) \\ &+ \theta\left[S_t - \alpha_1 \ln\left(P_t^F / P_t^D\right) - \alpha_0\right]_{t-j} + \varepsilon_t \quad \text{.......}(24-11)\end{aligned}$$

حيث : نسبة كمية النقود الأجنبية إلى كمية النقود المحلية = m^F/m^D

نسبة سعر الفائدة الأجنبي إلى سعر الفائدة المحلي = r^F/r^D

نسبة الناتج المحلي الأجنبي إلى الناتج المحلي الداخلي = y^F / y^D

وبتقدير الصيغة (٢٤-١١) جاءت النتائج على النحو الموضح بالجدول (٢٤-٣)

جدول (٢٤-٣) – تقدير نموذج تصحيح الخطأ لتعادل القوى ا لشرائية ببيانات شهرية

Country	Estimate	R^2	DW
Canada 1978-96	$\Delta S_t = 0.329\Delta \ln\left(P^F_{t-31} / P^D_{t-31}\right) - 0.032\Delta \ln\left(r^F_{t-1} / r^D_{t-1}\right)$ t (1.974) (-2.956) $- 0.039\Delta \ln\left(r^F_{t-5} / r^D_{t-5}\right) - 0.232\Delta \ln\left(y^F_{t-11} / y^D_{t-11}\right) - 0.037 EC_{t-12}$ (-3.848) (-1.65) (-2.988)	0.159	1.977
France 1975-96	$\Delta S_t = 1.144\Delta \ln\left(P^F_{t-31} / P^D_{t-31}\right) + 1.072\Delta \ln\left(m^F_{t-6} / m^D_{t-6}\right) - 0.068\Delta \ln\left(r_t^F \; r_t^D\right)$ t (2.745) (1.664) (-3.584) $+ 0.421\Delta \ln\left(y^F_{t-8} / y^D_{t-8}\right) - 0.030 EC_{t-24}$ (2.054) (-2.06)	0.167	1.997
Germany 1973-96	$\Delta S_t = 0.751\Delta \ln\left(P^F_{t-1} / P^D_{t-1}\right) + 0.29\Delta \ln\left(m^F_{t-2} / m^D_{t-2}\right) + 0.203\Delta \ln\left(m^F_{t-3} / m^D_{t-3}\right)$ (1.676) (2.803) (1.99) $- 0.051\Delta \ln\left(r^F_{t-1} / r^D_{t-1}\right) - 0.034\Delta \ln\left(r^F_{t-5} / r^D_{t-5}\right) - 0.082\Delta \ln\left(y^F_{t-11} / y^D_{t-11}\right) - 0.025 EC_{t-12}$ (-2.687) (-1.792) (-1.915) (-1.915)	0.153	1.910
Japan 1978-96	$\Delta S_t = 0.557\Delta \ln\left(P^F_{t-21} / P^D_{t-21}\right) + 0.349\Delta \ln\left(m^F_{t-2} / m^D_{t-2}\right) + 0.361\Delta \ln\left(m^F_{t-4} \; m^D_{t-4}\right)$ (1.77) (2.154) (2.192) $- 0.052\Delta \ln\left(r^F_{t-1} / r^D_{t-1}\right) - 0.038\Delta \ln\left(r^F_{t-9} / r-9\right) + 0.466\Delta \ln\left(y^F_{t-5} / y^D_{t-5}\right) - 0.026 EC_{t-28}$ (-2.664) (-1.996) (1.867) (-1.779)	0.211	1.935
UK 1973-96	$\Delta S_t = 0.461\Delta \ln\left(P^F_{t-17} / P^D_{t-17}\right) - 0.036\Delta \ln\left(r^F_{t-8} / r^D_{t-8}\right)$ (2.129) (-1.999)	0.186	1.896

ويلاحظ ما يلي على النتائج المعروضة بالجدول (٢٤-٣) :

(١) نظراً لأن كل المتغيرات متكاملة من الرتبة الأولى فقد تم إدراج حد واحد لتصحيح الخطأ في النموذج .

(٢) باستثناء متغير السعر النسبي فإن كل المتغيرات الأخرى قد تم وضع حد أقصى لعدد الفجوات الزمنية فيها ١٢ شهر ، أي سنة . ولعل السبب في ذلك هو أن التأثير المراد اختباره هو التأثير قصير الأجل الذي لا يتعدى مداه سنة .

(٣) نظراً لأن التغير في الأسعار عادة ما يكون بطئ فلم يتم وضع حد أقصى لعدد الفجوات الزمنية التي تمارس فيها تأثيرها .

(٤) تم رصد أول معلمة لها معنوية إحصائية وذو إشارة موجبة لمتغير السعر النسبي في النموذج المقدر أعلاه ، وتم التغاضي عن المعلمات الأخرى لنفس المتغير .

(٥) لم يتم رصد النتائج إلا للمتغيرات التي لها تأثير جوهري ، أما تلك التي تؤثر تأثير غير جوهري قد استبعدت من النموذج المقدر .

(٦) من أهم النتائج التي تظهر بالجدول أنه مع كل انحراف لسعر الصرف العاجل (قصير الأجل) عن سعر تعادل القوى الشرائية طويل الأجل بوحدة واحدة يحدث هناك تصحيح في الفترات التالية بنسبة ٣ ٪ في كل الحالات تقريباً . ولكن يلاحظ أن الفترة التي يحدث فيها التصحيح تختلف من دولة لأخرى . ففي المملكة المتحدة يحدث التصحيح في الشهر التالي ، وفي اليابان يحدث بعد ٢٨ شهر ، وربما يعكس هذا الطبيعة المغلقة للاقتصاد الياباني أمام الواردات بالمقارنة مع الدول الأخرى . وفي حالتي فرنسا وألمانيا يحدث التصحيح بعد سنة (١٢ شهر) . وتعتبر هذه النتيجة دليل على صحة نظرية تعادل القوى الشرائية .

(٧) وفيما يتعلق بمتغير السعر النسبي (p^{F}_{T-K}/P^{D}_{t-k}) فقد اتضح أن له تأثير طردي وجوهري في كل الحالات على سعر الصرف ، وهو ما يتفق مع التوقعات القبلية. ولكن الفترة التي يحدث خلالها التأثير تختلف من عملة لأخرى . فبالنسبة للمارك الألماني

يحدث التأثير بعد شهر واحد ، وبالنسبة للدولار الكندي يحدث التأثير بعد ٣١ شهر ، وهكذا .

(٨) يؤثر سعر الفائدة تأثيراً جوهريا وعكسياً على سعر الصرف في الدول الخمس . ولعل هذا يتفق مع التوقعات القبلية ، حيث أن ارتفاع أسعار الفائدة في الدول الأخرى بالمقارنة بسعر الفائدة بدولة ما يشجع على هجرة رؤوس الأموال قصيرة الأجل للخارج . وبالطبع يترتب على خروج أرصدة بالعملات الأجنبية للخارج انخفاض عرضها في الداخل ومن ثم زيادة قيمتها بدلالة العملة المحلية ، وهو ما يعني انخفاض سعر صرف العملة المحلية بدلالة العملات الأجنبية . ولكن يلاحظ أن تأثيره في معظم الحالات يتم في الأجل القصير .

(٩) يؤثر الناتج المحلي أيضا في كل الحالات على سعر الصرف ، وإن كانت إشارة التأثير تختلف من دولة لأخرى . ويلاحظ بوجه عام أن الإشارة السالبة لمعلمة هذا المتغير تتفق مع النموذج التقليدي لتحديد سعر الصرف . فزيادة الناتج المحلي الأجنبي بالنسبة للناتج المحلي الداخلي يساعد على زيادة نسبة الواردات للدولة المعينة بالنسبة لصادراتها ، وهذا من شأنه أن يقلل من عرض العملة الأجنبية ويزيد من الطلب عليها في نفس الوقت بالداخل . ويترتب على ذلك زيادة قيمة العملة الأجنبية بدلالة العملة المحلية ، أي انخفاض سعر صرف العملة المحلية بدلالة العملة الأجنبية.

(١٠) يلاحظ أن متغير كمية النقود يؤثر تأثيراً طردياً وجوهرياً على سعر الصرف في ثلاث دول هي اليابان وفرنسا وألمانيا ، غير أن تأثيره غير جوهري في كل من كندا والمملكة المتحدة . ويتفق التأثير الطردي مع التوقعات القبلية ، حيث أن زيادة كمية النقود في الخارج بنسبة أكبر منها في الداخل يساعد على انخفاض سعر الفائدة في الخارج بالنسبة للداخل . ومن المتوقع أن يترتب على ذلك تدفق رؤوس الأموال قصيرة الأجل للداخل ومن ثم زيادة عرض العملات الأجنبية ، الأمر الذي يؤدي لانخفاض قيمتها بدلالة العملة المحلية ، أي ارتفاع سعر صرف العملة المحلية بدلالة العملة الأجنبية .

(٢٤-٣-٤) تقدير نموذج تصحيح الخطأ ECM لتعادل القوى الشرائية ببيانات سنوية :

تعتبر البيانات الشهرية أكثر ملائمة لتقدير التأثيرات قصيرة الأجل ، هذا في حين تعتبر البيانات السنوية أكثر ملائمة لتقدير التأثيرات طويلة الأجل . ولذا ربما يكون من الأفضل تقدير نموذج تصحيح الخطأ لتعادل القوى الشرائية باستخدام بيانات سنوية ، نظراً لأن تعادل القوى الشرائية تعتبر ظاهرة طويلة الأجل . ولقد قام الباحثان بإعادة تقدير نموذج تصحيح الخطأ باستخدام بيانات سنوية ، وجاءت النتائج على النحو الموضح في الجدول (٢٤-٤) .

جدول (٢٤-٤) – تقدير نموذج تصحيح الخطأ لتعادل القوى ا لشرائية ببيانات سنوية

Country	Estimate	R^2	DW
Canada 1978-96	$\Delta S_t = 0.996\Delta \ln\left(P_{t-3}^F / P_{t-3}^D\right) - 0.424 EC_{t-2}$ (2.933) (-2.292)	0.74	1.716
France 1975-96	$\Delta S_t = 5.532\Delta \ln\left(P_{t-3}^F / P_{t-3}^D\right)$ (4.389) $-1.09\Delta \ln\left(y_t^F / y_t^D\right) - 0.651 EC_{t-1}$ (-1.457) (-2.633)	0.579	1.715
Germany 1973-96	$\Delta S_t = 1.852\Delta \ln\left(P_t^F / P_t^D\right)$ (1.750) $-1.736\Delta \ln\left(y_t^F / y_t^D\right) - 0.394 EC_{t-2}$ (-3.108) (-2.404)	0.433	1.842
Japan 1978-96	$\Delta S_t = 1.105\Delta \ln\left(r_t^F / r_t^D\right)$ (1.683) $+1.11\Delta \ln\left(m_t^F / m_t^D\right) - 0.366 EC_{t-3}$ (2.308) (-2.155)	0.452	1.889
UK 1973-96	$\Delta S_t = 1.850\Delta \ln\left(P_t^F / P_t^D\right)$ (2.396) $-1.374\Delta \ln\left(y_t^F / y_t^D\right) - 0.436 EC_{t-2}$ (-1.686) (-3.437)	0.426	1.84

وبفحص النتائج المعروضة بالجدول (٢٤-٤) يتضح أنها أكثر تأييداً لفرضية تعادل القوى الشرائية، وذلك على النحو التالي :

(١) فمن ناحية يلاحظ أن معامل التحديد زاد بدرجة كبيرة في حالة استخدام البيانات السنوية عنها في حالة استخدام البيانات الشهرية ، وهو ما يشير إلى تحسن المقدرة التفسيرية للنموذج .

(٢) ومن ناحية أخرى يلاحظ أن قيمة معامل التعديل زادت مع احتفاظها بالإشارة الصحيحة ، وهو ما يشير إلى أن معدل تعديل سعر الصرف العاجل نحو السعر طويل الأجل الذي يسود في حالة تعادل القوى الشرائية أصبح أكبر . فهو يبلغ ٤٠ ٪ تقريبا في كل الحالات ، ما عدا فرنسا التي يصل فيها ٦٥ ٪ .

(٣) يلاحظ أن المتغيرات التي تؤثر في الأجل القصير مثل سعر الفائدة والعرض النقدي أصبح تأثيرها غير معنوي عند استخدام بيانات سنوية في معظم الحالات ، ولذا اختفت من النموذج المقدر ما عدا حالة اليابان .

(٤) نخلص مما سبق إلى أن استخدام بيانات سنوية لاختبار فرضية تعادل القوى الشرائية أفضل من استخدام بيانات شهرية .

الفصل الخامس والعشرون

العلاقة بين المبيعات والإعلان

النماذج الآنية وعلاقات التغذية المرتدة

Causality and Simultaneity

مقدمة

يعتبر الإعلان أحد عناصر المزيج التسويقي . ولقد زادت المبالغ المنفقة عليه في الفترة الأخيرة بدرجة كبيرة . ففي خلال الفترة ١٩٤٠ إلى ١٩٧٠ زاد الإنفاق على الإعلان في الولايات المتحدة الأمريكية من ٢ بليون دولار إلى ٢٠ بليون دولار ، ثم وصل عام ١٩٨٨ إلى ١١٨ بليون دولار بواقع ٤٥٠ دولار للفرد . كما بلغت نسبته ٢,٥ ٪ تقريباً من الناتج القومي خلال نفس العام .

ويرى بعض الاقتصاديين أن الإعلان من الممكن استخدامه كأحد العوامل التي تخفف من حدة تقلبات مستوى الأداء الاقتصادي التي تصاحب الدورة التجارية وذلك من خلال التأثير على الطلب الكلي .

ويرى البعض الآخر أن هناك علاقة تبادلية بين المبيعات والإعلان . ونحن نهدف إلى مناقشة بعض النماذج التي تعرضت لمثل هذه العلاقة في هذا الفصل . ويقع هذا الفصل في مبحثين :

المبحث الأول : النماذج القياسية للعلاقة بين المبيعات والإعلان .

المبحث الثاني : نتائج بعض الدراسات التطبيقية عن العلاقة بين الإعلان والمبيعات .

المبحث الأول

نماذج قياسية للعلاقة بين المبيعات والإعلان

(٢٥-١-١) قياس الإعلان :

من أهم المشاكل التي تواجه البحث القياسي في هذا الصدد كيفية قياس الإعلان كمتغير تابع أو مستقل . وتتكلم الكتابات النظرية في مجال الإعلان عادة عن عدد إرساليات الإعلان Advertising Messages وسعر أو تكلفة الإرسالية ، بحيث أن الإنفاق الكلى على الإعلان يساوى حاصل ضرب الأول في الثاني . ولكن مثل هذا التبسيط غير موجود في الواقع . فالأنشطة الترويجية لأي منتج تحتوى على مزيج من العناصر مثل عرض عينات من السلعة ، وتقديم بعض الهدايا ، وتقديم خصم في السعر ، وتقديم بعض المعونات الاجتماعية للمحتاجين أو لخدمة بعض الأغراض العامة ، بالإضافة إلى الإعلان عن السلعة في أجهزة الاتصال المختلفة المقروءة والمسموعة والمرئية . ويوضح الجدول (٢٥-١) هيكل الإنفاق على الإعلان في الولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٨٨ م (١١٨ بليون دولار).

جدول (٢٥-١)-هيكل الإنفاق على الإعلان في الولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٨٨

بند	نسبة
الجرائد	٪ ٢٦
التليفزيون	٪ ٢٢
البريد المباشر	٪ ١٨
الراديو	٪ ٧
المجلات	٪ ٥
نشرات تجارية أخرى	٪ ٢
وسائل إعلام أخرى	٪ ٢٠
إجمالي	٪ ١٠٠

والسؤال الآن كيف يمكن تحديد كمية الإعلان وسعر الإعلان ؟ من المحاولات التي تمت لتحديد كمية الإعلان ، تحديد عدد الأفراد الذين تعرضوا ولو لمرة واحدة للحملة الإعلانية خلال فترة زمنية معينة ، وتحديد عدد المرات التي تعرض خلالها الفرد العادي لحملات إعلانية خلال فترة زمنية معينة (ويسمى التكرار) .

ومع تحديد كمية الإعلان بأي طريقة يمكن تحديد متوسط السعر عن طريق قسمة الإنفاق الكلي على الإعلان على كمية الإعلان المحددة ، وذلك تمهيداً للحصول على ما يسمى بالرقم القياسي لسعر الإعلان .

وهناك بعض المتخصصين في مجال الاقتصاد القياسي الذين استخدموا بيانات الإنفاق الجاري على الإعلان كمؤشر للإعلان ، وهناك من قاموا بالحصول على القيمة الحقيقية للإنفاق الإعلاني عن طريق استخدام الرقم القياسي للأسعار .

(٢٥-١-٢) التحليل الآني للإعلان والمبيعات واختبار هوسمان:

Hausman specification test

يمكن التعبير عن العلاقة التبادلية الآنية بين الإعلان والمبيعات باستخدام النموذج التالي :

ع ز = أ ١ + ب ١ ى ز + حـ ١ ث ١ز + ى ١ز .... (٢٥-١)

ى ز = أ ٢ + ب ٢ ع ز + حـ ٢ ث ٢ز + ى ٢ز .... (٢٥-٢)

$$S_t = \alpha_1 + \beta_1 A_t + c_1 P_{1t} + u_1$$

$$A_t = \alpha_2 + \beta_2 S_t + c_2 P_{2t} + u_{2t}$$

حيث :

ع ز = كمية المبيعات خلال الفترة "ز" (S_t)

ى ز = عدد إرساليات الإعلان في الفترة " ز " (A_t)

ث ١ز = الرقم القياسي لسعر السلعة الحقيقي في الفترة "ز" (P_{1t})

ث ٢ز = الرقم القياسي لسعر الإعلان الحقيقي في الفترة "ز" (P_{2t})

ى ١ز ، ى ٢ز = حدود عشوائية (u_{1t} , u_{2t})

ومن المتوقع أن تكون المعلمتان $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$ موجبتين ، بينما من المتوقع أن تكون المعلمتان $\text{جـ}_{١}$ ، $\text{جـ}_{٢}$ سالبتين . ويلاحظ أن وجود " $\text{ء}_{١\text{ر}}$ " كأحد العوامل المؤثرة على "$\text{ع}_{\text{ز}}$" في المعادلة (٢٥-١) ، وكون "$\text{ع}_{\text{ز}}$" يؤثر في "$\text{ى}_{\text{ز}}$" وفقا للمعادلة (٢٥-٢) ، فإن " $\text{ء}_{١\text{ر}}$ " يؤثر على "$\text{ى}_{\text{ز}}$" بالمعادلة (٢٥-١) . وكذلك " $\text{ء}_{٢}$ " يؤثر على "ع" بالمعادلة (٢٥-٢). ووجود مثل هذه العلاقات التي يفترض عدم وجودها عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) يجعل استخدامها يترتب عليه الحصول على مقدرات متحيزة وغير متسقة

وباختبار النموذج السابق باستخدام شرطي الرتبة والمرتبة يتضح أن كل معادلة من المعادلتين معرفة تعريفاً تاماً Just Identified . وباستخدام طريقة الصيغ المختصرة Reduced Forms أو ما يسمى بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة Indirect Least Squares (ILS) نجد ما يلي :

بتعديل (٢٥-٢) نحصل على :

$$\text{ب}_{٢}\,\text{ع}_{\text{ر}} = -\text{أ}_{٢} + \text{ى}_{\text{ر}} - \text{حـ}_{٢}\,\text{ث}_{٢\text{ر}} - \text{ء}_{٢\text{ر}}$$

$$\therefore\ \text{ع}_{\text{ر}} = -\frac{\text{أ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}} + \frac{١}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ى}_{\text{ر}} - \frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ث}_{٢\text{ر}} - \frac{١}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ء}_{٢\text{ر}} \quad \text{....(٢٥-٣)}$$

وبمساواة (٢٥-٣) مع (٢٥-١) نحصل على :

$$\text{أ}_{١} + \text{ب}_{١}\,\text{ى} + \text{جـ}_{١}\,\text{ث}_{١\text{ر}} + \text{ء}_{١\text{ر}} = -\frac{\text{أ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}} + \frac{١}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ى}_{\text{ر}} - \frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ث}_{٢\text{ر}} - \frac{١}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ء}_{٢\text{ز}}$$

$$\frac{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ى}_{\text{ر}} = \frac{\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} + \text{أ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}} + \text{حـ}_{١}\,\text{ث}_{١\text{ر}} + \frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{ب}_{٢}}\,\text{ث}_{٢\text{ر}} + \left(\frac{\text{ب}_{٢}\,\text{ء}_{١\text{ز}} + \text{ء}_{٢\text{ز}}}{\text{ب}_{٢}}\right)$$

$$\therefore \text{ى}_{\text{ز}} = \frac{\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} + \text{أ}_{٢}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}} + \frac{\text{ب}_{٢}\text{حـ}_{١}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}\text{ث}_{١\text{ز}} + \frac{\text{حـ}_{٢}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \frac{\text{ب}_{٢}\text{ع}_{١\text{ز}} + \text{ع}_{٢\text{ز}}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}$$

$$\text{ى}_{\text{ز}} = \text{ق}_{١} + \text{ك}_{١}\text{ث}_{١\text{ز}} + \text{ف}_{١}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \text{و}_{١\text{ز}} \quad .... \quad (٢٥-٤)$$

ومن (٢٥-١) نجد أن :

$$\text{ب}_{١}\text{ى}_{\text{ز}} = -\text{أ}_{١} + \text{ع}_{\text{ز}} - \text{حـ}_{١}\text{ث}_{١\text{ز}} - \text{ع}_{١\text{ز}}$$

$$\therefore \text{ى}_{\text{ز}} = -\frac{\text{أ}_{١}}{\text{ب}_{١}} + \frac{١}{\text{ب}_{١}}\text{ع}_{\text{ز}} - \frac{\text{حـ}_{١}}{\text{ب}_{١}}\text{ث}_{١\text{ز}} - \frac{١}{\text{ب}_{١}}\text{ع}_{١\text{ز}} \quad ..... \quad (٢٥-٥)$$

وبمساواة (٢٥-٥) مع (٢٥-٢) نحصل على :

$$-\frac{\text{أ}_{١}}{\text{ب}_{١}} + \frac{١}{\text{ب}_{١}}\text{ع}_{\text{ز}} - \frac{\text{حـ}_{١}}{\text{ب}_{١}}\text{ث}_{١\text{ز}} - \frac{١}{\text{ب}_{١}}\text{ع}_{١\text{ز}} = \text{أ}_{٢} + \text{ب}_{٢}\text{ع}_{\text{ز}} + \text{حـ}_{٢}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \text{ع}_{٢\text{ز}}$$

$$\frac{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}{\text{ب}_{١}}\text{ع}_{\text{ز}} = \frac{\text{أ}_{٢}\text{ب}_{١} + \text{أ}_{١}}{\text{ب}_{١}} + \frac{\text{حـ}_{١}}{\text{ب}_{١}}\text{ث}_{١\text{ز}} + \text{حـ}_{٢}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \frac{\text{ب}_{١}\text{ع}_{٢\text{ز}} + \text{ع}_{١\text{ز}}}{\text{ب}_{١}}$$

$$\therefore \text{ع}_{\text{ز}} = \frac{\text{أ}_{٢}\text{ب}_{١} + \text{أ}_{١}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}} + \frac{\text{حـ}_{١}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}\text{ث}_{١\text{ز}} + \frac{\text{ب}_{١}\text{حـ}_{٢}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \frac{\text{ب}_{١}\text{ع}_{٢\text{ز}} + \text{ع}_{١\text{ز}}}{١ - \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}$$

$$\therefore \text{ع}_{\text{ز}} = \text{ق}_{٢} + \text{ك}_{٢}\text{ث}_{١\text{ز}} + \text{ف}_{٢}\text{ث}_{٢\text{ز}} + \text{و}_{٢\text{ز}} \quad .... \quad (٢٥-٦)$$

ومما سبق يتضح أن نموذج الصيغ المختصرة يصبح :

$$\text{ى}_{\text{ز}} = \text{ق}_{1} + \text{ك}_{1}\,\text{ث}_{1\text{ز}} + \text{ف}_{1}\,\text{ث}_{2\text{ز}} + \text{و}_{1\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٥-٤)$$

$$A_t = H_1 + K_1 P_{1t} + F_1 P_{2t} + W_{1t}$$

$$\text{ع}_{\text{ز}} = \text{ق}_{2} + \text{ك}_{2}\,\text{ث}_{1\text{ز}} + \text{ف}_{2}\,\text{ث}_{2\text{ز}} + \text{و}_{2\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٥-٦)$$

$$S_t = H_2 + K_2 P_{1t} + F_2 P_{2t} + W_{2t}$$

حيث :

$$\text{ق}_{1} = \frac{\text{أ}_{1}\text{ب}_{2} + \text{أ}_{2}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}} \ ،\ \text{ك}_{1} = \frac{\text{ب}_{2}\text{ح}_{1}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}} \ ،\ \text{ف}_{1} = \frac{\text{ح}_{2}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}}$$

$$\text{ق}_{2} = \frac{\text{أ}_{2}\text{ب}_{1} + \text{أ}_{1}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}} \ ،\ \text{ك}_{2} = \frac{\text{ح}_{1}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}} \ ،\ \text{ف}_{2} = \frac{\text{ب}_{1}\text{ح}_{2}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}}$$

$$\text{و}_{1\text{ز}} = \frac{\text{ب}_{2}\text{ى}_{1\text{ز}} + \text{ى}_{2\text{ز}}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}} \ ،\ \text{و}_{2\text{ز}} = \frac{\text{ب}_{1}\text{ى}_{2\text{ز}} + \text{ى}_{1\text{ز}}}{1 - \text{ب}_{1}\text{ب}_{2}}$$

ويلاحظ أن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معادلات الصيغ المختصرة تعطى تقديرات غير متحيزة . وبتقدير نموذج الصيغ المختصرة يمكن الحصول على تقديرات لمعلمات النموذج الهيكلي الأصلي ، حيث :

$$\hat{\text{ب}}_{2} = \frac{\hat{\text{ك}}_{1}}{\hat{\text{ك}}_{2}} \ ،\ \hat{\text{ب}}_{1} = \frac{\hat{\text{ف}}_{2}}{\hat{\text{ف}}_{1}} \ ،\ \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{F}_2}{\hat{F}_1} \ ,\ \hat{p}_2 = \frac{\hat{K}_1}{\hat{K}_2}$$

وبضرب $\hat{\text{ب}}_{1}$ ، $\hat{\text{ب}}_{2}$ نحصل على :

$$\hat{\text{ب}}_{1}\hat{\text{ب}}_{2} = \frac{\hat{\text{ك}}_{1}\hat{\text{ف}}_{2}}{\hat{\text{ك}}_{2}\hat{\text{ف}}_{1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٥-٧)$$

$$\hat{\text{ك}}_{2} = \frac{\hat{\text{ح}}_{1}}{1 - \hat{\text{ب}}_{1}\hat{\text{ب}}_{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٥-٨)$$

ومن (٢٥–٨) : $\hat{ح}_١ = \hat{ك}_٢ (١ - \hat{ب}_١ \hat{ب}_٢)$ .... (٢٥–٩)

$$\hat{C}_1 = \hat{K}_2 (1 - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2)$$

ومن (٢٥–٧) : $(١ - \hat{ب}_١ \hat{ب}_٢) = ١ - \frac{\hat{ك}_١ \hat{ف}_٢}{\hat{ك}_٢ \hat{ف}_١}$ ..... (٢٥–١٠)

وبالتعويض من (٢٥–١٠) في (٢٥–٩) نحصل على :

$$\hat{ح}_١ = \hat{ك}_٢ (١ - \frac{\hat{ك}_١ \hat{ف}_٢}{\hat{ك}_٢ \hat{ف}_١}) = \hat{ك}_٢ . \frac{\hat{ك}_٢ \hat{ف}_١ - \hat{ك}_١ \hat{ف}_٢}{\hat{ك}_٢ \hat{ف}_١}$$

$\therefore \hat{ح}_١ = \hat{ك}_٢ - \frac{\hat{ك}_١ \hat{ف}_٢}{\hat{ف}_١}$ .... (٢٥–١١)

$$\hat{C}_1 = \hat{K}_2 - \frac{\hat{K}_1 \hat{F}_2}{\hat{F}_1}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$\hat{ح}_٢ = \hat{ف}_١ - \frac{\hat{ك}_١ \hat{ف}_٢}{\hat{ك}_٢}$ .... (٢٥–١٢)

$$\hat{C}_2 = \hat{F}_1 - \frac{\hat{K}_1 \hat{F}_2}{\hat{K}_2}$$

وبعمل اختصارات أخرى يمكن الحصول على $\hat{أ}_١$ ، $\hat{أ}_٢$. ولكن من المشاكل التي تواجهنا بعد الحصول على المعلمات المقدرة للنموذج الهيكلي الأصلي من المعلمات المقدرة لنموذج الصيغ المختصرة أنه يصعب اختبار معنوية هذه المعلمات نظراً لعدم وجود أي بيانات عن الخطأ المعياري لأي منها .

وللتغلب على هذه المشكلة يمكن استخدام طريقة المتغير الوسيط (IV) Instrument variable لتقدير معلمات النموذج الأصلي . وفى هذه الحالة نستخدم

المتغير الخارجي $ث_{٢ز}$ كمتغير وسيط للإعلان $ى_{ز}$ في معادلة المبيعات ، ونستخدم المتغير الخارجي $ث_{١ز}$ كمتغير وسيط للمبيعات في دالة الإعلان . وبهذه الطريقة يمكن الحصول على مقدرات متسقة للنموذج الهيكلي الأصلي باستخدام طريقة المتغير الوسيط .

وتعطى طريقتي (I L S) ، (I V) نفس النتائج في حالة النماذج المعرفة تعريفاً تاماً. وإن كانت تعطى نتائج مختلفة في حالة النماذج زائدة التعرف. وتعتبر طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (2 S LS) إحدى فصائل طريقة المتغير الوسيط . وتتمثل خطواتها ف :

(١) نقوم بتقدير دالة انحدار تكون فيها ($ى_{ز}$) متغير تابع والمتغيرات الخارجية $ث_{١ز}$ ، $ث_{٢ز}$ متغيرات تفسيرية (المعادلة (٢٥-٤) في طريقة الصيغ المختصرة) ، ثم نحصل على القيم المتوقعة للمتغير التابع ($\hat{ى}_{ز}$) من الدالة المقدرة . ونستخدم ($\hat{ى}_{ز}$) كمتغير وسيط عن ($ى_{ز}$) في معادلة المبيعات الأصلية بعد إعطاءه اسم جديد وليكن $ي_{١}$، وذلك بجانب المتغيرات الخارجية الأخرى بالمعادلة .

(٢) نقوم بتقدير دالة انحدار تكون فيها ($ع_{ز}$) متغير تابع والمتغيرات الخارجية $ث_{١ز}$ ، $ث_{٢ز}$ متغيرات تفسيرية (المعادلة (٢٥-٦) في طريقة الصيغ المختصرة) ، ثم نحصل على القيم المتوقعة للمتغير التابع ($\hat{ع}_{ز}$) من الدالة المقدرة . ونستخدم ($\hat{ع}_{ز}$) كمتغير وسيط عن ($ع_{ز}$) في معادلة الإعلان الأصلية بعد إعطاءه اسم جديد وليكن $ع_{١}$ ، وذلك بجانب المتغيرات الخارجية الأخرى بالمعادلة.

وبالطبع إذا لم يكن هناك ارتباط بين $ى_{ز}$ ، $ے_{١ز}$ في معادلة المبيعات (٢٥-١) ولم يكن هناك ارتباط بين $ع_{ز}$ ، $ے_{٢ز}$ في معادلة الإعلان (٢٥-٢) فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (O L S) في التقدير تعطى تقديرات متسقة وكفء ، في حين أن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تعطي نتائج متسقة فقط في حالة العينات الكبيرة. أما إذا كان هناك ارتباط فإن استخدام (OLS) يعطى نتائج غير متسقة في حين أن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تعطى نتائج متسقة .

ويمكن استخدام اختبار هوسمان للتعيين Hausman Specification Test لاختبار مدى وجود هذا الارتباط من عدمه . ولإجراء الاختبار بالنسبة للمعادلة (٢٥-١) نتبع الخطوات التالية :

(١) نقوم بتقدير الصيغة (٢٥-٤) ثم نحصل منها على $\hat{ى}_ز$.

(٢) نقوم بإجراء تقدير للصيغة :

ع ز = أ ١ + ب ١ ى ز + م ١ ىَ ز + حـ ١ ث ١ز + ٥ ١ز .... (٢٥-١٣)
$S_t = \alpha_1 + \beta_1 A_t + m_1 \hat{A}_t + C_1 P_{1t} + u_{1t}$

فإذا كانت م ١ (m_1) غير معنوية إحصائياً إذن لا يوجد هناك ارتباط بين ى ز ، ٥ ١ز في حالة العينة الكبيرة ، والعكس صحيح . ويمكن إتباع نفس الإجراء في حالة الصيغة (٢٥-٢) .

مثال (٢٥-١)
تقدير نموذج آني للعلاقة بين الإعلان والمبيعات

افترض أن البيانات الموضحة بالجدول (٢٥-٢) تعبر عن :

قيمة المبيعات بالمليون جنيه = S ، عدد إرساليات الإعلان = A

متوسط سعر البيع = P_1 ، متوسط سعر الإعلان (مبلغ منفق للفرد) = P_2

والمطلوب هو تقدير النموذج الآني الموضح بالمعادلتين (٢٥-١) ، (٢٥-٢) باستخدام هذه البيانات .

ولعمل ذلك نتبع الخطوات التالية :

(١) نستخدم اختبار هوسمان لاختبار مدى وجود ارتباط بين المتغيرات التفسيرية والحد العشوائي بكل معادلة . فبالنسبة للمعادلة (٢٥-١) نقوم بتقدير الصيغة (٢٥-٤) فنحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٣) .

جدول (٢٥-٢)

Year	S	A	P1	P2
1980	200	10	5.00	1.00
1981	210	11	4.90	0.96
1982	215	11.5	4.80	0.93
1983	220	12	4.50	0.92
1984	230	13	4.65	0.90
1985	250	15	4.50	0.88
1986	270	16	4.30	0.85
1987	280	16.5	4.10	0.83
1988	300	18	4.00	0.80
1989	310	19	3.75	0.77
1990	315	20	3.73	0.72
1991	330	22	3.70	0.70
1992	350	23	3.67	0.68
1993	360	25	3.60	0.65
1994	370	27	3.55	0.60
1995	400	30	3.40	0.56

جدول (٢٥-٣)

Dependent Variable: A
Method: Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 19:33
Sample: 1980 1995
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	51.72758	1.701924	30.39358	0.0000
P1	2.073795	1.253512	1.654388	0.1220
P2	-53.00571	4.982940	-10.63744	0.0000

R-squared	0.989492	Mean dependent var	18.06250
Adjusted R-squared	0.987876	S.D. dependent var	6.063209
S.E. of regression	0.667626	Akaike info criterion	2.197182
Sum squared resid	5.794412	Schwarz criterion	2.342043
Log likelihood	-14.57746	F-statistic	612.0863
Durbin-Watson stat	1.614311	Prob(F-statistic)	0.000000

أي أن الصيغة المقدرة هي: $\hat{A}_t = 51.727 + 2.074P_{1t} - 53P_{2t}$

(٢) بالحصول على من الصيغة المقدرة تلك واستخدامها في تقدير المعادلة (٢٥-١٣) نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٤).

جدول (٢٥-٤)

Dependent Variable: S
Method: Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 19:58
Sample: 1980 1995
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	335.6888	44.12048	7.608457	0.0000
A	9.339640	2.022332	4.618252	0.0006
A1	-2.443993	2.135344	-1.144543	0.2747
P1	-41.63057	7.775681	-5.353945	0.0002
R-squared	0.995291	Mean dependent var		288.1250
Adjusted R-squared	0.994114	S.D. dependent var		63.45274
S.E. of regression	4.868075	Akaike info criterion		6.215592
Sum squared resid	284.3778	Schwarz criterion		6.408739
Log likelihood	-45.72474	F-statistic		845.4860
Durbin-Watson stat	2.146523	Prob(F-statistic)		0.000000

ومن الواضح بالجدول (٢٥-٤) أن معلمة $A_{1\,t}$ (أي $\hat{A}_t$) غير معنوية إحصائياً مما يعني أنه لا يوجد هناك ارتباط بين A_t ، u_{1t} في معادلة المبيعات (٢٥-١) ، ومن ثم فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تصلح في هذه الحالة لتقدير هذه الدالة . وبتقدير دالة المبيعات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٥) .

جدول (٢٥-٥)

Dependent Variable: S
Method: Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 20:00
Sample: 1980 1995
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	319.8875	42.40153	7.544245	0.0000
A	7.147495	0.656884	10.88090	0.0000
P1	-38.90895	7.490899	-5.194162	0.0002
R-squared	0.994777	Mean dependent var		288.1250
Adjusted R-squared	0.993974	S.D. dependent var		63.45274
S.E. of regression	4.925771	Akaike info criterion		6.194199
Sum squared resid	315.4219	Schwarz criterion		6.339060
Log likelihood	-46.55360	F-statistic		1238.053
Durbin-Watson stat	1.687970	Prob(F-statistic)		0.000000

ومن الواضح بالجدول (٢٥-٥) أن عدد إرساليات الإعلان (A_t) تؤثر تأثيراً طردياً وجوهرياً على المبيعات S_t ، كما أن سعر البيع P_1 يؤثر تأثيراً عكسياً وجوهرياً على المبيعات . وإذا حاولنا تقدير نفس العلاقة باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وذلك باستخدام برنامج Eviews :

Quick/estimate equation/TSLS
S c A P1
Instrument list P1 P2 A1

فسوف نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٦) .

جدول (٢٥-٦)

Dependent Variable: S
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 20:28
Sample: 1980 1995
Included observations: 16
Instrument list: P1 P2 A1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	335.6888	44.89508	7.477184	0.0000
A	6.895647	0.697503	9.886196	0.0000
P1	-41.63057	7.912196	-5.261570	0.0002
R-squared	0.994718	Mean dependent var		288.1250
Adjusted R-squared	0.993906	S.D. dependent var		63.45274
S.E. of regression	4.953541	Sum squared resid		318.9885
F-statistic	1214.544	Durbin-Watson stat		1.759684
Prob(F-statistic)	0.000000			

وبمقارنة النتائج بالجدولين (٢٥-٥) ، (٢٥-٦) نجد أنها نتائج متقاربة سواء من ناحية المدلول الاقتصادي أو المعنوية الإحصائية أو المقدرة التفسيرية . ويلاحظ هنا أن وضع A1 بجانب P2 , P1 كمتغيرات وسيطة يعتبر تحصيل حاصل ولا يؤثر في النتيجة عما إذا لم ندرج A1 ، وذلك لأننا قدرنا A1 بدلالة P1 , P2 .

(٣) ولإجراء اختبار هوسمان بالنسبة لمعادلة الإعلان (٢٥-٢) نقوم بتقدير الصيغة (٢٥-٦) فنحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٧) :

جدول (٢٥-٧)

Dependent Variable: S
Method: Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 20:05
Sample: 1980 1995
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	692.3839	19.87005	34.84560	0.0000
P1	-27.33042	14.63481	-1.867494	0.0845
P2	-365.5087	58.17608	-6.282800	0.0000
R-squared	0.986922	Mean dependent var		288.1250
Adjusted R-squared	0.984910	S.D. dependent var		63.45274
S.E. of regression	7.794564	Akaike info criterion		7.112091
Sum squared resid	789.8179	Schwarz criterion		7.256951
Log likelihood	-53.89673	F-statistic		490.5252
Durbin-Watson stat	1.298014	Prob(F-statistic)		0 000000

أي أن الصيغة المقدرة هي : $\hat{S}_t = 692.38 - 27.33 P_{1t} - 365.5 P_{2t}$

وبالتعويض عن S_{1t} ، $\hat{S}$ يمكن تقدير الصيغة الموضحة بالجدول (٢٥-٨)

جدول (٢٥-٨)

Dependent Variable: A
Method: Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 20:20
Sample: 1980 1995
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	104.2647	19.00324	5.486682	0.0001
S	0.068519	0.014837	4.618252	0.0006
S1	-0.144398	0.032259	-4.476176	0.0008
P2	-80.74001	13.50017	-5.980667	0.0001
R-squared	0.996217	Mean dependent var		18.06250
Adjusted R-squared	0.995271	S.D. dependent var		6.063209
S.E. of regression	0.416964	Akaike info criterion		1.300684
Sum squared resid	2.086307	Schwarz criterion		1.493831
Log likelihood	-6.405470	F-statistic		1053.251
Durbin-Watson stat	2.462820	Prob(F-statistic)		0.000000

ويتضح من الجدول (٢٥-٨) أن معلمة S_{1t} ذات معنوية إحصائية عند ١ ٪ مما يعني أن هناك ارتباطاً بين S_t ، u_{2t} بالمعادلة (٢٥-٢) ولذا فإن استخدام طريقة المربعات

الصغرى العادية في تقدير هذه المعادلة قد يعطى تقديرات غير متسقة . ولذا من الأفضل استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في تقديرها . وبعمل ذلك نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-٩) .

جدول (٢٥-٩)

Dependent Variable: A
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 05/29/04 Time: 20:31
Sample: 1980 1995
Included observations: 16
Instrument list: P1 P2 S1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	104.2647	54.44817	1.914935	0.0778
S	-0.075879	0.082074	-0.924520	0.3721
P2	-80.74001	38.68075	-2.087344	0.0571

R-squared	0.966352	Mean dependent var	18.06250
Adjusted R-squared	0.961176	S.D. dependent var	6.063209
S.E. of regression	1.194687	Sum squared resid	18.55460
F-statistic	191.1483	Durbin-Watson stat	1.361136
Prob(F-statistic)	0.000000		

ووفقاً للجدول (٢٥-٩) فإن المبيعات لا تؤثر جوهرياً على الإعلان وإن كان سعر الإعلان يؤثر عكسياً على عدد الإرساليات الإعلانية وله معنوية إحصائية وفقاً لاختبار الخطأ المعياري . ويلاحظ هنا أيضا أنه من الممكن الاقتصار على P1,P2 كمتغيرات وسيطة دون S1 ولن تتغير النتيجة ، ذلك لأنه في المرحة تم تقدير S1 بدلالة كل من P1 , P2.

(٢٥-١-٣) اختبار جرانجر للسببية Granger causality test

يستخدم اختبار جرانجر في التأكد من مدى وجود علاقة تغذية مرتدة Feedback أو علاقة تبادلية بين متغيرين كالإعلان والمبيعات ، وذلك في حالة وجود بيانات سلسلة زمنية . ومن المشاكل التي توجد في هذه الحالة أن بيانات السلسلة الزمنية لمتغير ما كثيراً ما تكون مرتبطة ، أي يوجد ارتباط ذاتي بين قيم المتغير الواحد عبر الزمن .

ولاستبعاد أثر هذا الارتباط الذاتي أو السلسلي إن وجد يتم إدراج قيم نفس المتغير التابع لعدد من الفجوات الزمنية كمتغيرات تفسيرية في علاقة السببية المراد قياسها . يضاف إلى ذلك إدراج قيم المتغير التفسيري الآخر لعدد من الفجوات الزمنية كمتغيرات تفسيرية أيضاً وذلك باعتبار أن السبب يسبق النتيجة في الزمن . وقد تعرضنا لنموذج سببية جرانجر مرتين سابقا : المرة الأولى في صيغة نموذج تصحيح الخطأ ECM أو VEC والمرة الثانية عند استخدام نموذج VAR التقليدي في التنبؤ . ويعتمد اختبار جرانجر للسببية على نموذج VAR تقليدي ، وهو يستخدم حتى في حالة أن تكون البيانات غير متصفة بخاصية التكامل المشترك ، والتي تعتبر شرطاً ضرورياً لاستخدام ECM . وسوف نتبع طريقة جديدة في إجراء اختبار جرانجر للسببية لم نتعرض لها من قبل .

ولتوضيح هذه الطريقة دعنا نرمز إلى متغير المبيعات بالرمز (ع) (S) ولمتغير الإعلان بالرمز (ل) (Y) ، ومن ثم يتطلب اختبار جرانجر للسببية تقدير العلاقتين التاليتين :

$$\text{ل}_{\text{ز}} = \text{أ} + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_1} \text{ب}_{\text{ر}}\, \text{ل}_{\text{ز-ر}} + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_2} \text{ح}_{\text{ر}}\, \text{ع}_{\text{ز-ر}} + \text{ع}_{1\text{ز}} \qquad \text{....... (٢٥-١٤)}$$

$$Y_t = \alpha_0 + \Sigma\ \beta_i Y_{t-i} + \Sigma\ C_i S_{t-i} + u_{1t}$$

$$\text{ع}_{\text{ز}} = \text{ق} + \sum_{\text{ر}=1} \text{هـ}_{\text{ر}}\, \text{ع}_{\text{ز-ر}} + \sum_{\text{ر}=1} \text{م}_{\text{ر}}\, \text{ل}_{\text{ز-ر}} + \text{ع}_{2\text{ز}} \qquad \text{....... (٢٥-١٥)}$$

$$S_t = H_0 + \Sigma\ K_i S_{t-i} + \Sigma\ m_i Y_{t-i} + u_{2t}$$

ويلاحظ أن ن ١ ، ن ٢ ، ن ٣ ، ن ٤ هي عدد الفجوات الزمنية لكل متغير تفسيري وهي يمكن أن تكون مختلفة جميعها ويمكن أن تكون متساوية . وتتمثل خطوات اختبار جرانجر للسببية فيما يلي :

(١) يتم تقدير الصيغة المقيدة التالية :

ل ز = أ + ∑ ب ر ل ز-ر + و ١ز

$$Y_t = \alpha_0 + \Sigma \ \beta_i Y_{t-i} + W_{it}$$

والت تفترض أن ∑ حـ ر = صفر ، أي أن المبيعات لا تؤثر على الإعلان . ثم نحصل على ى م = ∑ و٢ ١ز = مجموع مربعات البواقي . [$E_m = \Sigma W^2_{it}$]

ويتم تقدير الصيغة غير المقيدة التي تتمثل في المعادلة (٢٥-١٤) ثم نحصل منها على ى ر = ∑ء٢ ١ز = مجموع مربعات البواقي . [$E_i = \Sigma u^2_{it}$]

(٣) عندئذ نختبر فرض العدم ∑ حـ ر = صفر ، في مواجهة الفرض البديل ∑حـ ر ≠ صفر باستخدام إحصائية ف (F) ، حيث :

ف المحسوبة (ف *) = (ى م - ى ر) ÷ ن٢ / ى ر ÷ (ن - ك) .... (٢٥-١٦)

$$F^* = \frac{(E_m - E_i)/n_2}{E_i/(n-k)}$$

حيث : ن ٢ = عدد الفجوات الزمنية في حالة المتغير التفسيري (ع) (n_2)

ن = حجم العينة (n)

ك = عدد المعلمات المقدرة في الصيغة غير المقيدة (k)

ن - ك = درجات الحرية للصيغة غير المقيدة (n - k)

ثم نقوم بالحصول على" ف الجدولية " عند مستوى معنوية معين ١ ٪ أو ٥ ٪ ، ودرجات حرية ن ٢ للبسط ، (ن - ك) للمقام ($F^{n_2}_{(n-k),\alpha}$) . ولو أن: ف المحسوبة> ف الجدولية نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ، ونقول أن المبيعات تسبب الإعلان وفقاً لاختبار جرانجر ، والعكس صحيح .

(٤) نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة بالنسبة للمعادلة (٢٥-١٥) ، ويوجد هناك ٤ احتمالات ممكنة :

(أ) المبيعات تسبب الإعلان ، و الإعلان لا يسبب المبيعات .

رفض $\sum$ حـر = صفر ، وقبول $\sum$ مر = صفر .

(ب) المبيعات لا تسبب الإعلان ، و الإعلان يسبب المبيعات.

قبول $\sum$ حـر = صفر ، ورفض $\sum$ مر = صفر .

(حـ) المبيعات تسبب الإعلان ، و الإعلان يسبب المبيعات أي توجد تغذية مرتدة .

رفض $\sum$ حـر = صفر ، ورفض $\sum$ مر = صفر .

(ء) المبيعات لا تسبب الإعلان ، و الإعلان لا يسبب المبيعات .

قبول $\sum$ حـر = صفر ، وقبول $\sum$ مر = صفر .

(٥) يمكن إدراج متغيرات تفسيرية أخرى بالصيغتين (٢٥-١٤) ، (٢٥-١٥) إذا كان يعتقد أنها تؤثر على المبيعات أو الإعلان ، كل فيما يخصه .

مثال (٢٥-٢)

اختبار سببية جرانجر بين الإعلان والمبيعات

افترض أن البيانات الموضحة بالجدول (٢٥-١٠) تشير إلى :

Y = الإعلان ، المبيعات = S اختبر مدى وجود سببية جرانجر بينهما .

جدول (٢٥-١٠)

Year	S	Y	Year	S	Y
1980	200	10	1988	300	18
1981	210	11	1989	310	19
1982	215	11.5	1990	315	20
1983	220	12	1991	330	22
1984	230	13	1992	350	23
1985	250	15	1993	360	25
1986	270	16	1994	370	27
1987	280	16.5	1995	400	30

وباستخدام برنامج Eviews :

View/Granger Causality
Lags #

نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (٢٥-١١) عند تجريب الاختبار لفجوتين زمنيتين، والنتائج الموضحة بالجدول (٢٥-١٢) في حالة فجوة زمنية واحدة .

جدول (٢٥-١١)- اختبار السببية لفجوتين زمنيتين

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 05/29/04 Time: 22:46
Sample: 1980 1995
Lags: 2

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
S does not Granger Cause Y	14	2.03274	0.18686
Y does not Granger Cause S		2.34911	0.15104

جدول (٢٥-١٢)- اختبار السببية لفجوة زمنية واحدة

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 05/29/04 Time: 22:51
Sample: 1980 1995
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
S does not Granger Cause Y	15	2.26470	0.15821
Y does not Granger Cause S		5.66899	0.03470

وبالبحث عن F الجدولية عند درجات الحرية الموضحة بالجدول (٢٥-١٣) نحصل على النتائج الموضحة بنفس الجدول .

جدول (٢٥-١٣)- اختبار F عند مستوى معنوية ٥ ٪

عدد الفجوات	درجات حرية البسط (V_1) = (ن ٢)	درجات حرية المقام V_2 = (ن - ك)	F الجدولية
٢	٢	١١	٣,٩٨
١	١	١٣	٤,٦٧

وبمقارنة *F المحسوبة بالجدولين (٢٥-١١) ، (٢٥-١٢) F، الجدولية بالجدول (٢٥-١٣) يتضح أن فرض العدم مقبول في الحالتين بالنسبة لأثر المبيعات

على الإعلان وهو ما يعني أن المبيعات لا تؤثر جوهرياً على الإعلان . ولكن في حالة الفجوة الواحدة نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن الإعلان يؤثر جوهرياً على المبيعات ، حيث أن F^* المحسوبة أكبر من F الجدولية .

(٢٥-١-٤) نماذج الأنصبة السوقية وعدم الاتساق :

تفترض بعض النماذج أن النصيب النسبي للمنشأة "ر "من السوق في السنة " ز" (ص ر ز) y_{it} دالة في النصيب النسبي للمنشأة من الإنفاق الإعلاني للمنشآت المنافسة (س ر ز) X_{it} ، وفي ولاء عملاء المنشأة مقاساً بالنصيب النسبي للمنشأة في السوق بالسنة الماضية (ص ر ز-١) y_{it-1} ، حيث :

ص ر ز = $\dfrac{\text{مبيعات المنشأة في السنة ز}}{\text{مبيعات السوق في السنة ز}}$ = y_{it}

س ر ز = $\dfrac{\text{الإنفاق الإعلاني للمنشأة (ق ١)}}{\text{الإنفاق الإعلاني للمنشآت المنافسة (ق ٢)}}$ = X_{it}

ومما سبق يمكن كتابة النموذج المراد تقديره على النحو التالي :

ص ر ز = أ ر + ب ر س ر ز + حـ ر ص ر ز-١ + ع ر ز ...... (٢٥-١٧)

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_i X_{it} + C_i y_{it-1} + u_{it}$$

غير أن المعادلة (٢٥-١٧) تعاني من تناقض منطقي . ولتوضيح ذلك افترض أن السوق يوجد به منشأتين فقط ، إذن :

ص ١ ز + ص ٢ ز = ص ١ ز-١ + ص ٢ ز-١ = ١ .... (٢٥-١٨)

وحيث أن س ٢ ز = $\dfrac{\text{ق ٢}}{\text{ق ١}}$ = $\dfrac{١}{\text{س ١ ز}}$ .... (٢٥-١٩)

تصبح المعادلة (٢٥-١٧) لكل منشأة من المنشأتين على النحو التالي:

$$\hat{\text{ص}}_{1ز} = \text{أ}_1 + \hat{\text{ب}}_1 \text{س}_{1ز} + \hat{\text{حـ}}_1 \text{ص}_{1ز-1} \quad \text{.........} \quad (٢٥-٢٠)$$

$$\hat{\text{ص}}_{2ز} = \text{أ}_2 + \hat{\text{ب}}_2 \text{س}_{2ز} + \hat{\text{حـ}}_2 \text{ص}_{2ز-1} \quad \text{.......} \quad (٢٥-٢١)$$

وحيث أن :

$$\hat{\text{ص}}_{2ز} = 1 - \hat{\text{ص}}_{1ز} \text{ ، } \hat{\text{ص}}_{2ز-1} = 1 - \hat{\text{ص}}_{1ز-1} \text{ ، } \text{س}_{2ز} = \frac{1}{\text{س}_{1ز}}$$

فبالتعويض في المعادلة (٢٥-٢١) نحصل على :

$$1 - \hat{\text{ص}}_{1ز} = \hat{\text{أ}}_2 + \hat{\text{ب}}_2 \left(\frac{1}{\text{س}_{1ز}}\right) + \hat{\text{حـ}}_2 (1 - \hat{\text{ص}}_{1ز-1}) \quad \text{.....} \quad (٢٥-٢٢)$$

وبمساواة مجموع المعادلتين (٢٥-٢٠) ، (٢٥-٢٢) بالواحد ، حيث مجموع الأنصبة النسبية يساوى واحد ، نحصل على :

$$1 = \hat{\text{أ}}_1 + \hat{\text{أ}}_2 + \hat{\text{ب}}_1 \text{س}_{1ز} + \left(\frac{\hat{\text{ب}}_2}{\text{س}_{1ز}}\right) + (\hat{\text{حـ}}_1 - \hat{\text{حـ}}_2) \hat{\text{ص}}_{ز-1} + \hat{\text{حـ}}_2 \quad \text{........} \quad (٢٥-٢٣)$$

$$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \frac{\hat{\beta}_2}{X_{1t}} + (\hat{c}_1 - \hat{c}_2) y_{t-1} + \hat{c}_2 = 1$$

وحتى تتحقق المعادلة (٢٥ -٢٣) فلابد أن يتحقق الشرط التالي :

$\hat{\text{أ}}_1 + \hat{\text{أ}}_2 = 1$ ، $\hat{\text{ب}}_1 = \hat{\text{ب}}_2 = \hat{\text{حـ}}_1 = \hat{\text{حـ}}_2 =$ صفر ، حيث أن : $(\text{أ}_1 + \text{أ}_2)$ هو مجموع الأنصبة النسبية للمنشأتين عند نقطة البداية قبل أن يأتي الإعلان تأثيره ، وحيث لا توجد مبيعات سابقة ، وعندها لابد أن يكون مجموع الأنصبة النسبية مساوياً للواحد . و يعني هذا أن كل المتغيرات التفسيرية لا تؤثر في المتغير التابع ولا يوجد هناك علاقة بين الإعلان والمبيعات .

(٢٥-١-٥) الأثر التراكمي للإعلان على المبيعات

لا يمارس الإعلان تأثيره بصورة فورية على المبيعات ، وإنما يمتد هذا التأثير عبر الزمن ، ولذا يمكن التفرقة بين الأثر قصير الأجل والأثر طويل الأجل للإعلان .ومن بين النماذج المستخدمة لتقدير الأثر التراكمي للإعلان على المبيعات عبر الزمن نموذج الآثار المتباطئة لكويك Koyck Lingering Effects Model ، وهو يأخذ الصيغة التالية :

ع ز = أ (١-λ)+ ب ل ز + λ ع ز-١ + و ز ....(٢٥-٢٤)

$$S_t = \alpha(1-\lambda)+\beta Y_t+\lambda S_{t-1}+W_t$$

حيث : ع ز = المبيعات في الفترة "ز" = S_t ، ل ز = الإنفاق الإعلاني في الفترة "ز" = Y_t ، $0 \le \lambda < 1$ هو معامل التناقص في تأثير الإعلان على المبيعات عبر الزمن .

و ز = الحد العشوائي = W_t

ومن أهم خصائص هذا النموذج :

(أ) أن الحد العشوائي " و ز " (W_t) على ارتباط مع ع ز-١ ، وهو ما يجعل مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية متحيزة وغير متسقة . ولذا يفضل استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في التقدير .

(ب) لا تصلح إحصائية ديربن واتسون (DW) في الكشف عن الارتباط الذاتي في هذه الحالة .

(جـ) الأثر قصير الأجل للإعلان على المبيعات = ب (β) .

(د) الأثر التراكمي للإعلان على المبيعات بعد فترتين فقط = ب(١+λ) .

(هـ) الأثر طويل الأجل للإعلان على المبيعات = $\frac{\text{ب}}{1-\lambda}$ = $\frac{\beta}{1-\lambda}$

(و) نسبة الأثر التراكمي طويل الأجل للإعلان بعد فترة معينة (ن) n من الأثر الكلي تتحدد بالصيغة التالية : م = ١ - λ^ن $m = 1-\lambda^n$.

(ز) لتحديد الفترة (ن) n اللازمة لتوصيل نسبة الأثر التراكمي للإعلان إلى مستوى معين = م (m) ، نستخدم الصيغة التالية :

ن = لو (١–م) / لو λ

$$n = \frac{\ln(1-m)}{\ln \lambda} \quad \text{....(٢٥–٢٥)}$$

ومن النماذج الأخرى التي تتخلص من مشكلة الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى :

ع ز = أ + ب ل ز + جـ ل ز-١ + ذ ع ز-١ + ء ز ....(٢٥–٢٦)

$$S_t = \alpha + \beta Y_t + Y_{t-1} + \rho S_{t-1} + u_t$$

حيث : ذ = معامل الارتباط الذاتي = ρ ، أ=أ. (١–ذ) $\alpha = \alpha_0(1-\rho)$

جـ = – ب ذ $c = -\beta\rho$

مثال (٢٥–٣)

تقدير الأثر التراكمي للإعلان على المبيعات

استخدم بيانات الجدول (٢٥–١٠) في تقدير الصيغة (٢٥–٢٤) وفسر النتائج .

لما كانت طريقة المربعات الصغرى العادية تعطي نتائج متحيزة وغير متسقة ، نستخدم طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين . وحتى نستخدم هذه الطريقة لابد من البحث عن متغير وسيط Instrument يعتقد أنه يرتبط مع S_{t-1} وغير مرتبط مع W_t . وفي هذه الحالة نجد أنه إذا كان S_t يتأثر بالمتغير الخارجي Y_t ، فإن S_{t-1} تتأثر بما يقابلها وهو Y_{t-1} . ومن هذا المنطلق نستخدم Y_{t-1} كمتغير وسيط في هذه الحالة

بجانب Y_t حتى يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين . ويمكن استخدام Eviews لعمل ذلك على النحو التالي :

Quick/estimate equation/TSLS

S c Y S1

Instrument list Y Y1

حيث : $S_1=S_{t-1}$ ، $Y_1=Y_{t-1}$

ويوضح الجدول (٢٥-١٤) نتائج التقدير .

جدول (٢٥-١٤)

Dependent Variable: S
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 05/30/04 Time: 21:48
Sample(adjusted): 1981 1995
Included observations: 15 after adjusting endpoints
Instrument list: Y Y1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	43.82094	18.69379	2.344144	0.0371
Y	4.608966	1.773510	2.598783	0.0233
S1	0.585935	0.180763	3.241448	0.0071

R-squared	0.993242	Mean dependent var	294.0000
Adjusted R-squared	0.992116	S.D. dependent var	61.00937
S.E. of regression	5.417282	Sum squared resid	352.1633
F-statistic	876.9611	Durbin-Watson stat	1.407549
Prob(F-statistic)	0.000000		

وبالتالي يمكن كتابة الصيغة المقدرة على النحو التالي :

$$S_t = 43.82 + 4.6Y_t + 0.586S_{t-1} + u_t$$

ومع الأخذ في الاعتبار أن جميع المعلمات المقدرة ذات معنوية إحصائية يمكن تفسير النتائج على النحو التالي :

(أ) معامل التناقص في تأثير الإعلان على المبيعات عبر الزمن $\lambda = 0.586$ ، وهو ما يعني أن تأثير الإعلان على المبيعات يتناقص سنويا بنسبة ٥٩ ٪ من السنة السابقة تقريباً.

(ب) يتمثل الأثر قصير الأجل للإعلان على المبيعات في : $\beta = 4.6$ ، وهو ما يعني أن كل زيادة في الإعلان بوحدة واحدة تؤدي لزيادة المبيعات بمقدار ٤,٦ وحدة .

(جـ) يتمثل الأثر طويل الأجل للإعلان على المبيعات في :

$$\frac{\beta}{1-\lambda}=\frac{4.6}{0.414}=11.1$$

وهذا يعني أن كل زيادة في الإعلان بمقدار وحدة يصاحبها زيادة في المبيعات بالأجل الطويل بمقدار ١١,١ وحدة .

(د) يمثل الأثر التراكمي طويل الأجل للإعلان على المبيعات من الأثر الكلي بعد خمس سنوات نسبة تساوي : م = ١- (٠,٥٨٦)° = ٩٣ ٪ .

(هـ) الفترة اللازمة لتوصيل الأثر التراكمي طويل الأجل للإعلان على المبيعات إلى نسبة ٩٣ ٪ من الأثر الكلي تساوي = لـو (١-م) ÷ لـو λ = لـو (٠,٠٧) ÷ لـو (٠,٥٨٦) = -٢,٦٥٩ ÷ - ٠,٥٣٤ =٥ سنوات تقريباً .

المبحث الثاني

بعض الدراسات التطبيقية عن العلاقة بين المبيعات و الإعلان

(٢٥-٢-١) مدى تأثير الإنفاق الإعلاني على الاستهلاك الكلي

هل تؤدي الزيادة في الإنفاق الإعلاني إلى زيادة الاستهلاك الكلى على مستوى المجتمع وبالتالي تؤدى إلى نقص الادخار ؟ وهل للإنفاق الإعلاني دور في التأثير على تقلبات الدورة التجارية على مستوى المجتمع، بحيث تؤدى زيادته للدخول في موجة رواج، و يؤدي نقصه للدخول في موجة انكماش ؟ أم أن الإنفاق الإعلاني هو الذي يتأثر بالاستهلاك الكلي ؟ من الدراسات التي ظهرت للإجابة على هذه الأسئلة ما يلي :

(أ) دراسة Richard Schmalensee عام ١٩٧٢:

قام سكيملانسي بحساب الرقم القياسي لسعر الإعلان الحقيقي مستخدماً بيانات ربع سنوية ، وذلك عن طريق تحديد الإنفاق الكلي على الإعلان لدى وسائل الإعلام المختلفة ، ثم الحصول على القيمة الحقيقية للإنفاق الإعلاني الكلي، وتحديد عدد الأفراد الذين تعرضوا للإرساليات الإعلانية بالمليون ، ثم تحديد متوسط تكلفة الإعلان للفرد واتخاذها كمؤشر للسعر ، ثم الحصول على الرقم القياسي لسعر الإعلان الحقيقي منها (ث ز) P_t. وتم الحصول من ناحية أخرى على متوسط نصيب الفرد من الاستهلاك الكلي الحقيقي (س ز C_t ، ومتوسط نصيب الفرد من استهلاك السلع فقط (س ١ز) C_{1t} .

وبعد ذلك تم الحصول على :

(١) الارتباط بين(س ز ، ث ز-١) C_t , P_{t-1} و (س ز ، ث ز) C_t , P_t و (س ز ، ث ز+١) C_t , P_{t+1} خلال الفترة ٢ : ١٩٥٦ إلى ٣ : ١٩٦٧ بالولايات المتحدة ، وجاءت معاملات الارتباط تلك على النحو التالي : ٠,٩٦٨ ، ٠,٩٧٨ ، ٠,٩٨٠ على التوالي.

وبإيجاد الارتباط بين (س ١ز ، ث ز-١) C_{1t} , P_{t-1} و (س ١ز ، ث ز) C_{1t} , P_t و (س ١ز ، ث ز+١) C_{1t} , P_{t+1} جاء على النحو التالي: ٠,٩٧٢ ، ٠,٩٨٥ ، ٠,٩٨٦ .

وبالرغم من أن الارتباط في الحالة الثانية بين الإعلان واستهلاك السلع أقوى بوجهٍ عام منه بين الإعلان و الاستهلاك الكلي ، إلا أن النمط واحد . فمن الواضح أن الارتباط بين الاستهلاك في الربع الحالي والإعلان في الربع المقبل أعلى من الارتباط بين الاستهلاك في الربع الحالي والإعلان في الربع الحالي أو السابق . وهو ما يوحي بأن السببية تتجه من الاستهلاك إلى الإعلان ، وليس من الإعلان إلى الاستهلاك .

(٢) تقدير الصيغ التالية :

س ز = أ. + أ١ ى ز + أ٢ س ز-١ + أ٣ ل ز-١ + ع ١ز

س ز = أ. + أ١ ى ز + أ٢ س ز-١ + أ٣ ل ز + ع ٢ز ..... (٢٥ –٢٧)

س ز = أ. + أ١ ى ز + أ٢ س ز-١ + أ٣ ل ز+١ + ع ٣ز

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 C_{t-1} + \alpha_3 Y_{t-1} + u_{1t}$$
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 C_{t-1} + \alpha_3 Y_t + u_{2t}$$
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 C_{t-1} + \alpha_3 Y_{t+1} + u_{3t}$$

حيث :

س ز = الاستهلاك الكلي الحقيقي أو الاستهلاك الحقيقي للسلع فقط في الفترة ز (C_t).

ل ز-١ ، ل ز ، ل ز+١ = الإنفاق الإعلاني الكلي الحقيقي في الفترة السابقة والفترة الحالية والفترة المقبلة (Y_{t-1} , Y_t , Y_{t+1}) . ى ز = متوسط الدخل الحقيقي المتاح (X_t) .

ولقد أوضح سكيملانسي أنه حتى يكون اتجاه السببية من الإعلان إلى الاستهلاك يجب أن يكون معامل الانحدار الخاص بالإعلان (وكذلك قيمة t المحسوبة المصاحبة له) موجباً ومرتباً تنازلياً كما يلي :

ل ز-١ ، ل ز ، ل ز+١ Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}

وبإجراء التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لم يتم الحصول على النتائج بهذا الترتيب أبداً ، وإنما كانت معاملات الانحدار الخاصة بالإعلان في

الفترة "ز + ١" أكبر منها دائماً في الفترات الأخرى . وبإجراء التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين لم يتغير الوضع عنه في الحالة السابقة .

وبالتالي فإن هذه الدراسة التطبيقية توضح أن الإعلان الكلي لا يؤثر على الاستهلاك الكلي ، وبالتالي لا يؤثر على الادخار القومي وإن كان يمكن أن يؤثر على تحويل المبيعات بين المنشآت أو حتى الصناعات ، كما لا يمكن أن ينسب للإعلان أنه سبب موجات الرواج ، أو سبب الانكماش .

(٣) ثم حاول سكيملانسي أن يختبر محددات الإعلان الكلي على مستوى المجتمع ، ورشح لذلك الاستهلاك الكلي ، حيث قام بتقدير العلاقة التالية :

ل ز = ٦,١٠٢ س ز + ٠,٠٩٩٦٠ Δ س ز ٪ + ٠,٧٠٥٤ ل ز-١ .... (٢٥-٢٨)
إحصائية ت : (٢,٦٣١) (١,٩٩٦) (٦,٢٤٣) ر٢ = ٠,٩٩٢٦

ل ز = الإنفاق الإعلاني الكلي بالأسعار الجارية في السنة ز .

س ز = الإنفاق الاستهلاكي على السلع المعمرة وغير المعمرة بالأسعار الجارية

Δ س ز ٪ = التغير النسبي في الإنفاق الاستهلاكي.

ومن الصيغة السابقة يتضح أن :

λ = ٠,٧٠٥٤

نسبة الأثر التراكمي للاستهلاك بعد ٤ فصول على الإعلان من الأثر الكلي =

م٤ = ١ − λ٤ = ١ − (٠,٧٠٥٤)٤ = ١ − ٠,٢٤٧٦٠ = ٠,٧٥٢٤ = ٧٥,٢٤ ٪

أما نسبة الأثر قصير الأجل للاستهلاك بعد فصل واحد :

م١ = ١ − λ = ١ − ٠,٧٠٥٤ = ٠,٢٩٤٦ أي ٢٩,٥ ٪.

وقد خلص سكيملانسي إلى أنه نظراً لأن التأثير يحدث بهذه السرعة من فصل لآخر، فإن كل الدراسات التي تستخدم بيانات سنوية تصل لنتائج مضلله لأنها سوف تتضمن التأثيرات التبادلية التي تحدث بين الاستهلاك و الإعلان وتنسبها لواحدة منها فقط .

(ب) دراسة Lester D . Taylor & Daniel Weiserbs (١٩٧٢)

لقد استخدم كل من تايلور و ويزاربس بيانات سنوية لتقدير الصيغة التالية خلال الفترة ١٩٢٩ – ١٩٦٨ مع استبعاد سنوات ١٩٤٢ – ١٩٤٥ :

خ ز = ٠,٨٨٨٩ خ ز-١ + ٠,٥٠٥٧ Δ ى ز – ٣,٨٨٦٣ Δ ل ز .... (٢٥–٢٩)
إحصائية t : (٣١,٣٠) (١٠,٨٥) (٤,٣٥٣) ر ٢ = ٠,٩٠٣

حيث :

خ ز = متوسط الادخار الحقيقي للفرد .

Δ ى ز = التغير في متوسط الدخل الحقيقي .

Δ ل ز =التغير في متوسط نصيب الفرد من الإنفاق الإعلاني الحقيقي .

وتعتبر معلمات الصيغة (٢٥–٢٩) توليفات لعدد من المعلمات الأخرى لصيغة هيكلية مختلفة . وبعد إجراء بعض الحسابات للحصول على معلمات الصيغة الهيكلية اتضح أن :

(١) الأثر قصير الأجل للإعلان على الادخار يتمثل في كون أن كل زيادة في الإنفاق الإعلاني بمقدار واحد دولار تؤدى لتخفيض الادخار (زيادة الاستهلاك) بمقدار ٤,١٢ دولار .

(٢) الأثر طويل الأجل يتمثل في أن زيادة الإنفاق الإعلاني بمعدل سنوي ٢,٥ ٪ يؤدى لانخفاض معدل الادخار من ٩,٣ ٪ إلى ٧ ٪ .

ومن الواضح أن هذه الدراسة تتعرض لانتقاد أنها استخدمت بيانات سنوية وليس بيانات ربع سنوية .

(٢٥-٢-٢) أثر الإعلان على المبيعات على مستوى الصناعة أو المنتج

(أ) دراسة Nerlove & Waugh (١٩٦١)

لقد حاول كل من نيرلوف ، ووج اختبار أثر الإعلان على مبيعات البرتقال خلال فترة ٥٠ سنة . ولعمل ذلك قاما بقياس العلاقة بين :

ك ز = متوسط نصيب الفرد من مبيعات البرتقال في السنة ز (كمتغير تابع) (q_t)

ث ز = السعر الحقيقي للبرتقال في السنة ز (P_t)

ى ز = متوسط الدخل الحقيقي المتاح للفرد خلال السنة ز (X_t)

ل ز = متوسط نصيب الفرد من الإعلان الحقيقي لترويج مبيعات البرتقال (Y_t)

ق ز = متوسط الإنفاق الإعلاني الحقيقي على البرتقال للفرد خلال العشرة سنوات السابقة للسنة ز (K_t)

ولقد استخدم كليهما الصيغة التالية :

$$\text{ك}_{\text{ز}} = \text{أ}_{.}\ \text{ث}_{\text{ز}}^{\text{أ}_1}\ \text{ى}_{\text{ز}}^{\text{أ}_2}\ \text{ل}_{\text{ز}}^{\text{أ}_3}\ \text{ق}_{\text{ز}}^{\text{أ}_4} \quad \text{......} \ (٢٥-٣٠)$$

$$q_t = A_0 P_t^{\alpha 1} X_t^{\alpha 2} Y_t^{\alpha 3} K_t^{\alpha 4}$$

حيث :

أ ١ = مرونة الطلب السعرية للبرتقال (α_1)

أ ٢ = مرونة الطلب الدخلية للبرتقال (α_2)

أ ٣ = مرونة الطلب الإعلانية في الأجل القصير (α_3)

أ ٣ + أ ٤ = مرونة الطلب الإعلانية في الأجل الطويل $(\alpha_3 + \alpha_4)$

وبحل الصيغة (٢٥-٣٠) بالنسبة للسعر ث ز نحصل على :

$$\text{ث}_{\text{ز}}^{\text{أ}_1} = \text{أ}_{.}^{-1}\ \text{ك}_{\text{ز}}\ \text{ى}_{\text{ز}}^{-\text{أ}_2}\ \text{ل}_{\text{ز}}^{-\text{أ}_3}\ \text{ق}_{\text{ز}}^{-\text{أ}_4}$$

$$\therefore \text{ث}_{\text{ز}} = \text{أ}_{.}^{\frac{-1}{\text{أ}_1}}\ \text{ك}_{\text{ز}}^{\frac{1}{\text{أ}_1}}\ \text{ى}_{\text{ز}}^{\frac{-\text{أ}_2}{\text{أ}_1}}\ \text{ل}_{\text{ز}}^{\frac{-\text{أ}_3}{\text{أ}_1}}\ \text{ق}_{\text{ز}}^{\frac{-\text{أ}_4}{\text{أ}_1}} \quad \text{......} \ (٢٥-٣١)$$

بضرب طرفي (٢٥-٣١) في ك ز نحصل على دالة الإيراد الكلي حيث :

ت ز = ث ز ك ز $(TR_t = P_t Q_t)$

ت ز = أ* ك ز ^(١ + ١/أ١) ى ز ^(-أ٢/أ١) ل ز ^(-أ٣/أ١) ق ز ^(-أ٤/أ١) .... (٢٥-٣٢)

$$TR_t = A^* q^{1+\frac{1}{\alpha 1}} X_t^{\frac{\alpha 2}{\alpha 1}} Y_t^{\frac{-\alpha 3}{\alpha 1}} K_t^{\frac{-\alpha 4}{\alpha 1}}$$

وبالحصول على اللوغاريتم الطبيعي للطرفين :

لوت ز = أ + (١ + ١/أ١) لوك ز – أ٢/أ١ لوى ز – أ٣/أ١ لول ز – أ٤/أ١ لوق ز (٢٥-٣٣)...........................

$$\ln TR_t = A + (1 + \frac{1}{\alpha_1}) \ln q_t - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \ln X_t - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \ln Y_t - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \ln K_t$$

وباستخدام الصيغة (٢٥-٣٢) من خلال بيانات سنوية للفترة ١٩٠٧ – ١٩٥٨ مع استبعاد سنوات الحرب الثانية ١٩٤١ – ١٩٤٥ ثم الحصول على تقديرات OLS على النحو التالي:

لوت ز = أ̂ + ب̂١ لوك ز + ب̂٢ لوى ز + ب̂٣ لول ز + ب̂٤ لوق ز + ع ز ...(٢٥-٣٤)

حيث :

أ̂ = لو أ*

ب̂١ = ١ + ١/أ١ ومنها : أ̂١ = ١/(ب١ –١)

ب̂٢ = – أ٢/أ١ ومنها : أ̂٢ = – أ̂١ ب̂٢

ب̂٣ = – أ٣/أ١ ومنها : أ̂٣ = – أ̂١ ب̂٣

$\hat{ب}_٤ = - \frac{أ_٤}{أ_١}$ ومنها : $\hat{أ}_٤ = -أ_١ ب_٤$

وتمثلت النتيجة التي تم الحصول عليها فيما يلي :

$$لو ت_ز = -٢,٩٣٩ - ٠,٣٩٠ لو ك_ز + ٠,٩٢٤ لو ى_ز + ٠,٢٣٣ لو ل_ز$$
$$(٠,١٩٨) \quad (٠,١٩١) \quad (٠,١٢٥)$$
$$+ ٠,١٠٣ لو ق_ز \quad .... \quad (٢٥-٣٥)$$
$$(٠,٠٤٥) \quad ر^٢ = ٠,٧٢$$

ومن هذه الصيغة المقدرة نحصل على :

$\hat{أ}_١ = \frac{١}{-٠,٣٩٠ - ١} = - \frac{١}{١,٣٩} = - ٠,٧٢$ مرونة الطلب السعرية .

$\hat{أ}_٢ = - (- ٠,٧٢) (٠,٩٢٤) = ٠,٦٧$ مرونة الطلب الدخلية.

$\hat{أ}_٣ = - (- ٠,٧٢) (٠,٢٣٣) = ٠,١٧$ مرونة الطلب الإعلانية قصيرة الأجل.

$\hat{أ}_٤ = - (- ٠,٧٢) (٠,١٠٣) = ٠,٠٧$

$\hat{أ}_٣ + \hat{أ}_٤ = ٠,١٧ + ٠,٠٧ = ٠,٢٤$ مرونة الطلب الإعلانية طويلة الأجل.

ولكن إذا قارنا الصيغتين (٢٥-٣٠) ، (٢٥-٣٣) فإننا نجد أن هناك احتمالاً أن تكون " ك $_ز$ " مرتبطة مع $ح_ز$ مما يجعل طريقة OLS غير صالحة للتقدير في هذه الحالة ويتعين تجريب طريقة أخرى .

وعموماً فقد أثبتت هذه الدراسة أن الإعلان يؤثر جوهرياً على المبيعات .

(ب) دراسة Stephen J. Arnold وآخرين (١٩٨٧)

لقد أوضحت هذه الدراسة أن العامل الأساسي الذي يؤثر في المبيعات ليس هو حجم الإنفاق الإعلاني وإنما نوعية الإعلان نفسه . فقد يتم إنفاق مبالغ كبيرة على الإعلان دون أن تكون ذو فاعلية كبيرة في تأثيرها على المبيعات نظراً لأن نوعية الإعلان رديئة .

ولاختبار تأثير نوعية الإعلان على المبيعات تم الاستعانة بالنموذج التالي :

ن ز = أ ز ل ز .... (٢٥ -٣٦) $V_t = A_t Y_t$

حيث :

ن ز = الإنفاق الإعلان المعدل للنوعية (V_t) Quality-Adjusted Advertising

ل ز = الإنفاق الإعلاني الفعلي (Y_t)

أ ز = معامل التعديل للنوعية Quality-Adjusted Coefficient في الفترة ز (A_t)

أ ز يعتمد على خصائص إرسالية الإعلان في الفترة "ز " كما يقيمها الخبراء . حيث تعرض الإرسالية على عدد من الخبراء لإعطائها نسبة وفقاً لمستوى جودتها ثم يؤخذ متوسط تقديرات الخبراء ويعطى كدرجة معبرة عن النوعية للإرسالية .

أ ز = ع ١ ^د١^ ع ٢ ^د٢^ ع ٣ ^د٣^ .... (٢٥-٣٧)

حيث ع ر تشير إلى خصائص مختلفة للإعلان

ومن ثم ن ز = [ع١^د١^ ع٢^د٢^ ع٣^د٣^] ل ز .... (٢٥-٣٨)

وبأخذ هذه العوامل في الاعتبار يمكن تقدير الصيغة التالية :

لو ك ز = أ. + ق لو ن ز + ∑ ب ز لو س ز + ∑ حـ ز و ز + ء ز ... (٢٥-٣٩)

حيث :

ك ز = كمية المبيعات في الفترة ز

ن ز = الإنفاق الإعلاني المعدل للنوعية

س ز = متغيرات مختلفة تؤثر على المبيعات مثل السعر الحقيقي للسلعة البديلة ، والإنفاق الحقيقي للإعلان من قبل المنافسين .

و ز = متغير ثنائي يعبر عن الفترات المختلفة أو المناطق الجغرافية المختلفة أو النوعيات المختلفة للسلعة .

وبالتعويض من (٢٥-٣٧) في (٢٥-٣٨) نحصل على :

لوك $_ز$ = أ . + ق [ر $_1$ لوع $_1$ + لول $_ز$] + $\sum$ ب $_ز$ لوس $_ز$ + $\sum$ حـ $_ز$ و $_ز$ + ى $_ز$ .... (٢٥–٤٠)

وذلك على أساس أنه تم التركيز على نوعية واحدة للإعلان هي ع $_1$. ومع محاولة تقدير نموذج التعديل الجزئي . Partial adj من الصيغة (٢٥–٣٩) تم التوصل للصيغة (٢٥–٤٠) التالية ، باعتبار أن " م " هي نسبة الأثر التراكمي للإعلان في كل فترة في المتوسط .

لوك $_ز$ = أ*. + (١ – م) لوك $_{ز-1}$ + م ق [ر $_1$ لوع $_1$ + لول $_ز$] + م $\sum$ ب $_ز$ لوس $_ز$

+ م $\sum$ حـ $_ز$ و $_ز$ + ى* $_ز$

لوك $_ز$ = أ*. + أ $_1$ لوك $_{ز-1}$ + أ $_2$ لوع $_1$ + أ $_3$ لول $_ز$ + $\sum$ أ $_4$ لوس $_ز$

+ $\sum$ أ $_5$ و $_ز$ + ى* $_ز$ .... (٢٥–٤١)

حيث :

أ $_1$ = (١ – م) ومنها م = ١ – أ $_1$ ،

أ $_3$ = م ق . ومنها ق = $\frac{أ_3}{م}$ ، أ $_2$ = م ق ر $_1$ ومنها ر $_1$ = $\frac{أ_2}{أ_3}$

أ $_4$ = م ب $_ز$ ومنها ب $_ز$ = $\frac{أ_4}{م}$ ، أ $_5$ = م حـ $_ز$ ومنها حـ $_ز$ = $\frac{أ_5}{م}$

وبتقدير الصيغة (٢٥–٤٠) نجد أن :

(١) مرونة المبيعات طويلة الأجل بالنسبة للإعلان المعدل للنوعية ن $_ز$ = مرونة المبيعات طويلة الأجل بالنسبة للإعلان الفعلي = $\frac{أ_3}{١ - أ_1}$

(٢) مرونة المبيعات بالنسبة للنوعية ع $_1$ في الأجل الطويل = $\frac{أ_2}{١ - أ_1}$

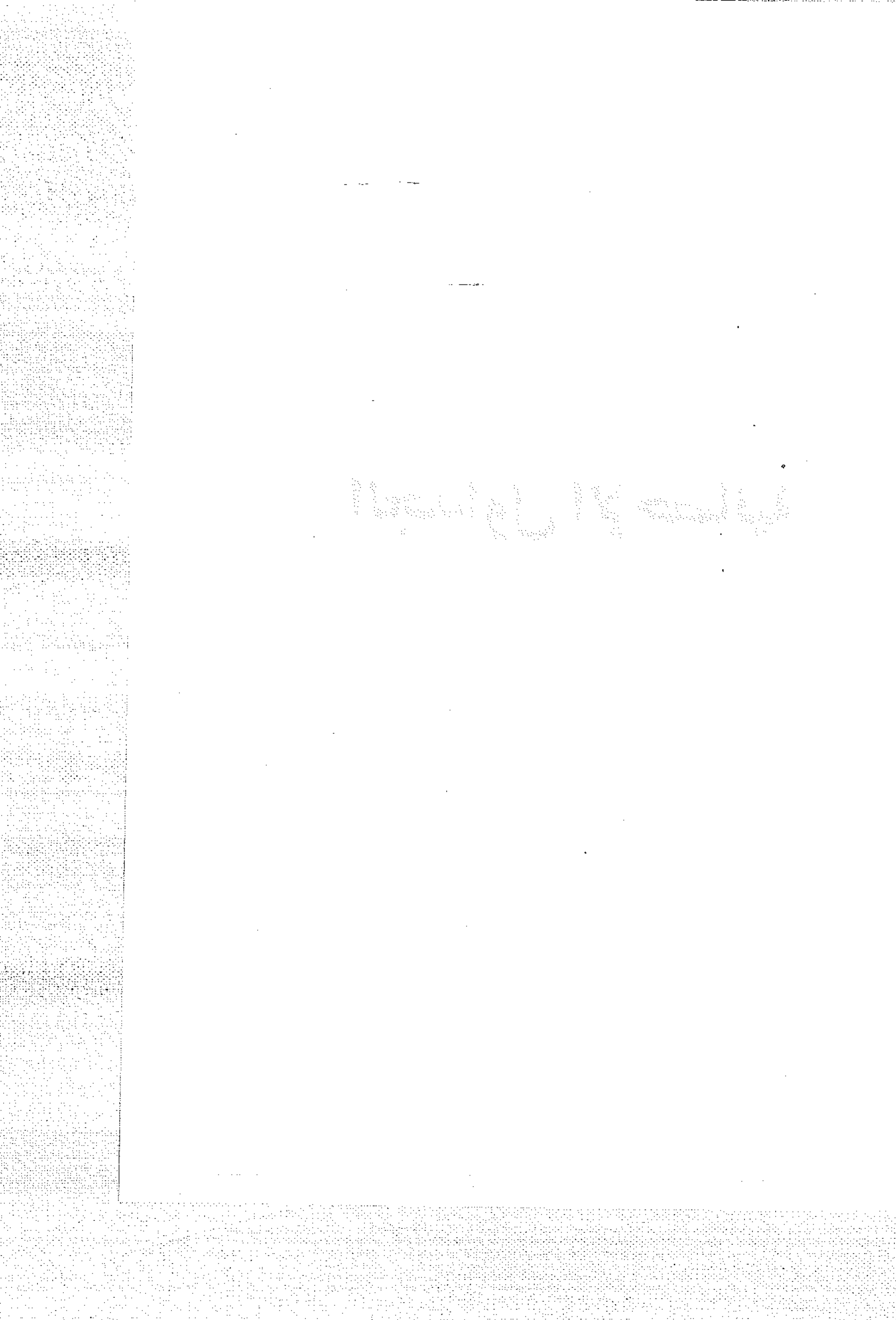
ولقد اتضح من التقديرات أن :

مرونة المبيعات لنوعية الإعلان في الأجل الطويل = ٠,٣٢٢١

مرونة المبيعات للإنفاق الإعلاني = ٠,٠١٥٩

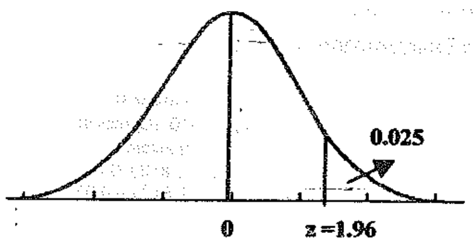
أي أن الأولى ضعف الثانية ما يقرب من ٢٠ مرة ، ومن ثم فإن نوعية الإعلان أكثر فاعلية في التأثير على المبيعات من مجرد حجم الإنفاق الإعلاني .

الجداول الإحصائية



" Z " Distribution توزيع "ز"

Area under the Normal Curve : جدول (١)



Example

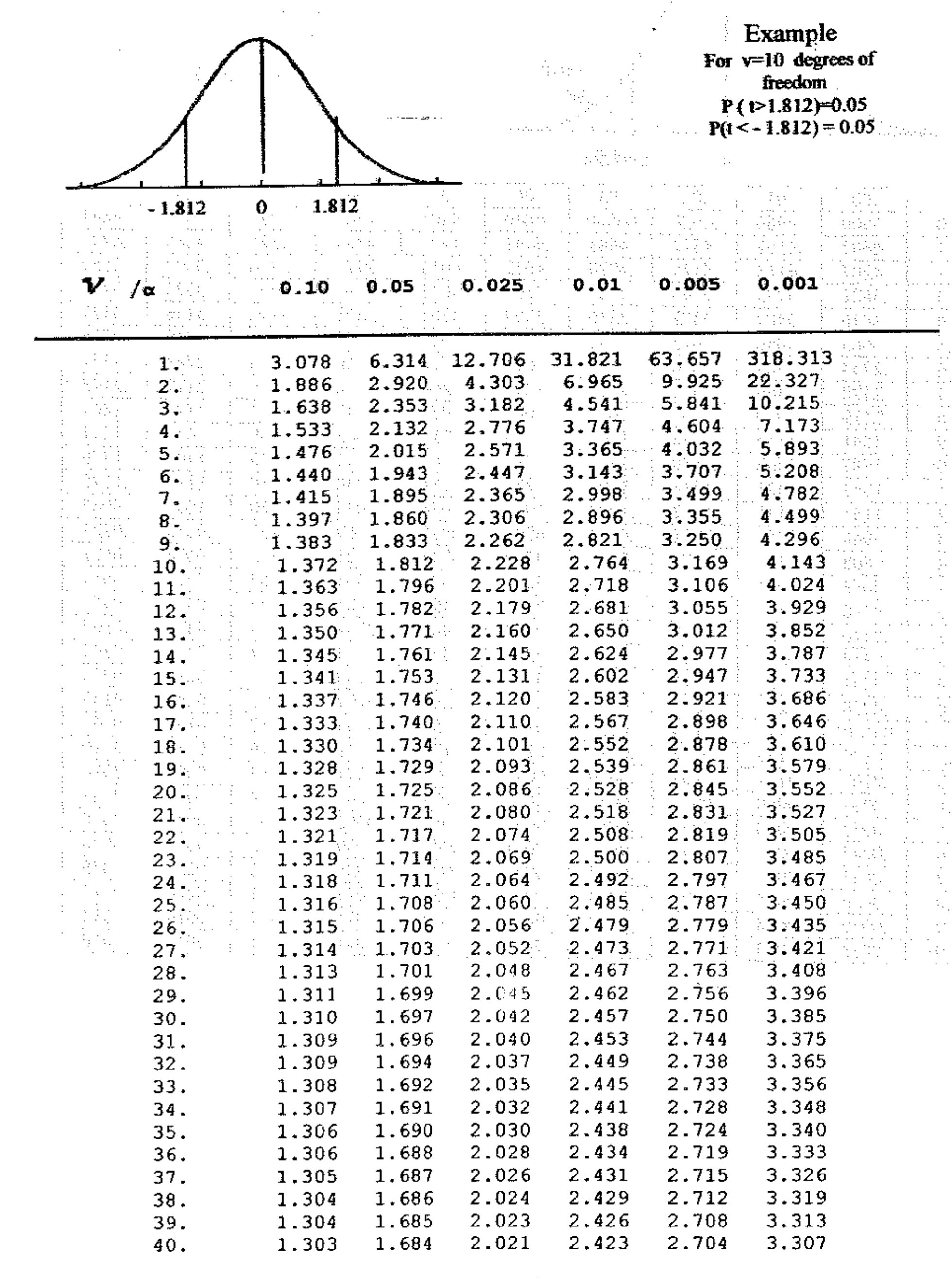
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$P(Z > 1.96) = 0.0250$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	04880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	0.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

"T" Distribution توزيع "ت"

Percentage Points of the t Distribution : جدول (٢)

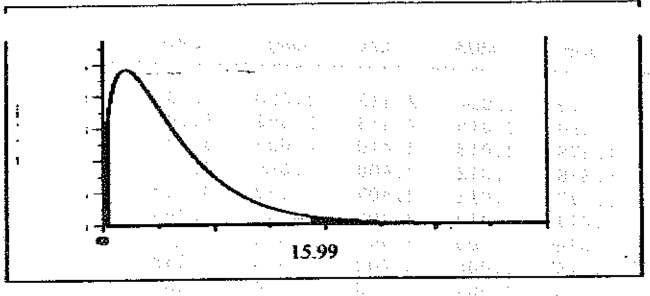


ν / α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1.	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.313
2.	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3.	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4.	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5.	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6.	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7.	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8.	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9.	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296
10.	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11.	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12.	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13.	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14.	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15.	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16.	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17.	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18.	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19.	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20.	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21.	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22.	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23.	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24.	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25.	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26.	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27.	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28.	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29.	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30.	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31.	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32.	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33.	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34.	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35.	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36.	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37.	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38.	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39.	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40.	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307

v/α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
45.	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
44.	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
46.	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47.	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48.	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49.	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50.	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
51.	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258
52.	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255
53.	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251
54.	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248
55.	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
56.	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242
57.	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239
58.	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237
59.	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234
60.	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
61.	1.296	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229
62.	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227
63.	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225
64.	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223
65.	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220
66.	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218
67.	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216
68.	1.294	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214
69.	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213
70.	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
71.	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209
72.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207
73.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206
74.	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204
75.	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202
76.	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201
77.	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199
78.	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198
79.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197
80.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
81.	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194
82.	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193
83.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191
84.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190
85.	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189
86.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188
87.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187
88.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185
89.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184
90.	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
91.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182
92.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181
93.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180
94.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179
95.	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178
96.	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177
97.	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176
98.	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175
99.	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175
100.	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

جدول (۳) جدول کا ۲

Percentage Points of the χ^2 Distribution



Example
For v = 10 degrees of freedom
P(χ^2 >15.99)=.10

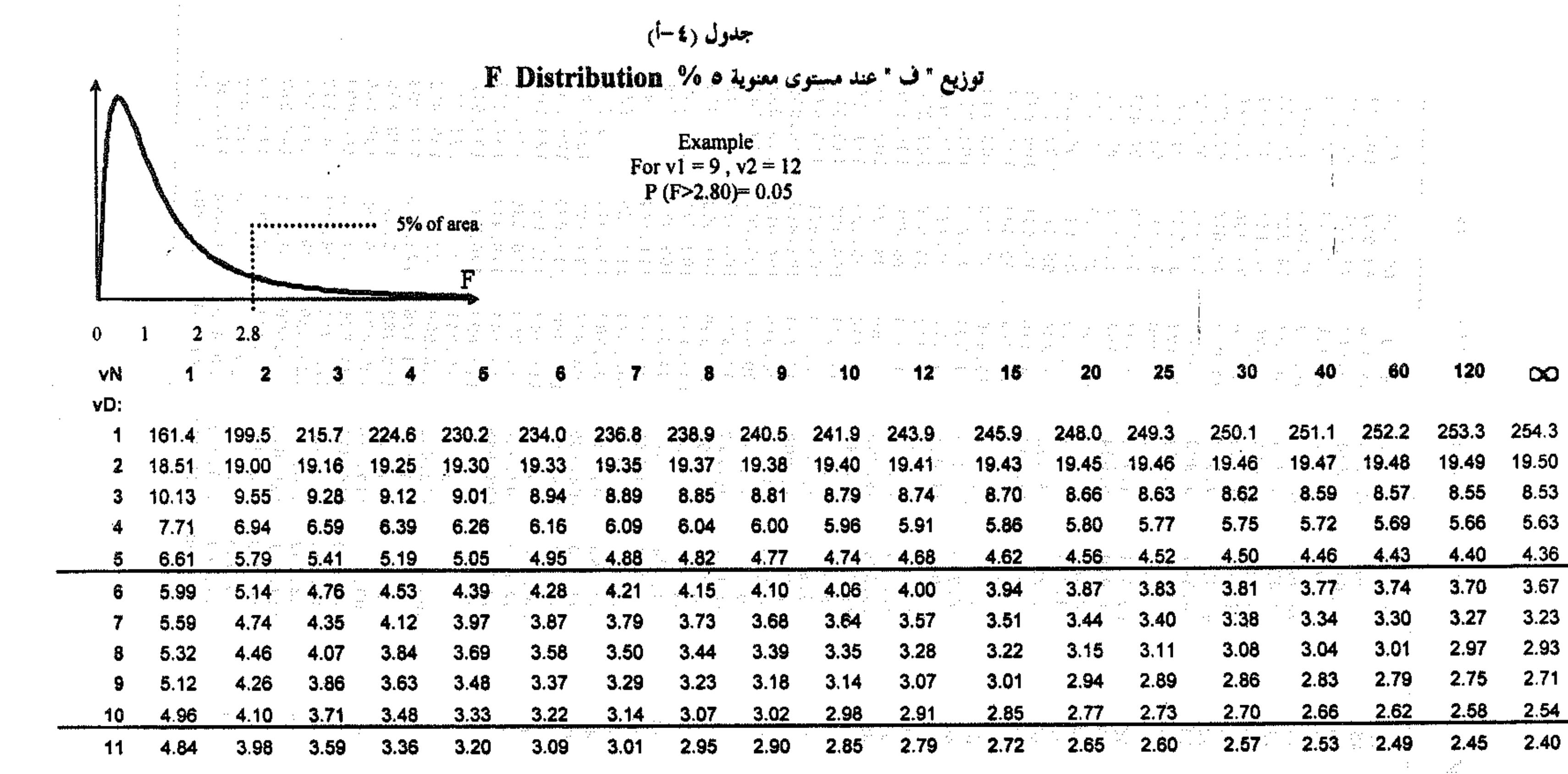
V /α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.001
1	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828
2	4.605	5.991	7.378	9.210	13.816
3	6.251	7.815	9.348	11.345	16.266
4	7.779	9.488	11.143	13.277	18.467
5	9.236	11.070	12.833	15.086	20.515
6	10.645	12.592	14.449	16.812	22.458
7	12.017	14.067	16.013	18.475	24.322
8	13.362	15.507	17.535	20.090	26.125
9	14.684	16.919	19.023	21.666	27.877
10	15.987	18.307	20.483	23.209	29.588
11	17.275	19.675	21.920	24.725	31.264
12	18.549	21.026	23.337	26.217	32.910
13	19.812	22.362	24.736	27.688	34.528
14	21.064	23.685	26.119	29.141	36.123
15	22.307	24.996	27.488	30.578	37.697
16	23.542	26.296	28.845	32.000	39.252
17	24.769	27.587	30.191	33.409	40.790
18	25.989	28.869	31.526	34.805	42.312
19	27.204	30.144	32.852	36.191	43.820
20	28.412	31.410	34.170	37.566	45.315
21	29.615	32.671	35.479	38.932	46.797
22	30.813	33.924	36.781	40.289	48.268
23	32.007	35.172	38.076	41.638	49.728
24	33.196	36.415	39.364	42.980	51.179
25	34.382	37.652	40.646	44.314	52.620
26	35.563	38.885	41.923	45.642	54.052
27	36.741	40.113	43.195	46.963	55.476
28	37.916	41.337	44.461	48.278	56.892
29	39.087	42.557	45.722	49.588	58.301
30	40.256	43.773	46.979	50.892	59.703
31	41.422	44.985	48.232	52.191	61.098
32	42.585	46.194	49.480	53.486	62.487
33	43.745	47.400	50.725	54.776	63.870
34	44.903	48.602	51.966	56.061	65.247
35	46.059	49.802	53.203	57.342	66.619
36	47.212	50.998	54.437	58.619	67.985
37	48.363	52.192	55.668	59.893	69.347
38	49.513	53.384	56.896	61.162	70.703
39	50.660	54.572	58.120	62.428	72.055
40	51.805	55.758	59.342	63.691	73.402
41	52.949	56.942	60.561	64.950	74.745
42	54.090	58.124	61.777	66.206	76.084
43	55.230	59.304	62.990	67.459	77.419

ν /α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.001
44	56.369	60.481	64.201	68.710	78.750
45	57.505	61.656	65.410	69.957	80.077
46	58.641	62.830	66.617	71.201	81.400
47	59.774	64.001	67.821	72.443	82.720
48	60.907	65.171	69.023	73.683	84.037
49	62.038	66.339	70.222	74.919	85.351
50	63.167	67.505	71.420	76.154	86.661
51	64.295	68.669	72.616	77.386	87.968
52	65.422	69.832	73.810	78.616	89.272
53	66.548	70.993	75.002	79.843	90.573
54	67.673	72.153	76.192	81.069	91.872
55	68.796	73.311	77.380	82.292	93.168
56	69.919	74.468	78.567	83.513	94.461
57	71.040	75.624	79.752	84.733	95.751
58	72.160	76.778	80.936	85.950	97.039
59	73.279	77.931	82.117	87.166	98.324
60	74.397	79.082	83.298	88.379	99.607
61	75.514	80.232	84.476	89.591	100.888
62	76.630	81.381	85.654	90.802	102.166
63	77.745	82.529	86.830	92.010	103.442
64	78.860	83.675	88.004	93.217	104.716
65	79.973	84.821	89.177	94.422	105.988
66	81.085	85.965	90.349	95.626	107.258
67	82.197	87.108	91.519	96.828	108.526
68	83.308	88.250	92.689	98.028	109.791
69	84.418	89.391	93.856	99.228	111.055
70	85.527	90.531	95.023	100.425	112.317
71	86.635	91.670	96.189	101.621	113.577
72	87.743	92.808	97.353	102.816	114.835
73	88.850	93.945	98.516	104.010	116.092
74	89.956	95.081	99.678	105.202	117.346
75	91.061	96.217	100.839	106.393	118.599
76	92.166	97.351	101.999	107.583	119.850
77	93.270	98.484	103.158	108.771	121.100
78	94.374	99.617	104.316	109.958	122.348
79	95.476	100.749	105.473	111.144	123.594
80	96.578	101.879	106.629	112.329	124.839
81	97.680	103.010	107.783	113.512	126.083
82	98.780	104.139	108.937	114.695	127.324
83	99.880	105.267	110.090	115.876	128.565
84	100.980	106.395	111.242	117.057	129.804
85	102.079	107.522	112.393	118.236	131.041
86	103.177	108.648	113.544	119.414	132.277
87	104.275	109.773	114.693	120.591	133.512
88	105.372	110.898	115.841	121.767	134.746
89	106.469	112.022	116.989	122.942	135.978
90	107.565	113.145	118.136	124.116	137.208
91	108.661	114.268	119.282	125.289	138.438
92	109.756	115.390	120.427	126.462	139.666
93	110.850	116.511	121.571	127.633	140.893
94	111.944	117.632	122.715	128.803	142.119
95	113.038	118.752	123.858	129.973	143.344
96	114.131	119.871	125.000	131.141	144.567
97	115.223	120.990	126.141	132.309	145.789
98	116.315	122.108	127.282	133.476	147.010
99	117.407	123.225	128.422	134.642	148.230
100	118.498	124.342	129.561	135.807	149.449

جدول (٤-أ)

F Distribution توزيع " ف " عند مستوى معنوية ٥ %

Example
For $v1 = 9$, $v2 = 12$
$P(F>2.80)= 0.05$



vN / vD:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40

Vn/vN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.58	1.51	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
250	3.88	3.03	2.64	2.41	2.25	2.13	2.05	1.98	1.92	1.87	1.79	1.71	1.61	1.55	1.50	1.44	1.37	1.29	1.17
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

جدول (٤-ب)

توزيع " ف " عند مستوى معنوية ١ % **F Distribution**

vN / vD:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	4052.2	4999.3	5403.5	5624.3	5764	5859	5928.3	5981	6022.4	6055.9	6106.7	6157	6208.7	6239.9	6260.4	6286.4	6313	6339.5	6366
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42

vD/vN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.91	1.80	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
250	6.74	4.69	3.86	3.40	3.09	2.87	2.71	2.58	2.48	2.39	2.26	2.11	1.95	1.85	1.77	1.67	1.56	1.43	1.24
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.77	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

جدول (٥-أ) ديربن واتسون عند مستوى معنوية ٥ %

Durbin- Watson Tables

d_L = ىل , d_U = ىق

Significance Points of d_L and d_U at 5 %

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

k = عدد المتغيرات التفسيرية بدون الحد الثابت

جدول (٥-ب) ديربن واتسون عند مستوى معنوية ١ %

Durbin- Watson Tables

$d_L =$ ى ل , $d_U =$ ى ق

Significance Points of d_L and d_U at ١ %

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

جدول (٦) : القيم الحرجة لديكي فولار الموسع ، إحصائية : λ ، ρ

Critical Values of Augmented Dickey- Fuller (DF)

Model	Statistic	N	Significance level		
			1 %	5 %	10 %
I	ADF_{λ}	25	- 2.50	- 1.95	- 1.60
		50	- 2.62	- 1.95	- 1.61
		100	- 2.60	- 1.95	- 1.61
		250	- 2.58	- 1.95	- 1.61
		500	- 2.58	- 1.95	- 1.61
		> 500	- 2.58	- 1.95	- 1.61
II	ADF_{λ}	25	- 3.75	- 3.00	- 2.62
		50	- 3.58	- 2.93	- 2.60
		100	- 3.51	- 2.89	- 2.58
		250	- 3.46	- 2.88	- 2.57
		500	- 3.44	- 2.87	- 2.57
		> 500	- 3.43	- 2.86	- 2.57
III	ADF_{λ}	25	- 4.38	- 3.60	- 3.24
		50	- 4.15	- 3.50	- 3.18
		100	- 4.04	- 3.45	- 3.15
		250	- 3.99	- 3.43	- 3.13
		500	- 3.98	- 3.42	- 3.13
		> 500	- 3.96	- 3.41	- 3.12

جدول (٧) : القيم الحرجة لديكي فولار الموسع ، إحصائية : β , α

$P=1 \ , \lambda=0$

Model	Statistic	n	Significance level		
			1 %	5 %	10 %
II	ADF_{α}	25	3.14	2.61	2.20
		50	3.28	2.56	2.18
		100	3.22	2.54	2.17
		250	3.19	2.53	2.16
		500	3.18	2.52	2.16
		> 500	3.18	2.52	2.16
III	ADF_{α}	25	4.05	3.20	2.77
		50	3.87	3.14	2.78
		100	3.78	3.11	2.73
		250	3.74	3.09	2.73
		500	3.72	3.08	2.72
		> 500	3.71	3.08	2.72
III	ADF_{β}	25	3.74	2.58	2.39
		50	3.60	2.81	2.38
		100	3.53	2.79	2.38
		250	3.49	2.79	2.38
		500	3.48	2.78	2.38
		> 500	3.46	2.78	2.38

جدول (٨) : القيم الحرجة لاختبار إنجل – جرانجر للتكامل المشترك

Critical Values for the Engle-Granger τ – Test Statistics Applied to Regression Residuals

Model I : $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ **, Model III :** $Y_t = \alpha + \theta t + \beta X_t + \varepsilon_t$

K= number of variables in the cointegration test (i.e Y_t , X_t), t = 1, 2 , 3, ...,500

Model	k	Significance level		
		1 %	5 %	10 %
II	2	- 3.96	- 3.37	- 3.07
	3	- 4.31	- 3.77	- 3.45
	4	- 4.73	- 4.11	- 3.83
	5	- 5.07	- 4.45	- 4.16
	6	- 5.28	- 4.71	- 4.43
III	2	- 4.36	- 3.80	- 3.52
	3	- 4.65	- 4.16	- 3.84
	4	- 5.04	- 4.49	- 4.20
	5	- 5.36	- 4.74	- 4.46
	6	- 5.58	- 5.03	- 4.73

مراجـــع

مراجع أجنبية :

Allen, Geofrey, P. & Fildes, Robert , " Econometric Forecasting", Principles of Forecasting : A Handbook for Researchers and Practitioners, Armstrong, J.Scott (ed): Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2001.

Antweiler, Werner, Purchasing Power Parity, Vancouver, Canada : PACIVIC Exchange Rate Service , Sauder School of Business, The University of British Columbia , 2003, http://fx.sauder.ubc.ca/PPP.html

Banavas, G. N , Integrated Time Series , Computational Intelligence in Finance and Business, http://www.tech.plym.ac.uk/soc/research/netural/staff/gbanavas/work/5wthweek/sld001.htm.

Berndt, Ernst R., The Practice of Econometrics : Classic and Contemporary , New York : Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

Chow , Gregory , Econometrics , London: McGraw-Hill Book Company , 1988.

Crammer, J.S , Empirical Econometrics, London: North Holland Publishing Company,1969.

Dutta, M., Econometrics Methods, Cincinnati: South-Western Publishing Co., 1975 .

Greene, William, Econometric Analysis, New York : Macmillan Publishing Company, Second Edition, 1993 .

Griffiths, William, and Others, Learning and Practicing Econometrics , New York : John Wiley & Sons, Inc. 1993 .

Griliches, Zvi & Intriligator , Michael D. (Editors) , Handbook of Econometrics Volumes. I, II, III, & IV, http://www.elsevier.com/hes/books/02/menu02.htm

Gujarati, Damodar, Basic Econometrics , New York : McGraw-Hill Book Inc , Third Edition, 1995.

Harvey , Andrew, The Econometric Analysis of Time Series, New York : Philip Allan, Second Edition, 1990.

Hebden , Julia, Applications of Econometrics, Oxford: Philip Allan Publishers Limited, 1983.

Holden, K. And Others, Economic Forecasting: An Introduction, Cambridge University Press. 1990.

http://www.inv.com/87uva.htm , The Nature of Stock Market Equilibrium.

Intriligator, Michael, Econometric Models, Techniques and Applications, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1978.

Johnston, J., Econometric Methods, New York : McGraw-Hill, Third Edition, 1984.

Kautsoyiannis, A., A Theory of Econometrics, London: The Macmillan Press LTD, Second Edition, 1981.

Kelejian, Harry & Oates, Wallace, Introduction to Econometrics , New York : Harver & Row Publishers, Third Edition, 1989.

Kennedy, Peter, A Guide to Econometrics , London : Cambridge, Massachustts Book Company, 1979.

Kmenta, Jan, Elements of Econometrics , New York : Macmillan Publishing Co. Inc, 1971.

Lilien,D., Hall, D. & Others, MicroTSP User,s Manual, Version 7.0 ,California: Quantitative Micro Software, 1990.

Lin,Kuan-Pin, Econometrics II, First Edition, Topic 6 , 1999 , http://www.econ.pdx.edu/staff/KPL/tsinghua/topic6.htm

Maddala, G.S., Econometrics , New York : McGraw-Hill Book Company, 1989.

Malpezzi, Stephen, A Simple Error Correction Model of House Prices, Madison WI : The Center For Urban Land Economics Research School of Business, Sep, 1998 .

Mayes, David G., Applications of Econometrics , London: Prentice Hall International, 1981.

Moffatt, Mike, A Beginner's Guide to Purchasing Power Parity Theory (PPP Theory), http://economics.about.com/cs/money/a/purchasingpower.htm

Pakko, Michael R. & Pollard Patricia S. , " For Here Or To Go ? Purchasing Power Parity and the Big Mac" ,REVIEW, Federal Reserve Bank of ST. Louis, Jan- Feb. 1996.

Pindych, R. & Rubinfield D., Econometric Models and Economic Forecasts, New York : McGraw-Hill Inc , 1981.

Quantitative Micro Software, Eviews4 , User's Guide, 2000.

Ramanathan, Ramu, Introductory Econometrics With Applications, New York : Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Second Edition, 1992.

Ramirez, Miguel D. & Khan, Shahryar , " A Cointegration Analysis of Purchasing Power Parity : 1973-96 ", International Advances in Economic Research , Volume 5, Number 3 , August , 1999. http://www.iaes.org/journal/iaer/aug_99/ramirez

Steel ,R. & Torrie,J. , Principles and Procedures of Statistics, Tokyo: McGraw-Hill Kogakuha Ltd, Second Edition, 1980.

Zhou, Zhong-guo, " Forecasting Sales and Price for Existing Single-Family Homes: A VAR Model with Error Correction, Journal of Real Estate Research, Volume 14, number 1-2 , 1997.

مراجع بالعربية :

أحمد عباده سرحان ، صلاح الدين طلبه ، أسس الاحصاء ، الأسكندرية : دار الكتب الجامعية ، طبعة أولى ، ١٩٦٨.

دومينيك سالفاتور ، نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي ، سلسلة ملخصات شوم ، (ترجمة سعدية حافظ) نيويورك : دار ماكجروهيل للنشر ، ١٩٨٢ .

عباس السيد ، الاقتصاد القياسي ، الأسكندرية : دار الجامعات المصرية ، ١٩٨٨ .

عبدالعزيز فهمي ، الكمبيوتر والاقتصاد القياسي ، بيروت : دار الراتب الجامعية ، ١٩٨٥.

والتر فاندال، السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس-جنكنز ، (تعريب ومراجعة عبدالمرضي حامد عزام & أحمد حسين هارون) الرياض : دار المريخ ١٩٩٢.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]